NO. 717. CLASS.

EDWIN M. BLAKE.

Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/mathematischeabh0000julu

Pückler

JULIUS PLÜCKERS

GESAMMELTE

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN.

IM AUFTRAG DER KGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. SCHOENFLIES UND **FR. POCKELS.**

IN ZWEI BÄNDEN.

ERSTER BAND.
MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

JULIUS PLÜCKERS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

A. SCHOENFLIES.

MIT EINEM BILDNISS PLÜCKERS

UND 73 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1895.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Die vorliegende Herausgabe von Plücker's gesammelten Abhandlungen ist der *Göttinger* Gesellschaft der Wissenschaften zu danken, deren correspondirendes Mitglied Plücker gewesen ist. Von Seiten der Familie wurde die erforderliche Einwilligung hierzu auf das bereitwilligste ertheilt, wofür ihr auch an dieser Stelle der schuldige Dank ausgedrückt werden möge.

Der erste Theil umfasst die *mathematischen* Abhandlungen, die in Zeitschriften erschienen sind; die selbständig in Buchform herausgekommenen Schriften sind jetzt noch käuflich und konnten daher von der Gesammtausgabe ausgeschlossen werden. Alles übrige ist sorgfältig gesammelt worden, und gelangt, bis auf eine Anzeige von Magnus' Aufgabensammlung zur Geometrie des Raumes, die nur theilweise aufgenommen ist, vollständig zum Abdruck.

Im Plücker'schen Nachlass hat sich von noch ungedruckten Manuscripten nur eines vorgefunden, nämlich der Text einer akademischen Rede aus dem Jahre 1829. Der vollständige Abdruck der Rede schien nicht geboten, einzelne Stellen sind in den Anmerkungen zu der Clebsch'schen Gedächtnissrede wiedergegeben.

Massgebend für die Herausgabe der Plücker'schen mathematischen Schriften ist in erster Linie der *historische* Gesichtspunkt gewesen, nämlich die Erwägung, dass neben Poncelet, Möbius und Steiner, die bereits erschienen sind, neben Grassmann, dessen Werke im Erscheinen begriffen sind, Plücker's Arbeiten eine nothwendige Ergänzung bilden, wenn man sich ein Bild von der Entstehung der modernen Geometrie machen will. Die Methode der abgekürzten Bezeichnung, die Bedeutung der Constantenzahl, der allgemeine Coordinatenbegriff, insbesondere die Einführung der Linien- und Ebenencoordinaten, die homogene Schreibweise, die Benutzung überzähliger Coordinaten, der Zusammenhang der Singularitäten, die Liniengeometrie, kurz ein grosser Theil der fundamentalen Gedanken und Hülfsmittel, auf Grund deren sich die moderne Geometrie in analytischer und formentheoretischer Richtung wesentlich entwickelt hat, gehen auf Plücker zurück. Ja, wenn wir an der Wende des Jahrhunderts den Weg überschauen, den seit den Tagen von Monge die Geometer gegangen sind, so müssen

22259

wir vielleicht bekennen, dass wir trotz der Genialität eines Steiner und trotz der intellectuellen Kraft eines Grassmann doch vorwiegend auf den Schultern von Poncelet und Plücker stehen. Erst als die Dualität und die das Unendliche durchziehende geometrische Continuität dem analytischen Bewusstsein zugänglich geworden war, konnte das projective Denken zu derjenigen Gestaltungskraft und zu derjenigen Beherrschung der Raumgebilde gelangen, die es heute besitzt.

Ueber die Kraft seiner Ideen ist sich Plücker von Anfang an klar gewesen; er hat sie lange Jahre hindurch allein vertreten müssen, im bewussten Gegensatz gegen die rein geometrische Richtung, die damals die Alleinherrschaft besass. Dieser Richtung gegenüber hat er die Tragweite seiner analytischen Darstellungs- und Denkweise von vorn herein mit sicherem Blick erkannt; auch jetzt noch gewährt es grosses Interesse, zu sehen, mit welcher souveränen Kraft er sich ihrer bediente.

Und doch ist Plücker nicht in jeder Hinsicht ein analytisches Talent gewesen. Seine Stärke bestand nicht in der Eleganz der Form, sondern in dem analytischen Operiren, in der Kunst des analytischen Lesens und Combinirens. Auch er gehört zu denen, deren wesentlichste Erfolge in ihrer mathematischen Phantasie beruhen; was an seinen Arbeiten in erster Linie fesselt, ist die Lebhaftigkeit seiner Gedanken und die Leichtigkeit der Problemstellung, keineswegs deren rechnerische Ausführung. Auf diesem Gebiet steht er vielen seiner Zeitgenossen nach; das, was man heute unter eleganter Rechnung versteht, und was wir z. B. besonders an Hesse bewundern, war ihm entweder so gut wie fremd, oder aber er hat sich bei der Schnelligkeit, mit der es ihn immer wieder zu neuen Problemen zog, nicht die Zeit genommen, die Ausführung seiner Ideen nach formaler Seite abzurunden.

Eine eingehendere Würdigung seiner Arbeiten ist in der Gedächtnissrede von Clebsch vom Jahr 1872 enthalten, die aus dem 15. Bande der Göttinger Abhandlungen hier abgedruckt worden ist.

Citate und Anmerkungen unter dem Text, die von dem Herausgeber herrühren, sind in eckige Klammern eingeschlossen worden.

Den Herren Professor F. Klein, Professor Dr. Budde in Berlin und Director Dr. Dronke in Trier sagt der Herausgeber auch an dieser Stelle ganz besondern Dank für die freundlichen Bemühungen, denen sie sich im Interesse dieser Ausgabe bereitwilligst unterzogen haben.

Göttingen, im Mai 1895.

A. Schoenflies.

Inhaltsverzeichniss.

		Seite
	Zum Gedächtniss an Julius Plücker von Alfred Clebsch .	IX—XXXV
1	Generalem analyseos applicationem ad ea quae geometriae altioris et mechanicae basis et fundamenta sunt e serie Tayloria deducit Julius Plücker	1—42
2.	Théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques. .	43—59
3.	Recherche graphique du cercle osculateur, pour les lignes du second ordre	60 - 62
4.	Mémoire sur les contacts et les intersections des cercles. . . .	63 - 75
5.	Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés. . . .	76—82
6.	Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés . . .	83—88
7.	Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte	89—102
8.	Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben	103—123
9.	Ueber ein neues Coordinatensystem	124—158
10.	Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch unbestimmter Symbole und Coefficienten	159—177
11.	Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen.	178—219
12.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere zu beweisen, letztere aufzulösen	220 - 223
13.	Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes .	224 - 234
14.	Analytisch-geometrische Aphorismen I	235—245
15.	Analytisch-geometrische Aphorismen II.	246 - 252
16.	Analytisch-geometrische Aphorismen III	253 - 260
17.	Analytisch-geometrische Aphorismen IV	261 - 276
18.	Analytisch-geometrische Aphorismen V.	277—283
19.	Analytisch-geometrische Aphorismen VI	284—289
20.	Ueber solche Punkte, die bei Curven einer höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen . .	290—297
21.	Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes	298—301
22.	Enumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies	302 - 322
23.	Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues	323—333
24.	Note sur les points singuliers des courbes	334—338
25.	Discussion de la forme générale des ondes lumineuses	339—386

Seite

26. Aphorismen aus der Geometrie des Raumes . . . . . 387—403
27. Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung . . 404—412
28. Note sur le théorème de Pascal . . . . . 413 - 416
29. Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe . . . . . 417—433
30. Ueber eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe . . . . . 434—436
31. Bemerkung zu der Abhandlung: „Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung“. . . . . 437—455
32. Sur la réflexion de la lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom . . . . . 456—461
33. On a new geometry of space . . . . . 462—468
34. On a new geometry of space . . . . . 469—545
35. Fundamental views regarding mechanics . . . . . 546—568
36. On complexes of the second order 569
37. Géométrie nouvelle de l'espace . . . . . 570—575
38. Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction . . . . . 576—585
39. Anzeige des Systems der analytischen Geometrie . . . . . 586—590

Anmerkungen des Herausgebers . . . . . 591—620

Nicht in diese Ausgabe aufgenommen sind die selbständig erschienenen und jetzt noch käuflichen Werke Plücker's, nämlich

1) Analytisch-geometrische Entwicklungen, Essen, Bd. I, 1828, Bd. II, 1831.
2) System der analytischen Geometrie, Berlin, 1835.
3) Theorie der algebraischen Curven, Bonn, 1839.
4) System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf, 1846.
5) Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, Bd. I, 1868, Bd. II (herausgegeben von F. Klein) 1869.

Zum Gedächtniss an Julius Plücker

von

Alfred Clebsch.

Wenn man im wissenschaftlichen wie im politischen Leben der Völker Epochen verschiedenartiger Thätigkeit unterscheidet, so darf für die Entwicklung der deutschen Mathematik das Jahr 1826 als besonders abgrenzend und Epoche machend bezeichnet werden. Ueberblicken wir die Jahrzehnte, welche diesem Jahre vorangehen, so finden wir in Deutschland Gauss, in wissenschaftlichem Verkehr meist mit Astronomen, eigentlich mathematischen Verkehrs entbehrend; wir finden Pfaff, dessen schöne Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen ihm ein dauerndes Andenken sichern. Aber gegenüber der zahlreichen Theilnahme mannigfacher Kräfte, welche die Mathematik in Frankreich fand, sehen wir in Deutschland nur die Schule der Combinatoriker, deren Ziele von unsern gegenwärtigen weit abliegen.

Wie diese Verhältnisse sich vom Jahre 1826 an plötzlich ändern, wie von da ab man eine wirkliche Entwicklung der Mathematik in Deutschland in stets sich erweiternden Kreisen verfolgen kann, gehört zu den bemerkenswerthesten Erscheinungen, welche die Geschichte der Wissenschaften zeigt. Und nicht allein nach einer einzigen Richtung entstand urplötzlich ein neues Leben. Einerseits entwickelte Jacobi neue und fundamentale Gesichtspunkte für die analytischen Functionen. Die wetteifernde Thätigkeit von Jacobi und von Abel, der durch das zu gleicher Zeit neu gegründete Crelle'sche Journal zu den deutschen Mathematikern in engste Beziehung trat, führte bald zu Perspectiven von unendlicher Ausdehnung, an deren Ausfüllung noch lange Reihen von Geschlechtern zu arbeiten haben werden. Um dieselbe Zeit kündeten Dirichlet's erste Arbeiten über Aufgaben der Zahlentheorie jene scharfsinnige Strenge der Methoden an, welche für die Functionentheorie in anderm Sinne fundamental werden sollten. Zugleich aber erstanden in Möbius, Steiner und Plücker drei Geometer von grösster Bedeutung und innerster Originalität, welche, auf verschiedenen Wegen fortschreitend, sich in wesentlichen Gesichts-

punkten vereinigten, und welchen man grossentheils die gegenwärtige Gestalt unserer geometrischen Anschauungen verdankt.

Als ein bedeutendes und für die weitere Entwicklung folgenreiches Moment darf wohl hervorgehoben werden, dass hiermit sogleich zwei Richtungen gegeben waren, deren Gegensatz, mehr oder weniger ausgeprägt, alle Epochen mathematischer Forschung begleitet, und welche man als die abstracte und die anschauungsmässige Richtung bezeichnen darf. Beide zusammen umfassen erst in Verein und Ergänzung das Ganze mathematischer Forschung, und es vermag keine von beiden auf die Dauer ohne schwere Schädigung ihres eigensten Wesens die Begleitung und den Einfluss der andern zu entbehren.

Es wird im Folgenden meine Aufgabe sein, die Thätigkeit des letztgenannten Geometers, welcher der königlichen Gesellschaft seit 1864 als Correspondent angehörte, so weit es hier möglich ist, darzulegen, und im Vergleich mit den Leistungen Mitstrebender zu erläutern wie zu begrenzen. Hierbei wird es von selbst nothwendig werden, die Geschichte der Geometrie in den letzten 50 Jahren nach einigen Richtungen hin zu verfolgen; ein Umstand, der ebensowohl das erhöhte Interesse als die Schwierigkeiten kennzeichnet, welche den nachfolgenden Versuch begleiten. Doch scheint es um so wünschenswerther, diese Verhältnisse im Sinne einer correcten historischen Auffassung darzulegen, als leider noch immer nicht überall das Bestreben erloschen scheint, Prioritäten im Sinne und der Denkungsweise vergangener Zeiten zu reclamiren und zu bestreiten. Für denjenigen, welcher die Geschichte der Wissenschaft ruhig betrachtet, giebt es nicht leicht etwas Unerquicklicheres und Zweckloseres. Können wir doch täglich sehen, wie die Keime wissenschaftlicher Entdeckungen zu gewissen Zeiten überall liegen und an den verschiedensten Orten gleichzeitig aufgehen. Dasselbe Resultat der Forschung ergiebt sich den verschiedensten Forschern zur nämlichen Zeit, sobald es im Sinne der Wissenschaft liegt; und wenn es sich darum handelt, genau festzustellen, wer eine Entdeckung zuerst ausgesprochen, wer sie später wiederholt hat, so ist das oft eine willkürliche Bevorzugung rein zufälliger Momente — von den sonst wohl geläufigen Beschuldigungen des Plagiats ganz zu schweigen. Die Geschichte der Wissenschaft hat vielmehr die Aufgabe, den Gedanken nachzuspüren, welche gemeinschaftlich in Generationen sich entwickeln, und die allgemeinen Processe darzulegen, für welche die Entdeckungen des Einzelnen mehr die Symptome als die treibenden Ursachen darstellen. Bei einer solchen Auffassung wird man weniger oft Gelegenheit haben, davon zu sprechen, dass eine Entdeckung ihrer Zeit vorausgeeilt sei, oder dass eine einzelne Persönlich-

keit einer Zeit ausschliesslich das Gepräge ihres Geistes aufgedrückt habe; aber dafür nimmt das Ganze der Wissenschaft einen organischen Charakter an. Im Einzelnen freilich bleibt immerhin zu untersuchen, in wie weit nahezu gleichzeitige Erscheinungen ursächlich auf einander gewirkt haben; nur darf man die Zeitfolge mit der ursächlichen Einwirkung nicht schlechthin verwechseln.

Julius Plücker wurde am 16. Juni 1801 zu Elberfeld geboren. Er erhielt seine Vorbildung auf dem Gymnasium zu Düsseldorf, besuchte dann die Universitäten Bonn, Heidelberg, Berlin, und hielt sich zum Schluss seiner Studien 1823—24 in Paris auf. Nach Deutschland zurückgekehrt, habilitirte er sich 1826 als Privatdocent für Mathematik an der Universität Bonn, und begann hier sofort jene bewunderungswürdige Thätigkeit, welche für die Entwicklung der gesammten Geometrie so fruchtbar geworden ist. Bald wurde ihm eine ausserordentliche Professur in Bonn (1828) zu Theil. Er verliess dieselbe, um in Berlin am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu wirken (1833) — nur auf kurze Zeit, denn schon (1834) erfolgte seine Berufung als ordentlicher Professor nach Halle. Von Halle kehrte er 1836 in gleicher Eigenschaft nach Bonn zurück, und hier begann sich eine Wandlung zu vollziehen, durch welche Plücker eine sehr eigenthümliche Stellung in der Wissenschaft einnimmt. Einem an der Universität entstandenen Bedürfnisse Folge leistend, übernahm er neben seiner mathematischen Professur physikalische Vorlesungen, und es wurde ihm, zunächst provisorisch, sodann definitiv, auch die Professur der Physik übertragen. Noch bis 1840 fuhr Plücker fort, unermüdlich geometrisch zu arbeiten. Nach einer bei einem so rastlosen Geiste auffallenden Pause erschien erst wieder 1846 ein Zeichen seiner Thätigkeit, mit welchem zunächst seine Beschäftigung mit der Geometrie abschloss. Von da an gehörte er durchaus der Physik an und arbeitete in derselben mit ähnlicher Kraft und Frische, wie früher in der Geometrie. Erst in den letzten Jahren seines Lebens wandte er sich wieder derjenigen Wissenschaft zu, die den Bestrebungen seiner jüngern Jahre so mannigfache Fortschritte verdankte. In der Ausführung eines Werkes begriffen, welches der geometrischen Anschauung principiell ein neues und ausgedehntes Gebiet eröffnete, starb er am 22. Mai 1868.

Ehe ich zur genaueren Besprechung von Plücker's geometrischen Leistungen übergehe, mag es mir vergönnt sein, auch seine physikalische Thätigkeit mit wenigen Worten zu berühren. Ein Blick auf diese scheinbar heterogene Seite seines Wirkens führt auch manche Klärung in der Auffassung seiner geometrischen Richtung herbei, und bietet Gelegenheit zu interessanten Vergleichen.

Es war vorzugsweise in England, wo Plücker's physikalische Thätigkeit Anerkennung fand*). In der That erkennt man leicht, dass die Art seiner Forschung derjenigen vorzugsweise nahe stand, welche Faraday und die sich ihm anschliessenden englischen Physiker übten, und man darf wohl nicht mit Unrecht Faraday, dem Plücker in der Zeit seiner physikalischen Thätigkeit durch mannigfache Beziehungen verbunden war, auch als *sein* Vorbild betrachten. Wie die Untersuchungen Faraday's sind auch die Plücker's wesentlich qualitativer Natur. Nicht sowohl die genauere numerische Bestimmung einzelner Vorgänge, als die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen überhaupt war es, welche ihn interessirte. Mit rastlosem Eifer und scharfem Blicke ausgerüstet, vermochte er manche neue Erscheinungsclassen zu erfassen, und wandte er sich mit Vorliebe noch völlig unerforschten Gebieten zu. So wird der Diamagnetismus, der Magnetismus der Krystalle, die Entladung der Electricität im luftverdünnten Raume, die Spectralanalyse der Gase mit seinem Namen verknüpft bleiben.

Es ist vielfach auffallend gewesen, dass Plücker, ursprünglich von der Mathematik ausgehend, in der Physik nicht gleichfalls die mathematische Seite angebaut hat. In der That hat er die Physik wesentlich von ihrer experimentellen Seite erfasst, und ist in keiner Weise das gewesen, was man einen mathematischen Physiker nennt. In einer Zeit, wo die Fortschritte, welche aus der Anwendung molekular-physikalischer Hypothesen in den verschiedensten Zweigen der mathematischen Physik hervorgegangen, noch in frischem Andenken standen, blieben ihm molekular-theoretische Ansichten überhaupt fremd. Der Analyse bediente er sich nur, um das Gestaltliche der physikalischen Verhältnisse rein hervorheben und einfach mit Bekanntem in Zusammenhang bringen zu können; eine Anwendung der Mathematik auf physikalische Gegenstände, welche, förderlich und interessant, wie sie ist, gänzlich fern liegt den Versuchen der mathematischen Speculation, physikalische Disciplinen von einfachen Hypothesen ausgehend durch reine Analyse aprioristisch zu begründen.

Wenn man tiefer in das Wesen von Plücker's Thätigkeit eindringt, so ersieht man, dass das Besondere seines physikalischen Strebens mit den Eigenthümlichkeiten seines mathematischen Schaffens auf eine gemeinsame Quelle zurückführt. Plücker war eine wesentlich und eminent productive Natur. Seine ganze Denkweise, mehr producirend als analysirend, gewährte ihm die volle Freude an dem Reich-

*) Wie überhaupt gerade in England Plücker's Leistungen hochgeschätzt wurden, beweist die im Jahre 1867 erfolgte Verleihung der Copley-Medaille.

thum neuer Gestalten und Gebilde, welche die Fruchtbarkeit seiner Phantasie unerschöpflich ihm zuführte. Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen. Die ganze Art seiner Arbeiten in Physik und Mathematik war hierdurch zu einer bestimmten Weise gedrängt, welche umsomehr hervorgehoben werden mag, als sie nicht nur für Plücker, sondern für eine ganze grosse und wichtige Seite wissenschaftlicher Forschung charakteristisch ist. Es kann die Forschung von bestimmten Problemen ausgehen, deren Wichtigkeit sie erkannt hat, deren Lösung mit allen Kräften mehr oder weniger direct angestrebt wird. Aber ebenso berechtigt ist die andere Art der Forschung, welche sich nur das Gebiet ihrer Thätigkeit wählt, in diesem aber freie Umschau hält, und entgegengesetzt der ersten, nach Problemen späht, deren Lösung sich ermögliche. Ueber den relativen Werth dieser Forschungsmethoden werden verschiedene Individualitäten immer verschiedener Ansicht sein. Wenn die erstere zu grösserer Vertiefung führen kann, so ist sie auch der Unfruchtbarkeit nur zu leicht ausgesetzt. Der andern schuldet man Dank für die Erwerbung grosser und neuer Gebiete; wobei denn im Einzelnen Vieles der erstern Methode zu ergründen und zu begrenzen verbleiben mag. Nach dem Obigen wird man leicht einsehen, dass es die zweite Weise der Forschung war, welche Plücker consequent und mit Bewusstsein übte, welcher er den Umfang und die Mannigfaltigkeit seiner Resultate verdankt.

Man kann nicht verkennen, dass diese Art seiner geistigen Anlage und Richtung zugleich die Grösse wie die Begrenzung auch seiner geometrischen Thätigkeit begründet. Keiner, selbst der ihm in vieler Beziehung verwandte Steiner, ist reicher an Anregungen, an neuen Gesichtspunkten, an bisher unbekannten Gegenständen und Hülfsmitteln der geometrischen Speculation. Die Fülle seiner neuen Anschauungen und Erfahrungen drängte ihn sofort zu ausführlichen Darlegungen, wovon sechs grössere geometrische Werke Zeugniss ablegen. Aber nicht immer vermochte er die sich ihm aufdrängende Fluth von Erscheinungen völlig zu beherrschen; und so machen häufig die kurzen und knappen Darlegungen, durch welche er in Journalen gelegentlich dem Publikum den Kern seiner Entdeckungen bekannt machte, einen organischeren und fertigeren Eindruck als jene grossen und ausführlichen Werke. So verführte ihn die Leichtigkeit seiner Production bisweilen zu Irrthümern, welche nur der ungeschehen wünschen kann, der nicht die ihnen mit den grössten Vorzügen gemeinsame Quelle erkennt; Irrthümer, welche ohnedies der Verlauf der Wissenschaft niemals verfehlt,

bald zu berichtigen. Wer, wie ich selbst, Gelegenheit hatte, Plücker während reger geometrischer Production zu kennen und an der Entwicklung seiner Ideen Theil nehmen zu dürfen, erstaunte über den Reichthum und die Mannigfaltigkeit derselben. Man wird sich nicht wundern dürfen, wenn sie auch ihm bisweilen zu mächtig wurden, und die gleichsam durch Intuition schnell erworbenen Resultate in einigen einzelnen Fällen die Probe der ruhigen Untersuchung nicht bestanden.

In genauem Zusammenhange hiermit steht der Umstand, dass Plücker die gleichzeitige Literatur verhältnissmässig wenig berücksichtigte. So konnte es in einzelnen Fällen geschehen, dass ihm Untersuchungen Anderer, welche zu den seinigen in Beziehung standen, unbekannt blieben, und dass er zuweilen von neuem fand und als das seinige betrachtete, was Andere vor ihm bereits ausgesprochen hatten. Er durfte sich damit trösten, dass öfter das entgegengesetzte geschah, und andre Geometer sich Entdeckungen zuschrieben, welche Plücker längst vor ihnen gemacht.

Die Darstellung von Plücker's geometrischer Thätigkeit bietet einen Vorzug, welcher bei Nekrologen nur selten auftritt. Der grösste Theil seines geometrischen Wirkens gehört bereits der Geschichte an und hat reichlich Frucht getragen, an der man Stamm und Wurzel erkennen mag. Bereits ein Vierteljahrhundert ist verflossen, seitdem vor der entschiedenen Wendung zur Physik seine letzte Arbeit erschien. Nur die verhältnissmässig kurze Zeit, in welcher er der Geometrie sich abermals zuwandte, ist uns ganz nahe gerückt; und auch für diese Thätigkeit liegen die Keime in den Untersuchungen der frühern Periode.

Freilich bedingt der erwähnte Umstand einen zweiten, um dessen willen Plücker's Arbeiten nicht mehr soviel gelesen werden, als sie nach Inhalt und Methode es verdienen. Die analytische Gestalt, in welcher seine Untersuchungen auftreten, besitzt oft noch nicht jene der Natur der algebraischen Probleme angepasste elegante Form, an welche wir, insbesondere seit Hesse, gewöhnt sind. Plücker's Rechnungen tragen zum Theil auffallend den Stempel des blossen Hülfsmittels für die Darlegung geometrischer Verhältnisse. Dass die algebraischen Zusammenhänge für sich ein inneres Interesse haben, und eine adäquate Darstellung erfordern, konnte erst einer Generation zum Bewusstsein gelangen, welche sich der grossentheils von Plücker selbst neu erworbenen Gebilde und Methoden gewohnheitsmässig bediente.

Aber es kann andrerseits nicht genug hervorgehoben werden,

welche Verdienste Plücker sich dadurch erworben hat, dass er zuerst ein specifisch geometrisches Gebiet, und zwar eines, welches vollständig der synthetischen Richtung der Geometrie anzugehören schien, consequent in ein analytisches Gewand zu kleiden unternahm. Es wurde hierdurch sowohl der Grund für die classischen Untersuchungen von Hesse gelegt, wie für die ganze Disciplin der neuern Algebra, und die weitverzweigten geometrisch-algebraischen Untersuchungen, welche damit in Zusammenhang stehen. Für die Zeit, in welcher Plücker mit seinen Arbeiten hervortrat, war es ausserdem ein wesentliches Moment, dass gewisse Begriffe, deren die synthetische Geometrie sich noch nicht vollständig hatte bemächtigen können, in analytischem Gewande zuerst völlig deutlich zu machen waren. Ich rechne dahin den Begriff der allgemeinen Curven und Oberflächen, welcher auf rein synthetischem Wege erst viel später durch Grassmann's tiefsinnige Arbeiten erschlossen wurde*). Dahin rechne ich ferner das Imaginäre, welches in einer gewissen mysteriösen Weise in der Geometrie sich unaufhörlich bemerken liess, und erst in der Identität der synthetischen Grundoperationen mit gewissen einfachen algebraischen Verfahrungsweisen auf eine einfache und nothwendige Art Erklärung seines Auftretens und seiner Stellung fand**). Auch dieses wurde erst viel später, durch v. Staudt, der rein synthetischen Methode in strenger Weise zugänglich gemacht.

Indem sich die analytische Geometrie auf solche Weise mit einem wirklichen und aus der Natur ihres Wesens entspringenden Inhalte erfüllte, hat sie sich schliesslich als Fundament auch anderer, scheinbar ganz heterogener Gebiete enthüllt, und damit eine immer grössere Bedeutung für die Gesammtheit der mathematischen Disciplinen erhalten. Es war einer neueren Entwicklung die Einsicht vorbehalten, dass schliesslich die algebraischen Functionen die einzigen völlig begriffenen sind, alle wichtigen übrigens betrachteten Functionen dem Boden der Algebra entspriessen, und dass selbst die Abel'schen Functionen nur Ausflüsse der Betrachtungen sind, auf welche die Untersuchung der algebraischen Curve geführt hat. —

Wie im Eingange die mathematischen Zustände in Deutschland

*) Leider sind die schönen Arbeiten dieses höchst bedeutenden Geometers noch immer wenig gekannt, was wohl hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dass in der Darstellung Grassmann's diese geometrischen Resultate als Corollare viel allgemeiner und sehr abstracter Untersuchungen auftreten, die in ihrer ungewöhnlichen Form dem Leser nicht unerhebliche Schwierigkeiten bereiten.

**) Man vergleiche die Auseinandersetzung, welche Plücker in der Vorrede des zweiten Bandes der „Analytisch-geometrischen Entwicklungen" gegeben hat.

Es war vorzugsweise in England, wo Plücker's physikalische Thätigkeit Anerkennung fand*). In der That erkennt man leicht, dass die Art seiner Forschung derjenigen vorzugsweise nahe stand, welche Faraday und die sich ihm anschliessenden englischen Physiker übten, und man darf wohl nicht mit Unrecht Faraday, dem Plücker in der Zeit seiner physikalischen Thätigkeit durch mannigfache Beziehungen verbunden war, auch als *sein* Vorbild betrachten. Wie die Untersuchungen Faraday's sind auch die Plücker's wesentlich qualitativer Natur. Nicht sowohl die genauere numerische Bestimmung einzelner Vorgänge, als die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen überhaupt war es, welche ihn interessirte. Mit rastlosem Eifer und scharfem Blicke ausgerüstet, vermochte er manche neue Erscheinungsclassen zu erfassen, und wandte er sich mit Vorliebe noch völlig unerforschten Gebieten zu. So wird der Diamagnetismus, der Magnetismus der Krystalle, die Entladung der Electricität im luftverdünnten Raume, die Spectralanalyse der Gase mit seinem Namen verknüpft bleiben.

Es ist vielfach auffallend gewesen, dass Plücker, ursprünglich von der Mathematik ausgehend, in der Physik nicht gleichfalls die mathematische Seite angebaut hat. In der That hat er die Physik wesentlich von ihrer experimentellen Seite erfasst, und ist in keiner Weise das gewesen, was man einen mathematischen Physiker nennt. In einer Zeit, wo die Fortschritte, welche aus der Anwendung molekular-physikalischer Hypothesen in den verschiedensten Zweigen der mathematischen Physik hervorgegangen, noch in frischem Andenken standen, blieben ihm molekular-theoretische Ansichten überhaupt fremd. Der Analyse bediente er sich nur, um das Gestaltliche der physikalischen Verhältnisse rein hervorheben und einfach mit Bekanntem in Zusammenhang bringen zu können; eine Anwendung der Mathematik auf physikalische Gegenstände, welche, förderlich und interessant, wie sie ist, gänzlich fern liegt den Versuchen der mathematischen Speculation, physikalische Disciplinen von einfachen Hypothesen ausgehend durch reine Analyse aprioristisch zu begründen.

Wenn man tiefer in das Wesen von Plücker's Thätigkeit eindringt, so ersieht man, dass das Besondere seines physikalischen Strebens mit den Eigenthümlichkeiten seines mathematischen Schaffens auf eine gemeinsame Quelle zurückführt. Plücker war eine wesentlich und eminent productive Natur. Seine ganze Denkweise, mehr producirend als analysirend, gewährte ihm die volle Freude an dem Reich-

*) Wie überhaupt gerade in England Plücker's Leistungen hochgeschätzt wurden, beweist die im Jahre 1867 erfolgte Verleihung der Copley-Medaille.

thum neuer Gestalten und Gebilde, welche die Fruchtbarkeit seiner Phantasie unerschöpflich ihm zuführte. Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen. Die ganze Art seiner Arbeiten in Physik und Mathematik war hierdurch zu einer bestimmten Weise gedrängt, welche umsomehr hervorgehoben werden mag, als sie nicht nur für Plücker, sondern für eine ganze grosse und wichtige Seite wissenschaftlicher Forschung charakteristisch ist. Es kann die Forschung von bestimmten Problemen ausgehen, deren Wichtigkeit sie erkannt hat, deren Lösung mit allen Kräften mehr oder weniger direct angestrebt wird. Aber ebenso berechtigt ist die andere Art der Forschung, welche sich nur das Gebiet ihrer Thätigkeit wählt, in diesem aber freie Umschau hält, und entgegengesetzt der ersten, nach Problemen späht, deren Lösung sich ermögliche. Ueber den relativen Werth dieser Forschungsmethoden werden verschiedene Individualitäten immer verschiedener Ansicht sein. Wenn die erstere zu grösserer Vertiefung führen kann, so ist sie auch der Unfruchtbarkeit nur zu leicht ausgesetzt. Der andern schuldet man Dank für die Erwerbung grosser und neuer Gebiete; wobei denn im Einzelnen Vieles der erstern Methode zu ergründen und zu begrenzen verbleiben mag. Nach dem Obigen wird man leicht einsehen, dass es die zweite Weise der Forschung war, welche Plücker consequent und mit Bewusstsein übte, welcher er den Umfang und die Mannigfaltigkeit seiner Resultate verdankt.

Man kann nicht verkennen, dass diese Art seiner geistigen Anlage und Richtung zugleich die Grösse wie die Begrenzung auch seiner geometrischen Thätigkeit begründet. Keiner, selbst der ihm in vieler Beziehung verwandte Steiner, ist reicher an Anregungen, an neuen Gesichtspunkten, an bisher unbekannten Gegenständen und Hülfsmitteln der geometrischen Speculation. Die Fülle seiner neuen Anschauungen und Erfahrungen drängte ihn sofort zu ausführlichen Darlegungen, wovon sechs grössere geometrische Werke Zeugniss ablegen. Aber nicht immer vermochte er die sich ihm aufdrängende Fluth von Erscheinungen völlig zu beherrschen; und so machen häufig die kurzen und knappen Darlegungen, durch welche er in Journalen gelegentlich dem Publikum den Kern seiner Entdeckungen bekannt machte, einen organischeren und fertigeren Eindruck als jene grossen und ausführlichen Werke. So verführte ihn die Leichtigkeit seiner Production bisweilen zu Irrthümern, welche nur der ungeschehen wünschen kann, der nicht die ihnen mit den grössten Vorzügen gemeinsame Quelle erkennt; Irrthümer, welche ohnedies der Verlauf der Wissenschaft niemals verfehlt,

bald zu berichtigen. Wer, wie ich selbst, Gelegenheit hatte, Plücker während reger geometrischer Production zu kennen und an der Entwicklung seiner Ideen Theil nehmen zu dürfen, erstaunte über den Reichthum und die Mannigfaltigkeit derselben. Man wird sich nicht wundern dürfen, wenn sie auch ihm bisweilen zu mächtig wurden, und die gleichsam durch Intuition schnell erworbenen Resultate in einigen einzelnen Fällen die Probe der ruhigen Untersuchung nicht bestanden.

In genauem Zusammenhange hiermit steht der Umstand, dass Plücker die gleichzeitige Literatur verhältnissmässig wenig berücksichtigte. So konnte es in einzelnen Fällen geschehen, dass ihm Untersuchungen Anderer, welche zu den seinigen in Beziehung standen, unbekannt blieben, und dass er zuweilen von neuem fand und als das seinige betrachtete, was Andere vor ihm bereits ausgesprochen hatten. Er durfte sich damit trösten, dass öfter das entgegengesetzte geschah, und andre Geometer sich Entdeckungen zuschrieben, welche Plücker längst vor ihnen gemacht.

Die Darstellung von Plücker's geometrischer Thätigkeit bietet einen Vorzug, welcher bei Nekrologen nur selten auftritt. Der grösste Theil seines geometrischen Wirkens gehört bereits der Geschichte an und hat reichlich Frucht getragen, an der man Stamm und Wurzel erkennen mag. Bereits ein Vierteljahrhundert ist verflossen, seitdem vor der entschiedenen Wendung zur Physik seine letzte Arbeit erschien. Nur die verhältnissmässig kurze Zeit, in welcher er der Geometrie sich abermals zuwandte, ist uns ganz nahe gerückt; und auch für diese Thätigkeit liegen die Keime in den Untersuchungen der frühern Periode.

Freilich bedingt der erwähnte Umstand einen zweiten, um dessen willen Plücker's Arbeiten nicht mehr soviel gelesen werden, als sie nach Inhalt und Methode es verdienen. Die analytische Gestalt, in welcher seine Untersuchungen auftreten, besitzt oft noch nicht jene der Natur der algebraischen Probleme angepasste elegante Form, an welche wir, insbesondere seit Hesse, gewöhnt sind. Plücker's Rechnungen tragen zum Theil auffallend den Stempel des blossen Hülfsmittels für die Darlegung geometrischer Verhältnisse. Dass die algebraischen Zusammenhänge für sich ein inneres Interesse haben, und eine adäquate Darstellung erfordern, konnte erst einer Generation zum Bewusstsein gelangen, welche sich der grossentheils von Plücker selbst neu erworbenen Gebilde und Methoden gewohnheitsmässig bediente.

Aber es kann andrerseits nicht genug hervorgehoben werden,

welche Verdienste Plücker sich dadurch erworben hat, dass er zuerst ein specifisch geometrisches Gebiet, und zwar eines, welches vollständig der synthetischen Richtung der Geometrie anzugehören schien, consequent in ein analytisches Gewand zu kleiden unternahm. Es wurde hierdurch sowohl der Grund für die classischen Untersuchungen von Hesse gelegt, wie für die ganze Disciplin der neuern Algebra, und die weitverzweigten geometrisch-algebraischen Untersuchungen, welche damit in Zusammenhang stehen. Für die Zeit, in welcher Plücker mit seinen Arbeiten hervortrat, war es ausserdem ein wesentliches Moment, dass gewisse Begriffe, deren die synthetische Geometrie sich noch nicht vollständig hatte bemächtigen können, in analytischem Gewande zuerst völlig deutlich zu machen waren. Ich rechne dahin den Begriff der allgemeinen Curven und Oberflächen, welcher auf rein synthetischem Wege erst viel später durch Grassmann's tiefsinnige Arbeiten erschlossen wurde*). Dahin rechne ich ferner das Imaginäre, welches in einer gewissen mysteriösen Weise in der Geometrie sich unaufhörlich bemerken liess, und erst in der Identität der synthetischen Grundoperationen mit gewissen einfachen algebraischen Verfahrungsweisen auf eine einfache und nothwendige Art Erklärung seines Auftretens und seiner Stellung fand**). Auch dieses wurde erst viel später, durch v. Staudt, der rein synthetischen Methode in strenger Weise zugänglich gemacht.

Indem sich die analytische Geometrie auf solche Weise mit einem wirklichen und aus der Natur ihres Wesens entspringenden Inhalte erfüllte, hat sie sich schliesslich als Fundament auch anderer, scheinbar ganz heterogener Gebiete enthüllt, und damit eine immer grössere Bedeutung für die Gesammtheit der mathematischen Disciplinen erhalten. Es war einer neueren Entwicklung die Einsicht vorbehalten, dass schliesslich die algebraischen Functionen die einzigen völlig begriffenen sind, alle wichtigen übrigens betrachteten Functionen dem Boden der Algebra entspriessen, und dass selbst die Abel'schen Functionen nur Ausflüsse der Betrachtungen sind, auf welche die Untersuchung der algebraischen Curve geführt hat. —

Wie im Eingange die mathematischen Zustände in Deutschland

*) Leider sind die schönen Arbeiten dieses höchst bedeutenden Geometers noch immer wenig gekannt, was wohl hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dass in der Darstellung Grassmann's diese geometrischen Resultate als Corollare viel allgemeiner und sehr abstracter Untersuchungen auftreten, die in ihrer ungewöhnlichen Form dem Leser nicht unerhebliche Schwierigkeiten bereiten.

**) Man vergleiche die Auseinandersetzung, welche Plücker in der Vorrede des zweiten Bandes der „Analytisch-geometrischen Entwicklungen" gegeben hat.

in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts geschildert wurden, war der Anschluss geometrischer Forschung an die Untersuchungen französischer Mathematiker mit Nothwendigkeit gegeben. Wir müssen in unserer Darstellung hier der Verständlichkeit wegen etwas weiter zurückgreifen. Bei der Wiederbelebung geometrischer Speculation im 16. Jahrhundert waren es zunächst die Alten, an welche man wieder anknüpfte; und es bedurfte einiger Zeit, ehe man im Stande war, nach geometrischer Seite über sie hinauszugehen. Von Einzelheiten abgesehen, waren es vor Allen Desargues und Pascal, deren geometrische Arbeiten eine neue und selbstständige Wendung anzeigten, eine Wendung, welche zu der heutigen Form der synthetischen Geometrie zu führen bestimmt war. Die Grundlagen dieser Untersuchungen waren zwar den spätern Epochen der antiken Geometrie nicht durchaus fremd, hatten aber doch im Alterthume eine entschiedene und principielle selbstständige Entwicklung nicht finden können. Das Ende des 17. und der grössere Theil des 18. Jahrhunderts hatte andre Aufgaben zu lösen, welche diese Zeit vollauf beschäftigten. Denn es war zunächst das rein Technische der Cartesischen analytischen Geometrie zu entwickeln; sodann aber trat neben der Differential- und Integralrechnung die Entwicklung der *Mechanik* in den Vordergrund, welcher in jener Zeit grossentheils die Rolle der anschauungsmässigen Mathematik zufiel, die in andern Epochen durch geometrische Speculation vertreten wurde. Aber am Ende des vorigen Jahrhunderts finden wir Carnot unmittelbar an jene ältern Geometer anknüpfend. Bei ihm tritt das Bestreben, Lagenverhältnisse allein zu betrachten und alles Metrische auszuscheiden, noch nicht so rein hervor, wie später bei Poncelet und Andern, ein Bestreben, welches endlich zur Auflösung des Metrischen in projective Begriffe führen sollte; doch erkennt man leicht den halb unbewussten Zug, welcher demjenigen entgegentreibt, was wir heute unter projectivischer Geometrie verstehen; ein Name, der besser als die nur auf die Form der Darstellung bezüglichen Namen der synthetischen und der analytischen Geometrie das Wesen der Sache und den Gesichtspunkt bezeichnet, unter welchem thatsächlich diese beiden früher gesonderten Disciplinen sich vereinigt haben.

Auf die weitere Entwicklung der Geometrie hat niemand mehr Einfluss gehabt, als Monge. Er verstand es, geometrisches Interesse überhaupt in weitern Kreisen zu wecken; seine Untersuchungen über die Anwendung der Geometrie auf Gegenstände der Analysis zeigten die Fruchtbarkeit dieser lange vernachlässigten Disciplin auch bezüglich scheinbar ganz heterogener Gebiete. Seine Schüler, ganz erfüllt

von wahrhaft geometrischem Sinne, vermochten es, die neuen Gedanken in principieller Weise zu erfassen und umzugestalten. Während ein Theil derselben sich in Monge's Sinne der Anwendung der Analysis auf gewisse metrische Probleme zuwandte, verfolgten andere rein projectivische Betrachtungen. Aus diesen sollte sich jener Charakter des *Organischen* entwickeln, welcher die neuere Geometrie auszeichnet und sie als so ganz verschieden von der Geometrie der Alten erscheinen lässt.[1])

Es war Poncelet*), welcher zuerst eine projectivische Geometrie schuf, welche der jetzigen Gestalt der Geometrie sehr nahe kommt. Bei ihm treten die reinen Lagenverhältnisse als solche deutlich hervor; ein grosses und für die Gestaltung der Wissenschaft fundamentales Princip, das der Dualität, wurde von Poncelet und Gergonne, in Wetteifer und Streit, gegründet, beleuchtet und seinem wahren Ausdrucke entgegengeführt. Ueberhaupt finden sich bei Poncelet schon die meisten derjenigen Momente vor, welche später zu den principiellen Grundlagen der Geometrie gemacht wurden, nur nicht schon als Principien hervorgehoben; so der Begriff des Doppelverhältnisses, der Verwandtschaft. Selbst eine *höhere* Verwandtschaft, die quadratische, findet sich schon bei diesem ausgezeichneten Geometer angedeutet, wenn auch ohne Bewusstsein des allgemeinen gedanklichen Inhalts (Traité des propriétés projectives, erste Ausgabe, 1822, p. 198, n. 370).

Die Ideen, welche Plücker in seiner ersten grössern Schrift (Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1. Theil, 1828, dem Datum der Vorrede nach im September 1827 beendet) entwickelt, knüpfen seiner eigenen Angabe nach an die eleganten Methoden an, vermöge deren Gergonne (Band VII seiner Annalen) die bekannten Berührungsaufgaben der Kreise behandelt hatte.[2]) Aus Gergonne's Methoden entsprang Plücker's neues Hülfsmittel, welches er zunächst für die Behandlung linearer Gleichungen als neues Princip einführte, die *Methode der abgekürzten Bezeichnung*. Er behandelte mit Hülfe derselben in dem erwähnten Bande die Theorie der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte.

Diese Methode, soweit sie in dem genannten ersten Plücker'schen Werke entwickelt ist, wurde fast gleichzeitig von Bobillier gefunden und dargestellt.**)[3]) (Gergonne, Annales Bd. 18, 1827—28,

*) Traité des propriétés projectives des Figures 1822; sur la théorie des surfaces réciproques, Gergonne, Annales VIII, 1817—18, Crelle, Bd. IV, 1829; sur les centres moyennes harmoniques, Crelle, Bd. III, 1828, etc.

**) Hiernach sind Angaben von Bertrand (Sur les travaux math. et phys. de M. Plücker, Journal des Savants. S. 271, 1867) und Paul Serret (Vorrede zu seiner Géométrie de direction, S. XV—XVI, 1869) zu berichtigen.

p. 320), ein Umstand, durch welchen ihre Zeitgemässheit hinlänglich gekennzeichnet wird. Auch dieser talentvolle junge Geometer scheint die Absicht gehabt zu haben, die Methode weiter zu entwickeln, woran ein frühzeitiger Tod ihn verhinderte. Dagegen konnte Plücker an der allmähligen Ausdehnung und Erweiterung der Methode arbeiten und dieselbe auch als Grundlage für die Behandlung mannigfacher höherer Probleme benutzen. Auf diese Weise entstand jenes eigenthümliche Verfahren, die Gleichung eines Gebildes aus abgekürzten Ausdrücken zusammenzusetzen und dann in dieser Form der Gleichung zu *lesen*, wovon Plücker unter anderm in der Theorie der Curven dritter Ordnung so schöne Anwendungen gegeben hat. Diese Methode, welche übrigens mit der weiterhin zu besprechenden Methode der Constantenabzählung auf's Genaueste zusammenhängt, ist jetzt längst Gemeingut aller Geometer geworden, und man hat alle Ursache sich ihres Urhebers mit Dank zu erinnern.

Um die Zeit, in welcher der erste Band der „Analytisch-geometrischen Entwickelungen" erschien, wurde Plücker in den Streit von Gergonne und Poncelet über das Princip der Dualität verwickelt, was ihm Veranlassung zur Klärung dieser fundamentalen Verhältnisse und zur Entdeckung eines der wichtigsten Hülfsmittel der analytischen Geometrie wurde.

Die Theorie von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt führte Poncelet zu einer Methode, vermöge deren aus gewissen Classen von Sätzen in der Ebene immer andere, parallele, abgeleitet werden konnten, indem man nur in dem *Ausdrucke* der ersten Sätze gewisse ein für alle mal feststehende Vertauschungen vornahm. Es beruhte dies darauf, dass durch den Kegelschnitt selbst jedem Punkte eine Gerade und umgekehrt zugeordnet war. Hatte man nun einen Satz, welcher rein auf Lagenverhältnisse Bezügliches aussagte, und dessen Ausdruck sich daher in eine Form fassen liess, bei welchem nur vom Schneiden gerader Linien und vom Verbinden von Punkten die Rede war, so folgte von selbst ein zweiter, bei welchem dem erstern gegenüber nur immer Punkt und Gerade, Schnittpunkt und Verbindungslinie vertauscht waren.

In gleicher Weise erlaubte für den Raum die Theorie von Pol und Polare in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, aus Sätzen über die Lage andre abzuleiten, indem man Punkt mit Ebene, die Verbindungslinie zweier Punkte mit der Schnittlinie zweier Ebenen, den Schnittpunkt dreier Ebenen mit der Verbindungsebene dreier Punkte vertauschte.

Gergonne fasste den hierdurch festgelegten Gegensatz zwischen

Punkt und Gerade in der Ebene, so wie den entsprechenden zwischen Punkt und Ebene im Raume mehr an und für sich ins Auge, und versuchte denselben unabhängig von der Einführung des Kegelschnittes hinzustellen, durch welchen bei Poncelet dieser Gegensatz vermittelt wurde. Aber hierbei verflüchtigte sich in etwas die feste Begründung des Princips, und es erschien fast als ein geheimnissvolles, freilich sehr umfassendes, philosophisches Axiom, was früher ein fruchtbarer Satz aus der Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung gewesen war.

Es gelang Plücker, dieses Princip in einer Weise zu begründen, bei welcher nur nothwendige Elemente benutzt wurden, und eine wirkliche Einsicht in das Wesen der Sache erreicht ward. Dies geschah, indem er von vorn herein *Punkt und Gerade als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie der Ebene*, *Punkt und Ebene als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie des Raumes* betrachtete; ein fundamentaler und weittragender Gedanke, bei welchem zum ersten Male von der gewohnheitsmässigen Vorstellung des Punktes als einzig denkbaren Grundelements räumlicher Gebilde Umgang genommen wurde. Plücker untersuchte nun, welche Bestimmungsstücke zweckmässiger Weise als *Coordinaten der Geraden in der Ebene und der Ebene im Raume* eingeführt werden mussten. Nachdem dieser Begriff festgestellt war, zeigte sich das Poncelet-Gergonne'sche Princip als selbstverständlich in dem einen Umstande enthalten, dass die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade in der Ebene, sowie für Punkt und Ebene im Raume eine für die Coordinaten der jedesmal auftretenden beiden Gebilde symmetrische Gestalt hat.

Von diesem Ausgangspunkte aus nahm nun die Geometrie völlig jenen dualen Charakter an, welchen Gergonne ihr mit Vorliebe vindicirt hatte. Gergonne's Begriff der Classe fand in der Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten, einer Fläche in Ebenencoordinaten seinen realen Ausdruck; die Darstellung des Punktes als einer Art von Curven, bez. Flächen, die Darstellung einer Raumcurve als einer Art von Flächen, welche den abwickelbaren dualistisch gegenüber trat, eröffnete einen Spielraum für neue Ideen und ist der geometrischen Gesammtanschauung höchst förderlich geworden.

Die besondere Art, in welcher Poncelet jeden Punkt einer Ebene einer gewissen Geraden mittelst eines Kegelschnitts zugeordnet hatte, konnte Plücker durch eine allgemeinere ersetzen, welche wir heute als reciproke lineare Verwandtschaft bezeichnen. Auch diese freilich erschien ihm, wie er im zweiten Bande der „Entwicklungen" erwähnt, als sehr besonderer Fall einer höchst allgemeinen Verwandtschaft mit

sehr willkürlichem Wechsel des Raumelements. Es können nach dieser vermöge einer „aequatio directrix" den Punkten der Ebene Curven beliebiger Ordnung entsprechen (analytisch-geometrische Entwicklungen Bd. 2 p. 251), eine Vorstellung, an welche erst in neuester Zeit wieder angeknüpft ist.[4])

Ich habe diese Untersuchungen, welche den Zeitraum von 1827—30 umfassen (die Vorrede des zweiten Bandes der „Entwicklungen" ist vom Herbst 1830 datirt), dargestellt, wie sie bei Plücker entstanden sind, ohne darauf einzugehen, dass Möbius einen Theil derselben bereits in seinem „Barycentrischen Calcul" (1827) anticipirt hatte. In diesem niemals genug zu bewundernden Werke, in welchem eine grosse Anzahl von Fundamentalbegriffen der Geometrie zuerst ausgesprochen waren*), hatte Möbius die Collineation wie die reciproke lineare Verwandtschaft bereits vollständig behandelt; und indem ihn die letztere auf das Princip der Dualität führt, beweist er dasselbe genau wie später Plücker durch die Symmetrie der Gleichung, welche die vereinigte Lage dualistisch entgegengesetzter Elemente angiebt (Baryc. Calcul. p. 436). Es fehlt bei Möbius nur der Begriff der Linien- bez. Ebenencoordinaten, so dass die Beweisführung minder durchsichtig wird. Es scheint, dass Möbius' Werk Plücker nicht so bald bekannt wurde oder wenigstens, dass es nicht unmittelbar auf ihn wirkte. Vielleicht darf man es der anspruchslosen Form zuschreiben, in welcher Möbius seine tiefen und neuen Gedanken veröffentlichte, dass ihr Inhalt und ihre Bedeutung gewöhnlich erst erfasst wurde, wenn andre Geometer der Reihe nach auf die von Möbius behandelten Momente durch die zwingende Nothwendigkeit des natürlichen Fortschritts der Wissenschaft geführt wurden. So sind einige der Möbius'schen Grundgedanken zugleich die von Steiner's geometrischen Gestalten (1832), und drangen von dort aus, wo sie mehr organisch und systematisch fortentwickelt waren, in weitere Kreise hinüber; noch mehr wurden sie allgemein erfasst, als später Chasles in seinem Aperçu historique (1837) dieselben Begriffe nochmals aufstellte, auf die er, der deutschen Sprache unkundig, auf's neue selbstständig gekommen war. Anderes, wie insbesondere den Begriff der rationalen Curven und Flächen, seiner Bedeutung nach zu erkennen, blieb der neuesten Zeit vorbehalten.

Der einzige Fall, in welchem Plücker auf eine höhere Verwandt-

*) Ich führe nur an: die principielle Einführung der Doppelverhältnisse, die homogenen Coordinaten, den Begriff der Verwandtschaften, die Betrachtung von Curven und Flächen, deren Coordinaten rational durch Parameter ausdrückbar sind etc.

schaft einging, war derjenige, den wir jetzt als *quadratische* bezeichnen, und deren bereits oben bei Erwähnung Poncelet's gedacht wurde. Auch hier zeigt sich wieder, wie wichtigere Untersuchungen so häufig von Verschiedenen gleichzeitig begonnen werden. Auf die kurzen Bemerkungen Plücker's (Crelle's Journal Bd. 5, 1829) bezieht sich der ihm persönlich befreundete Magnus, als er im 8. Bande von Crelle's Journal (1831) den Gegenstand, auf welchen auch er selbstständig geführt war, ausführlich behandelte; wie denn eigentlich Magnus wohl als Begründer dieser analytischen Theorie bezeichnet werden darf. Zugleich beschäftigte sich Steiner mit dem Gegenstande, wie aus einer Reclamation dieses grossen Geometers hervorgeht, welcher sich reich genug hätte fühlen können, um dergleichen doch schliesslich müssige Kämpfe um Prioritäten entbehren zu dürfen (vgl. das Ende der Vorrede zu seinen „Systematischen Entwicklungen", 1832). Unter diese Verwandtschaft fällt auch als besonderer Fall die von Möbius später ausführlich und aus andern Gesichtspunkten behandelte Kreisverwandtschaft, die Plücker im 11. Bande von Crelle's Journal (p. 219, 1834, datirt von 1831) erwähnt hatte. Bei Magnus finden sich übrigens bereits Ansätze zu einer allgemeineren Auffassung des eindeutigen Entsprechens zweier Ebenen, als deren Fortsetzung später die schönen Arbeiten Cremona's erscheinen, welche die Frage in allgemeinster Weise erledigten.

Zugleich mit den Liniencoordinaten führte Plücker ein anderes Hülfsmittel in die Geometrie ein, dessen Anwendung ebenso folgenreich wurde. Es waren dieses die sogenannten *Dreiecks-* (bez. *Tetraeder-*) *Coordinaten* (Crelle's Journal Bd. 5, 1829). Mit Hülfe dieser Coordinaten konnte Plücker unter Benutzung des Fundamentaltheorems der homogenen Functionen insbesondere den Gleichungen der Tangente und des Berührungspunktes ihre endgültige Form geben; mit ihrer Hülfe entwickelte er auf's einfachste die Eigenschaften der Polaren*). Auch hier kann man wieder Möbius als denjenigen bezeichnen, welcher den neuen Begriff zuerst, und zwar vor Plücker, gehabt hat. Denn Möbius' barycentrische Coordinaten (deren später Grassmann, Hamilton und Andere sich bedient haben) sind im Grunde keine andern; nur wird durch die aus der Mechanik geschöpfte Art der Entstehung der Begriff etwas verdeckt, und Anwendungen im Sinne der

*) Der Begriff der Polaren der verschiedenen Ordnungen findet sich wohl zuerst, mit dem unendlich fernen Punkt der Y-Axe als Pol, bei Cramer (1750), der sie Diameter nennt, wie Newton bezüglich der linearen Polare gethan hatte; die Bezeichnung der ganzen Reihe als erste, zweite etc. Polare stammt von Bobillier her (Gergonne, Annalen Bd. 18 und 19).

Theorie homogener Functionen treten bei Möbius wesentlich deswegen nicht ein, weil bei ihm nicht die Gleichung der Curve, sondern die Darstellung der Coordinaten durch einen Parameter die Grundvorstellung bildet.

Der Zusammenhang, welcher durch die Einführung dieser Coordinaten zwischen der Theorie der algebraischen Curven und der Theorie der homogenen Functionen hergestellt war, ist von Plücker nicht über die nächsten Anwendungen hin ausgebeutet worden. Erst Hesse that diejenigen Schritte, welche zu der jetzigen neuern Algebra hinüberleiteten, und die Theorie der algebraisch-geometrischen Gebilde als ein Capitel dieser Disciplin erscheinen liessen. Uebrigens bedient sich auch Hesse noch vielfach, wie Plücker meistens, nur des besondern Falles homogener Coordinaten, in welchem zwei der Veränderlichen die gewöhnlichen Coordinaten bedeuten, die dritte aber den Werth 1 darstellt.

Ein Gegenstand, welcher bereits in den „Analytisch-geometrischen Entwicklungen", wenn auch nur beiläufig, behandelt wurde, ist das sogenannte *Cramer'sche Paradoxon*. In dem ausgezeichneten Werke Cramer's (Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750), welches neben andern sehr bemerkenswerthen Untersuchungen zum Beispiel auch die erste eingehende Discussion höherer singulärer Punkte einer Curve enthält*), findet man auch eine genauere Besprechung eines auffallenden Umstandes, welcher bezüglich der Durchschnittspunkte zweier algebraischer Curven eintritt. Wenn von den Durchschnittspunkten solcher Curven eine gewisse Zahl bestimmt ist, so ist der Rest damit von selbst bestimmt, ohne dass umgekehrt die Curven selbst durch diese Punkte bestimmt wären. Diese Erscheinung war schon Euler aufgefallen, welcher sie 1748 in einem kleinen Aufsatze besprach, der indessen Cramer unbekannt geblieben zu sein scheint. Es dauerte einige Zeit, bis dieses sogenannte Paradoxon seiner wahren Bedeutung nach, nämlich als Quelle von Sätzen, erkannt wurde. Lamé gab in Bezug darauf den besondern Satz, dass durch die n^2 Schnittpunkte zweier Curven n^{ter} Ordnung sich unendlich viele solcher Curven legen lassen, und begründete damit den Begriff des Curvenbüschels (Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, 1818). Allgemeiner schon ist der von Gergonne (Annales Bd. 17, 1827) gegebene Satz, nach welchem von den

*) So findet sich bei Cramer schon die später von Puiseux gegebene Regel, nach welcher man diejenigen Gliedergruppen der Curvengleichung bildet, welche in einem singulären Punkte von gleicher Ordnung werden können.

Schnittpunkten zweier Curven $(p+q)^{\text{ter}}$ Ordnung, sobald eine gewisse Zahl auf einer Curve p^{ter} Ordnung liegt, der Rest auf einer Curve q^{ter} Ordnung liegen muss. Weitere Sätze, die schliesslich den ganzen Inhalt des Paradoxons darlegten, wurden erst möglich, indem man die eine Curve, als beweglich, der andern, fest gegebenen, gegenüberstellte. Diesen Schritt that Plücker schon im ersten Bande der analytisch-geometrischen Entwicklungen (vgl. auch Gergonne's Annalen, Bd. 19, 1828—29). Er gab an, wie viele Punkte man auf einer Curve annehmen müsse, so dass durch dieselben Curven der gleichen Ordnung gelegt werden können: die Zahl derselben ist unendlich gross, und alle schneiden die gegebene noch in lauter weitern gemeinschaftlichen festen Punkten. Auch führte Plücker bereits aus, wie dieser Satz sich auf Flächenbüschel und Flächenbündel überträgt (Gergonne's Annalen Bd. 19), Gebilde, deren Begriff durch Lamé's oben angeführte Schrift gegeben war. Eine Ausdehnung dieser Sätze auf Curven und Oberflächen ungleicher Ordnung gab Jacobi in Crelle's Journal Bd. 15, 1836, merkwürdiger Weise ohne Cramer, Gergonne, Plücker zu nennen; Jacobi citirt nur Euler. Nach Plücker's Angabe (Theorie der algebraischen Curven) gelangte mit Jacobi's Abhandlung zugleich in die Hände Crelle's der Aufsatz, in welchem Plücker dieselben Gegenstände behandelt, und welcher etwas später (Bd. 16) erschienen ist*). Ueber diese Abhandlung hinausgehend gab umfassendere Sätze über das Verhalten der Curven in der Ebene Plücker in der „Theorie der algebraischen Curven" (1839), und endlich Cayley, Cambridge Math. Journal Bd. 3, 1843, womit die algebraische Seite dieser Untersuchung als abgeschlossen betrachtet werden konnte. Neue und überraschende Gesichtspunkte für die Frage ergaben sich in neuester Zeit, als es sich zeigte, dass diese Sätze über ebene Curven nur andre Ausdrucksformen des *Abel'schen Theorems* seien.

Unter den schönen besondern Anwendungen, welche Plücker aus den Sätzen über Schnittpunktssysteme gezogen hat, erwähne ich nur eine, welche später von mehreren Geometern wieder gemacht ist, ohne dass man Plücker's Priorität gekannt hätte. Sie betrifft den merkwürdigen und höchst unmittelbaren Beweis des Pascal'schen Satzes, bei welchem der Kegelschnitt mit der Pascal'schen Linie als Curve dritter Ordnung betrachtet wird, während das einbeschriebene Sechseck die Stelle zweier solcher Curven vertritt (Analytisch-geometrische Entwicklungen Bd. 1 p. 267, Note).

*) Diese Abhandlung Plücker's enthält eine Unrichtigkeit, welche von Jacobi vermieden ist, und welche Plücker in seiner „Geometrie des Raumes" (1846) berichtigte.

Ich habe schon erwähnt, dass Cramer zuerst die singulären Punkte der algebraischen Curven genauer untersucht hat. Die Betrachtung der Singularitäten im Sinne der neuern Geometrie rührt von Poncelet her. Dieser zeigte, dass die Classe k einer Curve n^{ter} Ordnung, welche Gergonne seltsamer Weise für identisch mit ihrer Ordnung gehalten hatte, im Allgemeinen gleich $n(n-1)$ sei; und es ergab sich hieraus ein Paradoxon, dessen Lösung erst durch die Theorie der einfachen Singularitäten möglich wurde. Wegen des Princips der Dualität würde die Ordnung n aus der Classe k ebenso gebildet werden müssen, wie umgekehrt k aus n. Wollte man aber die Ordnung der Curve aus der angegebenen Grösse von k bilden, so würde man nicht wieder zu n zurückgelangen, sondern eine viel grössere Zahl erhalten. Daher mussten Momente vorhanden sein, welche bei diesen Operationen Erniedrigungen herbeiführten. Schon Poncelet erkannte, dass ein Doppelpunkt die Classe um zwei, ein Rückkehrpunkt sie um wenigstens drei, ein p-facher Punkt mit lauter verschiedenen Tangenten sie um $\frac{p \cdot p-1}{2}$ Einheiten erniedrige. Hier war es nun, wo Plücker eingriff. Indem er einerseits die Zahl der Wendepunkte direct bestimmte, den Einfluss der Doppel- und Rückkehrpunkte berücksichtigte und endlich das Princip der Dualität auf die erhaltenen Resultate anwandte, wurde er auf die berühmten *Formeln für die Singularitäten der Curven* geführt, welche seinen Namen führen, und welche das Poncelet'sche Paradoxon vollständig erledigen; Formeln, welche bereits im Jahre 1854 Steiner als die „bekannten" citiren konnte, ohne jedoch Plücker's Namen dabei irgendwie zu erwähnen. Plücker theilte seine Formeln zuerst in Crelle's Journal Bd. 12 (Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes, 1834) mit; eine weitere Ausführung und volle Darlegung der Theorie gab er in der „Theorie der algebraischen Curven", 1839.

Bei der Beurtheilung der besondern singulären Punkte und Tangenten, auf deren Berücksichtigung man sich zunächst beschränken durfte, spielt das Princip der Dualität eine hervorragende Rolle. So wie Ordnung und Classe einer ebenen Curve, so stehen Doppelpunkte und Doppeltangenten, Rückkehrpunkte und Wendetangenten dem Begriffe nach dualistisch einander gegenüber. Es zeigt sich, dass diese vier einfachsten Singularitäten ein abgeschlossenes System bilden, insofern man alle höhern Singularitäten zunächst ausschliessen und sich auf das Studium von Curven beschränken kann, welche keine höheren Singularitäten enthalten. Diese selbst aber auszuschliessen ist unmöglich; denn ausser den Kegelschnitten giebt es keine algebraischen Curven

ohne *höhere* Singularitäten, welche zugleich der genannten völlig entbehrten.

Auf die so umgrenzte Gattung von Curven bezieht sich Plücker's Untersuchung. Indem er, wie erwähnt, aus der Ordnung, der Zahl der Doppelpunkte und der Zahl der Rückkehrpunkte die Classe und die Anzahl der Wendetangenten direct bestimmte, erhielt er durch das Princip der Dualität eine letzte Gleichung, und mit ihr eine indirecte Bestimmung für die *Zahl der Doppeltangenten.*

Es scheint, dass Jacobi Plücker's aus dem Principe der Dualität geschöpften Beweis nicht für hinreichend strenge hielt. Er bestimmte daher nochmals mittelst einer ausführlichen Untersuchung direct sowohl die Zahl der Doppeltangenten, wie die der Wendetangenten, übrigens nur für Curven ohne Doppel- und Rückkehrpunkte (Crelle Bd. 40, 1850). Indess hatte Cayley eine directe Ableitung dieser Bestimmung bereits 1847 gegeben (Crelle's Journal Bd. 34).

Es darf wohl hier gleich der Folgerungen gedacht werden, welche später von Cayley bezüglich der Raumcurven aus Plücker's Gleichungen gezogen wurden. Es ist ferner an die merkwürdige Gestalt zu erinnern, welche den Gleichungen Plücker's durch Verbindung der geometrischen Untersuchungen mit der Theorie der Abel'schen Functionen gegeben werden konnten, indem man als neue Singularität das *Geschlecht der Curve* hinzufügte. Durch den von Cayley eingeführten Begriff der Aequivalenz höherer singulärer Elemente mit einer gewissen Anzahl von niedern scheint der Anwendung dieser Formeln ein weiteres grosses Gebiet erworben zu sein. In einzelnen Fällen war eine solche Aequivalenz Poncelet und Plücker schon bekannt; die Untersuchungen nach dieser Richtung sind indessen auch jetzt noch keineswegs als abgeschlossen zu betrachten. Dasselbe gilt von dem durch Salmon und Cayley in Angriff genommenen Probleme, ähnliche Formeln für Flächen aufzusuchen; eine Untersuchung, welche bei der Ausdehnung und Schwierigkeit des Gegenstandes und bei den täglich sich noch mehrenden Erfahrungen die Geometer wohl noch lange beschäftigen wird.

Ehe Plücker zu einer vollständigen Entwicklung des Zusammenhanges der Singularitäten gelangte, hatte er die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und die Theorie dieser Curven überhaupt ausführlich behandelt, und die betreffenden Untersuchungen in seinem „System der analytischen Geometrie", 1835, niedergelegt. Insbesondere erscheinen dabei die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung als der vollständige Durchschnitt der gegebenen Curve mit einer zweiten von gleicher Ordnung. Die allgemeine Untersuchung der Wendepunkte konnte

Plücker auch noch später nicht so weit führen, dass das System der Wendepunkte als Schnittpunktssystem der Curve n^{ter} Ordnung mit einer Curve $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung rein hervortrat; ein Resultat, welches zu Hesse's schönsten Entdeckungen gehört und den Namen Hesse's mit einer der wichtigsten Covarianten der ebenen Curven verknüpft hat. Dagegen entwickelte Plücker in der nähern Untersuchung der Curven dritter Ordnung, indem er zuerst die Zahl 9 ihrer Wendepunkte angeben konnte, aus dem schon von Maclaurin gefundenen Satze, nach welchem auf der Verbindungslinie zweier Wendepunkte immer noch ein dritter liegt, den Begriff der 12 Wendepunktslinien. Er konnte zeigen, dass von den Wendepunkten einer reellen Curve dritter Ordnung stets drei und nicht mehr als drei reell sind; was später durch Möbius aus reinen Lagenbetrachtungen auf's neue abgeleitet wurde (Abh. der kgl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 1, 1852). Dagegen waren Plücker die vier Dreiecke noch unbekannt, zu welchen diese Geraden sich gruppiren. Indem Hesse diese fand (Crelle's Journ. Bd. 28, 1844), vermochte derselbe die wahre algebraische Natur des Problems zu erschliessen. Es zeigte sich der wunderbare Charakter jener Classe algebraisch lösbarer Gleichungen 9. Grades, welche Hesse's Namen führen, und für welche die Wendepunkte das erste Beispiel bilden. Für dieses besondere Problem gab Hesse Form und Eigenschaften der zu lösenden Hülfsgleichungen an. Den Fortschritten der von Sylvester, Cayley und Salmon geschaffenen neuern Algebra, und zwar insbesondere den schönen Entdeckungen Aronhold's, war es vorbehalten, alle zu lösenden Gleichungen wirklich zu bilden, und damit das Problem zu erledigen.

Die Untersuchungen, welche Plücker in seinem „System der analytischen Geometrie" ausserdem bezüglich der Curven dritter Ordnung anstellt, enthalten eine Fülle einzelner Resultate, wie z. B. bezüglich der sechspunktig berührenden Kegelschnitte; insbesondere aber eine Discussion der Gestalten der Curven dritter Ordnung. Diese Untersuchung wird mit Hülfe principieller Anwendung der Methode der abgekürzten Bezeichnung in höchst geistreicher Weise geführt. Aber es scheint, dass das von Plücker gewählte Eintheilungsprincip kein glückliches war, insofern dabei die Zahl der zu unterscheidenden Gestalten sehr gross wird (219), und sich dieselben nicht übersichtlich gruppiren. Es ist vorzüglich die Betrachtung der Asymptoten, welche hier bei Plücker, wie bei den älteren Geometern (Newton, Euler, Cramer) in den Vordergrund tritt. Aber bei Plücker's Eintheilung wird die Sache dadurch noch verwickelter gemacht, dass die Lage derjenigen Geraden mit in Betracht gezogen wird, auf der nach einem

Satze von Poncelet die Asymptoten die Curve noch schneiden. Eine übersichtliche und einfache Gruppirung, welche im Wesentlichen mit Newton's Zurückführung der Gestalten auf Projectionen von fünf Parabeln zurückkommt, gab Salmon in seinem „Treatise on higher plane curves" 1852, eine aus der Natur einfacher Lagenverhältnisse entspringende Ableitung dieser Eintheilung Möbius in der schon angeführten Schrift aus demselben Jahre.

Der Untersuchung der Asymptoten von Curven ist auch ein grosser Theil der „Theorie der algebraischen Curven", 1839, gewidmet, wie Plücker denn schon im ersten Bande von Liouville's Journal (1836) die Aufzählung der Arten von Curven 4. Ordnung nach der Natur ihrer unendlichen Aeste gegeben hatte. Für die heute vorherrschende Auffassung ist wichtiger die Eintheilung der Curven 4. Ordnung nach den bei ihnen möglichen Singularitäten, welche Plücker in dem genannten grössern Werke ebenfalls gab. Indem er ferner seine Formeln auf die Curven 4. Ordnung anwandte, konnte er zuerst die Zahl (28) der Doppeltangenten angeben, welche eine Curve 4. Ordnung ohne singuläre Punkte besitzt; und er erläuterte dieselben durch ein höchst glücklich gewähltes Beispiel, in welchem sie sämmtlich reell sein können. Er war weniger glücklich in der weitern Untersuchung der gegenseitigen Lage der Doppeltangenten, über welche er, auf eine irrige Interpretation einer Gleichungsform der Curven gestützt, unrichtige Sätze aufstellte. Erst Hesse gab (zugleich auch, ohne Beweis, Steiner) die richtigen Sätze in zwei grossen Arbeiten über die Theorie dieser Curven (Crelle, Bd. 49, 1854).

In der Vorrede zu der erwähnten Schrift gedenkt Plücker einer Methode, welche er in derselben mit Vorliebe anwendet, und welche ihm häufig zu schönen Resultaten führte; es ist die *Methode der Constantenabzählung*. Der Gedanke, die Erfüllbarkeit eines Gleichungssystems aus dem Umstande zu erschliessen, dass die Zahl der in demselben enthaltenen Unbekannten der Zahl der Gleichungen gleichkommt, liegt sehr nahe. Andrerseits ist die Unzulänglichkeit dieser Schlussweise oft genug hervorgehoben worden, und natürlich mit vollem Rechte, sobald man die Methode in dieser einfachsten Weise ausspricht. Aber so wollte sie Plücker allerdings keineswegs verstanden wissen. Er war sich sehr wohl der Bedingungen bewusst, unter welchen diese bei vorsichtiger Behandlung durchaus correcte Methode anwendbar ist. Wenn eine Zahl von Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten nicht im Allgemeinen zugleich erfüllt werden kann, so werden für ihr Bestehen nothwendig gewisse Bedingungen zwischen den Coefficienten gefordert. Sind diese aber erfüllt, so werden die Gleichungen nun-

mehr zwar lösbar, aber sie sind es dann auf unendlich viele Arten. Es ist daher eine nothwendige Ergänzung für die Methode der Constantenabzählung, dass man zeige, wie dem fraglichen Probleme eine Bestimmtheit nothwendig innewohne. Hierdurch freilich wird die Einfachheit der Methode in vielen Fällen beeinträchtigt, indem der geforderte Zusatz bisweilen ebenso schwer zu erreichen ist, als eine andre Behandlung des ganzen Problems, beziehungsweise eine solche involvirt.

Plücker selbst pflegte die Methode des Constantenzählens an einem charakteristischen Beispiele zu erläutern, welches hier angeführt werden mag. Durch Veränderung des rechtwinkligen Coordinatensystems können im Allgemeinen drei Constanten aus der Gleichung eines Kegelschnitts fortgeschafft werden. Da nun die Gleichung eines Kreises nur drei Constanten enthält, so könnte man glauben, sie liessen sich durch Verlegung des Coordinatensystems sämmtlich beseitigen, und man könnte demnach der Gleichung jedes Kreises die Form $x^2 + y^2 = 1$ geben. Aber hier tritt der Umstand ein, dass ein Kegelschnitt, welcher in irgend einem rechtwinkligen Coordinatensysteme die Form $x^2 + y^2 = 1$ annimmt, diese auch nach einer Drehung des Coordinatensystems behält, sie also für unendlich viele Lagen desselben hat. Das Problem also, die Gleichung eines Kreises auf die Form $x^2 + y^2 = 1$ zu bringen, enthält zwar ebenso viele Unbekannte als zu erfüllende Gleichungen; aber es wird, wenn es lösbar ist, nothwendig unbestimmt, und seine Lösung ist daher nothwendiger Weise im Allgemeinen unmöglich.

Ich habe, ehe ich zu einer historischen Darlegung von Plücker's letzten Arbeiten übergehe, einiger Einzelheiten zu gedenken, welche im Vorigen eine passende Stelle nicht zu finden vermochten. Hierher rechne ich die Verallgemeinerung des Begriffs der *Brennpunkte*, welche Plücker im 10. Bande von Crelle's Journal (1833) gegeben, und welche Kummer im 35. Bande desselben Journals (1847) wieder aufgenommen hat. Die Auffassung der Brennpunkte der Kegelschnitte, welche zu dieser Verallgemeinerung Veranlassung gab, lässt sich auf Poncelet zurückverfolgen (Traité des propriétés projectives, Nr. 457). Andererseits wurde dieselbe Verallgemeinerung später von Salmon und Hart wiedergefunden und weiter behandelt. Die Wichtigkeit und principielle Nothwendigkeit der Einführung dieses erweiterten Begriffs erkennt man erst recht deutlich in der Beleuchtung, welche dieselbe durch Chasles' Einführung der imaginären unendlich fernen Kreispunkte gewonnen haben. Erst durch dieses höchst geistreiche Hülfsmittel werden diese wie alle metrischen Begriffe in den Kreis der

projectivischen Betrachtungen gezogen, und so zugleich den Methoden der neuern Algebra zugänglich gemacht, ein Fortschritt, welcher nicht hoch genug angeschlagen werden kann, und welcher in Cayley's allgemeiner Maassbestimmung seinen vollendeten analytischen Ausdruck gefunden hat.

Sodann erwähne ich die Theorie der *Berührung der Flächen*, welche Plücker im 4. Bande des Crelle'schen Journals (1829) gegeben hat. Sie liefert die Grundvorstellungen für den Charakter höherer Berührungen, indem sie die Natur derselben an die Art der singulären Stellung anknüpft, welche der Berührungspunkt in Bezug auf die Schnittcurve der Flächen einnimmt.

Ich erinnere ferner daran, dass Plücker bereits 1847 (Crelle's Journal Bd. 34) den Versuch gemacht hat, die *Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung* zu studiren, indem er die Coordinaten jedes Punktes derselben durch die Parameter der sich in ihm schneidenden Erzeugenden ausdrückte. Er ist hierdurch der Vorläufer für die schönen Untersuchungen von Chasles geworden, aus welchen die Theorie der Flächenabbildung sich entwickeln sollte.

Endlich ist der Abhandlung über die *Wellenfläche* zu gedenken (Crelle's Journal Bd. 19, 1839), in welcher diese für unsre Kenntniss der Flächentheorie so wichtig gewordene Fläche vollständig analytisch untersucht wurde. Als neu mag insbesondere aus dieser Arbeit die Eigenschaft der Wellenfläche hervorgehoben werden, nach welcher sie ihre eigene reciproke Polare in Bezug auf eine gewisse Fläche zweiten Grades ist. In der Liniengeometrie, wo die Wellenfläche als besonderer Fall der Singularitätenfläche des Complexes zweiter Ordnung (Kummer'sche Fläche) wieder auftritt, hat sich gezeigt, dass ihr dieselbe Eigenschaft noch in Bezug auf neun andre Flächen zweiter Ordnung zukommt. Aber dieses konnte erst aus der Untersuchung der linearen Fundamentalcomplexe eines Complexes zweiter Ordnung erschlossen werden, durch welche F. Klein dem alten Probleme, zwei quadratische Formen gleichzeitig als Aggregate von Quadraten darzustellen, eine neue interessante Seite abgewonnen hat.

Unter den grössern Werken Plücker's ist es die „Geometrie des Raumes" (1846), welche am durchgebildetsten erscheint. Ihrer Entstehung und Tendenz nach ist sie mehr einer Darstellung bekannter, als, wie es sonst bei Plücker zu sein pflegt, der Entwicklung neuer Resultate gewidmet. So ist es natürlich, dass sie bei grösserer Formvollendung zugleich weniger originale hier zu beleuchtende Gesichtspunkte darbietet. Aber sie enthält eine Bemerkung (vgl. Nr. 258),

welche der Keim der Liniengeometrie wurde[6], und damit den Ausgangspunkt für Plücker's letzte grosse geometrische Leistung bildete.

Wenn man jetzt, wo die *Liniengeometrie* als solche geschaffen ist, das Auftreten der ihr zugehörigen Momente rückwärts verfolgt, so sind es drei Kreise von Untersuchungen, in welchen sie auftreten; Untersuchungen, welche scheinbar ganz verschiedenen Gebieten angehören, während sie andrerseits so wesentlich in einander greifen, dass sie nicht immer völlig zu trennen sind. Der eine Untersuchungskreis ist der rein geometrische, der zweite ein mechanischer, der dritte, welcher an die Brechung und Reflexion der Lichtstrahlen anknüpft, mag ein physikalischer genannt werden.

Die *geometrischen* Untersuchungen, welche für die Geometrie des Raumes, sofern die gerade Linie darin als Element gedacht wird, vorbereitend waren, beginnen mit Möbius. Dieser untersuchte im zehnten Bande von Crelle's Journal (1833) solche reciproke räumliche Verwandtschaften, bei welchen jeder Punkt mit der ihm zugeordneten Ebene vereinigt liegt; Verwandtschaften, welche später v. Staudt als Nullsysteme bezeichnet hat. Diese nach Inhalt und Form gleich vollendete Arbeit von Möbius enthält im Wesentlichen die Eigenschaften des später als Complex erster Ordnung bezeichneten Gebildes, und zwar so, dass die geometrische Natur desselben sich sogleich voll und rein erkennen lässt, zugleich aber so, dass der Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung eben kein liniengeometrischer, sondern die Betrachtung der Verwandtschaften ist. Dieselbe Verwandtschaft wurde von Magnus im zweiten Bande seiner Aufgaben (1837) mit Beziehung auf Möbius weiter behandelt.

Sodann ist eine merkwürdige Arbeit zu nennen, welche Chasles 1839 in Liouville's Journal veröffentlichte. Er construirte factisch den Complex ersten Grades, indem er die Erzeugenden eines Hyperboloids paarweise einander zuordnete vermittelst der sie treffenden Strahlen eines ebenen Strahlbüschels, und sodann die Gesammtheit aller Geraden betrachtete, die zwei einander so zugeordnete Geraden treffen. Diese Erzeugungsweise umfasst als speciellen Fall die später von Sylvester gegebene, bei welcher zwei projectivische ebene Strahlbüschel so gelegt werden, dass zwei entsprechende Strahlen vereinigt liegen, und sodann die Gesammtheit der Geraden betrachtet wird, welche entsprechende Geraden der Büschel schneiden.

Beziehen sich die angeführten Untersuchungen auf die Theorie des linearen Complexes, so giebt es andere, welche in Beziehung zu dem besondern Complexe zweiter Ordnung stehen, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist. Eine collineare Umformung des-

selben ist das Normalensystem der confocalen Flächen zweiter Ordnung, welches Binet bereits 1811 untersuchte (vgl. Journal de l'école polytechnique. Bd. 16, 1813). Chasles hat diese Untersuchungen im Aperçu historique aufgenommen und weitergeführt. Ein besonderer Fall dieses Complexes ist ferner enthalten in Chasles' Betrachtungen über die Bewegung starrer Körper (Comptes Rendus 1861). Dort wird jedem Punkte eines bewegten Körpers die Gerade zugeordnet, welche ihn mit einer beliebig gewählten spätern Lage verbindet; das Tetraeder ist in die doppelt gezählte unendlich ferne Ebene und in zwei conjugirt imaginäre Ebenen ausgeartet, welche den allen Kugeln gemeinsamen unendlich fernen Kreis berühren. Der allgemeine Fall dieses Complexes ist neuerdings vielfach untersucht worden; so namentlich von Reye, der ihn durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte collinearer Systeme construirt (1867), und von Lie, welcher auf ihn durch Untersuchungen über die geometrische Interpretation zweier complexer Veränderlichen geführt wurde. Die fundamentale Eigenschaft des Complexes, vermöge deren seine Geraden von den Tetraederflächen nach constantem Doppelverhältnisse geschnitten werden, wurde von Müller (Math. Ann. Bd. I, 1869) gegeben, und es erledigte sich hiermit die seltsam irrige Frage Steiner's nach der Fläche, welche von allen vier gegebene Ebenen harmonisch schneidenden Geraden berührt wird (Syst. Entwickl. p. 299).

Zu den geometrischen Untersuchungen, in welcher die Geometrie der geraden Linie gleichsam anticipirt erscheint, sind endlich zwei Arbeiten von Cayley zu rechnen, welche 1857 im Quarterly Journal (Bd. 3, 1860) erschienen, und in welchen eine Raumcurve als Ort der sie schneidenden Geraden betrachtet wird. Es war hierdurch eine merkwürdige Darstellung der Raumcurven mittelst einer einzigen Gleichung angedeutet und bei Raumcurven dritter Ordnung ausgeführt. Die Combinationen, welche dabei als die Veränderlichen betrachtet werden, stimmen genau mit den von Plücker später als Coordinaten der geraden Linie gebrauchten überein. Dass Cayley auf dem Wege war, eine Geometrie der geraden Linie in Plücker's Sinn zu schaffen, sieht man aus seiner Abhandlung „On the six Coordinates of a line", Cambridge Transactions, 1867; aber diese Arbeit erschien erst, nachdem Plücker die Sache aufgenommen hatte, und nimmt auf Plücker Bezug*).

*) In gewissem Sinne sind die Coordinaten der geraden Linie, wie überhaupt ein grosser Theil der Grundvorstellungen der neuern Algebra, bereits in Grassmann's „Ausdehnungslehre" (1844) enthalten; die genauere Darlegung dieser Verhältnisse würde indessen hier zu weit führen. Vgl. auch Hankel, Theorie der complexen Zahlen, 1867.

Der zweite Kreis liniengeometrischer Untersuchungen, welcher der *Mechanik* angehört, lässt sich auf Poinsot und die geometrische Form zurückführen, welche dieser ausgezeichnete Geometer für die Untersuchung der Kräfte eingeführt hat, die auf einen starren Körper wirken. Wenn Poinsot die Gesammtheit der Combinationen von Kraft und Kräftepaar sucht, welche ein gegebenes Kraftsystem ersetzen, so ist dies nichts anderes, als in Plücker's Bezeichnung das System der Durchmesser eines linearen Complexes nebst den ihnen zugeordneten Ebenen. Ebenso hängt mit der Liniengeometrie der berühmte 1829 von Chasles gefundene Satz zusammen, nach welchem zwei Kräfte, die ein gegebenes Kräftesystem ersetzen können, als Strecken im Raume betrachtet, stets ein Tetraeder von constantem Volumen bestimmen. An diese Betrachtungen knüpfte Möbius in der oben erwähnten Abhandlung von 1833 und in seiner Statik (1837) Untersuchungen an, welche unmittelbar liniengeometrische Elemente enthielten, ja er erhielt durch diese statischen Betrachtungen die Anregung für die Untersuchung der oben erwähnten Verwandtschaft. Sodann aber ergaben sich Sätze, welche eben erst mit Hülfe der Liniengeometrie einfach ausgedrückt werden können; so werden, um nur Eines anzuführen, die Systeme von zwei Kräften, welche ein gegebenes Kräftesystem zu ersetzen im Stande sind, ihrer Lage und Richtung nach nichts anderes, als die Paare von Geraden, welche in Bezug auf einen gegebenen Complex ersten Grades conjugirt sind; Sätze, denen verwandte über unendlich kleine Rotationen entsprechen. Aehnliche Untersuchungen veröffentlichte Chasles 1843 in den Comptes Rendus. Es sind endlich in dieser Richtung die Bemerkungen von Sylvester, Chasles und Cayley zu erwähnen, welche sich in den Comptes Rendus von 1861 finden.

Der dritte Kreis vorbereitender Untersuchungen wird durch die Theorie der *Strahlensysteme* gebildet. Schon Monge hatte Normalensysteme von Flächen und die Brennflächen derselben betrachtet. Sodann hatte Malus die Gesammtheit der Strahlen untersucht, welche von einem Punkte ausgehen, und gefunden, dass dieselben, beliebig an der Grenze von isotropen Mitteln reflectirt oder gebrochen, stets das Normalensystem einer Fläche bilden. Sturm hatte ein unendlich dünnes Strahlenbündel untersucht, und die Brennlinien desselben entdeckt, d. h. jene beiden Stellen, in welchen der Querschnitt eines solchen Bündels sich annähernd in zwei Linien zusammenzieht. Die Untersuchungen dieser Strahlensysteme waren von Hamilton in allgemeiner Weise aufgenommen (Transactions of the Royal Irish Acad. Bd. 16), und dessen Untersuchungen von Kummer (1859, Borchardt's Jour-

nal Bd. 57) in einer Weise reproducirt, welche den rein geometrischen Inhalt des Gegenstandes deutlich hervortreten liess. Als bedeutendste Erscheinung nach dieser Richtung mag noch hier sogleich die grosse Arbeit von Kummer über Strahlensysteme zweiter Ordnung und Classe erwähnt werden, welche in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1866 erschienen ist. Der Zeit nach fällt sie bereits jenseits der ersten Arbeiten Plücker's. Noch näher kommen der Complextheorie die Untersuchungen von Abel Transon (1861, Comptes Rendus Bd. 52, und Journal de l'école polytechnique, Cah. 38). Derselbe betrachtet Geraden, von denen durch jeden Punkt des Raumes eine ihm zugeordnete geht, womit, nach einem neuern Ausdruck, ein Complex auf den Punktraum abgebildet erscheint, und fragt dann nach den Normalensystemen, welche in solchen Combinationen enthalten sein können.

Der Gedanke der Liniengeometrie war von Plücker, wie erwähnt, in seiner Geometrie des Raumes beiläufig ausgesprochen worden. Durch den Verkehr mit seinen Freunden in England angeregt, nahm er 1864 den Gegenstand wieder auf und entwickelte nun sofort die Grundlage von dem, was er als „*Neue Geometrie des Raumes*" bezeichnete. Unbekannt mit den Methoden der neuern Algebra, wie mit dem grössten Theile des während seiner physikalischen Thätigkeit nach dieser Richtung Geleisteten, hatte er zunächst nicht ohne Schwierigkeit den Begriff der Coordinaten einer Geraden zu fixiren. Indem er dieselben als sechs Verhältnisszahlen definirte, welche einer gewissen Gleichung zweiten Grades genügen, berührten seine Speculationen sich nahe mit den Arbeiten Cayley's, deren oben gedacht wurde. Sodann aber begründete Plücker die neue Disciplin durch Einführung des Begriffs eines *Complexes*, und gewann hiermit eine fundamentale Grundlage weiterer Betrachtungen. Denn der Complex bildet im Gegensatz zum Strahlensysteme (bei Plücker Congruenz) das durch *eine* weitere Gleichung in Liniencoordinaten gegebene Gebilde, während das Strahlensystem deren *zwei* verlangt. Der Complex steht also liniengeometrisch dem Strahlensysteme ebenso gegenüber, wie die Oberfläche der Raumcurve in der Geometrie des Punktes. Zu ersteren tritt in der Liniengeometrie als dritte Abstufung die geradlinige Fläche, deren eigenthümliche Stellung in der Raumgeometrie erst durch die principielle Einführung der Geraden als Raumelements das rechte Licht erhält.

Man erkennt aus dieser Abstufung, wie die Liniengeometrie gewissermassen die Geometrie eines Raumes von vier Dimensionen ist. Und so wollte sie Plücker in der That aufgefasst haben. Gegenüber der directen Einführung eines Raumes von mehr als drei Dimensionen pflegte er zu erörtern, wie schon die einfachste räumliche Conception,

etwa die Ebene, hinreiche, um in ihr die Theorie einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen zu studiren. Denn man brauche nur ein Grundgebilde einzuführen, welches von einer hinlänglich grossen Anzahl von Parametern abhängig sei, und könne dann diese ähnlich wie die Coordinaten eines Punktes in einem höheren Raume behandeln, ohne auf einen solchen zurückgehen zu müssen. Die Anzahl der Dimensionen eines Raumes erscheint auf diese Weise als eine Eigenschaft, die demselben nicht sowohl an und für sich zukommt, als insofern man in demselben ein bestimmtes Gebilde zur Basis der Untersuchung nimmt. So bildet in der That die Liniengeometrie, deren Grundgebilde von vier Parametern abhängt, eine Theorie räumlicher Gebilde von vier Dimensionen, welche in dem gewöhnlichen Raume ausgeführt ist, der, wenn man den Punkt als Grundgebilde festhält, nur drei Dimensionen hat.

Das Studium der Complexe, vorzugsweise der Complexe zweiter Ordnung, bildete nunmehr den Hauptgegenstand von Plücker's Beschäftigung. Durch Einführung der sogenannten Complexflächen, von welchen er zahlreiche Modelle herstellen liess, vermochte er den schwierigen Gegenstand auch gestaltlich zu erläutern; wie denn überhaupt gegenüber den mehr analytischen Interessen seiner früheren Arbeiten in spätern Jahren das rein geometrische Interesse an der Gestalt mehr und mehr hervortrat. Die Untersuchungen dieser Flächen bilden einen grossen Theil der in seinem letzten Werke (Neue Geometrie des Raumes, 1868) niedergelegten Betrachtungen. Es war ihm nicht vergönnt, dieselben soweit zu führen, als er selbst es beabsichtigte. In alter Weise unermüdlich schaffend, verbreitete er seine Gedanken durch eine Zahl von Abhandlungen, während er sein grösseres Werk vorbereitete. Aber der Tod riss ihn mitten aus dieser Thätigkeit heraus.

Sein Werk über die neue Raumgeometrie konnte glücklicherweise durch seinen damaligen Assistenten, Hrn. Klein, nach Plücker's Andeutungen in dessen Sinn beendigt werden. Freilich hätte er selbst wohl im Laufe der Arbeit manches hinzugefügt, insbesondere auch bezüglich der mechanischen Anwendungen, die ihn in der letzten Zeit vielfach beschäftigt hatten. Aber wenn auch manches in dieser Richtung deutlich erkennbar vorlag, so musste doch die Herausgabe sich ausschliesslich auf dasjenige beschränken, welches durch schriftliche oder mündliche Mittheilungen von Plücker unmittelbar veranlasst war. Auch so konnte das Werk Anregung werden zu weiteren Forschungen, die sich in mannigfacher Weise daran geknüpft haben. Wenn in der analytischen Fassung zum Theil jetzigen Methoden nicht

immer mehr entsprechend, wirkte dasselbe durch seinen gedanklichen Inhalt, und die jüngere Generation entzog sich nicht der ihr gewordenen Anregung. Schon jetzt ist eine grosse Literatur entstanden, welche den neuen Gegenstand behandelt, während viele Gesichtspunkte, ja eine dem heutigen Standpunkte entsprechende Darstellung des Ganzen der Zukunft vorbehalten sind. —

Es war vielleicht in der Natur der Verhältnisse begründet, wenn die Thätigkeit Plücker's während seines Lebens sich nicht immer, wenigstens nicht überall, der vollen Anerkennung erfreute, die seinen Leistungen gebührte. Mitten in die verschiedenartigen Bestrebungen einer wissenschaftlich höchst fruchtbaren Epoche gestellt, musste auch er jene Parteinahme erfahren, welche den Streitenden auch im Wettkampfe der Wissenschaft nicht erspart bleibt, und welche das Urtheil der Mitstrebenden trübt.

Das Geschick konnte ihm keine schönere Genugthuung bereiten, als dass es ihn noch am Abende seines Lebens Schöpfer einer neuen Richtung werden liess, an deren Verfolgung nunmehr die Nachlebenden in neidloser, freudiger Anerkennung arbeiten.

1.

Generalem analyseos applicationem ad ea quae geometriae altioris et mechanicae basis et fundamenta sunt e serie Tayloria deducit

Julius Plücker.

(Dissertation[1]), Marburg. 1823.)

INDEX.

Disciplinas mathematicas e principiis tantummodo analyticis deducendas esse. Generalem legem analyticam, ubi de continuis accrementis agitur, seriem Tayloriam pronuntiare, ejusque coefficientes in variis disciplinis significationem habere particularem (3—4).

DE SERIE TAYLORIA. E differentiis deducitur. — De nexu ejus coefficientium (5—8).

PARS GEOMETRICA. De primo coefficiente $\frac{dy}{dx}$. Generalis tangentium theoria. — Arctissimam rectae cum curva conjunctionem eo indicari, ut rectae aequatio sit: $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$. Talem rectam tangentem vocari. Omnes tangentium theorias deducere aequationem $a = \frac{dy'}{dx'}$, quam nos in capite ponere ausi sumus. Quod ad probandum in examen vocantur: Barowii theoria, quae terminum $\frac{dy}{dx}$, via geometrica, circumscribit; theoria, a Biot in geometria analytica constituta, quae transitum algebrae ad analysin superiorem designat. Methodo indirecto aequatio illa constituitur (9—21). De secundo coefficiente $\frac{d^2y}{dx^2}$. Angulo, quem tangens cum curva constituit, respondere. Anguli contactus valor ad aequationem, qua vulgo utuntur, reducitur: $\omega = \frac{ds}{\gamma}$ (22—33). De sequentibus seriei coefficientibus. Applicatio praecedentium (34—38).

PARS MECHANICA. Motus aequatio constituitur: $s = \varphi(t)$; s et t spatia significare, quae duo corpora percurrunt. Tempus motus uniformis est. Definitio hujusce motus. Cum tali motu omnem motum conferri. De primo et secundo coefficiente. Celeritas et acceleratio, potentia absoluta et vis. De superioribus coefficientibus. Exemplum adhibetur. Lex generalis (39—49).

1) Sententiam illam saepe pronuntiatam: „omnis scientia perpaucis nititur principiis“ eadem evidentia, mathescos respectu habito, confirmatam videmus, cum singulae omnes disciplinae mathematicae e perpaucis aequationibus emanent. Mechanica v. c. (liceat in medias res rapere) in examen vocata, quod modo pronuntiavimus, exemplo facile erit probandum. Tota enim motus theoria (usitatas ut adhibeamus denotationes) e duabus hisce aequationibus:

$$c = \frac{ds}{dt} \qquad v = \frac{d^2s}{dt^2}$$

emanat. Pari modo altior geometriae analyticae pars e generali tangentium methodo prodiebat, ita, ut, aequatione:

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx}$$

constituta, ($y = f(x)$ scilicet curvae cujusvis, coordinatis rectangulis, aequatio est, atque α angulum, quem tangens cum axe abscissarum facit, indicat) ad magnum perfectionis gradum evecta sit. — Certe autem quo simplicius et clarius nexus ille inter calculum et motum, nec non inter calculum et figuras, qui talibus aequationibus designatur, apparet, eo facilius omnia, quae disciplinae illae complectantur, perspicere, eo facilius in singulis casibus aequationibus illis uti poterimus.

2) Viam rectam et elegantissimam, non solum ad calculi fundamenta ponenda, immo etiam ad ipsis notionibus, quales sunt: celeritas, vis, curvarum contactus, etc. lucem afferendam, ingredi videmur, si non inde a vagis definitionibus philosophicis, sed inde a terminis mathematicis exordimur. Demonstratione enim tantummodo analytica coefficientes differentiales, singulorumque nexus percipi licet; nec non deinde, quae tali modo elicuerimus in notiones respondentes celeritatis, vis etc. facile erit translatu. Ab altera parte multae quidem definitiones metaphysicae talium notionum datae sunt, quarum vero, quatenus mihi quidem notae sunt, nulla (an ipsi motus theoriae lucem afferre possit, praetermittamus) fundamentum calculo praebere potest. Immo a priori constituere audeo, nullam omnino inveniri posse, quae calculo satisficiat, ita ut a talibus definitionibus non aliter nisi saltu mortali ad calculum transire posse videamur.

3) Sed ut ea, quae attingere nobis proposuimus, clarius appareant, atque jam ab initio sat lucide in oculos incidant, methodum generalem, quam paragraphis sequentibus explicare conaturi sumus, perpaucis verbis delineabimus.

Nos in omnibus casibus, ubi de continuis accrementis decrementisve (sive ordinatarum, sive spatiorum, sive rei cujusvis) agitur, ad calculum differentialem reverti, facile perspicitur. Saepius quidem, necesse est confitear, simpliciores casus si respicimus, terminis differentialibus carere possumus, tum verum tamen terminos illos quodammodo circumscribere cogimur. — Legem autem generalem accrementorum functionis notissima series Tayloria:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\left\{\begin{matrix}\\ \Delta y\end{matrix}\right. = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\Delta x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

pronuntiat. Initio igitur de natura hujusce seriei, qua ratione ejus membra inter se conjuncta sint, nec non singula ab alteris dependeant, perpauca afferamus. Deinde eorum, quae ita exposuerimus, applicationem in varias disciplinas, nominatim in ea faciemus, quae fundamentum ac basis sunt altioris geometriae analyticae et mechanicae, quod quidem tali modo aggredi constituimus, ut appareat, diversas illas disciplinas legibus niti, quae, si rem accuratius contemplemur, nullo modo inter se discrepent, atque calculi applicationem ubique pari modo fieri. Sed ut ea, quae sentiamus, distinctius pronuntiemus, exemplo, quod primo nobis in mentem cadit, utamur. Aequatio scilicet, quae simplicem multiplicationem indicat:

$$M = \pi N$$

(π numerus abstractus est), prout N hoc illove modo denominatur, infinitum interpretationum numerum permittit. Quod exemplum, quamquam triviale est, nobis satisfacit; nosmetipsi enim rem simillimam ante oculos habemus. Quodsi nimirum in serie, cujus modo mentionem fecimus, x, Δx, y, Δy lineas esse, itemque $\frac{dy}{dx}$ limitem (si placet) quoti duarum linearum $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ supponimus, media in geometria analytica versamur. Ab alia parte autem si x, Δx, y, Δy, unde ope principiorum calculi differentialis termini $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ facillime deduci atque determinari poterunt, spatia (quorum duo illa priora x, Δx vulgo tempora vocantur) esse velimus, in mechanicae fines pervenimus. Tota igitur, quae sequitur, demonstratio ad simplicem seriei Tayloriae interpretandae quaestionem reducetur. Nihilominus tamen nobis, rem ita tractaturis, multa, ut videtur, expositu digna occurrent.

De Serie Tayloria.

4) $$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

series notissima est, quam, cum inde ab ea in omnibus hujusce dissertationis partibus profecturi simus, ut nonnullis verbis illustretur, hisce paragraphis praefixi. Nam, quamquam hic locus non est, ut quomodo lex illius seriei primo investigata sit, explicemus; neque non, ut varias vias, quas viri doctissimi ad eam demonstrandam secuti sint, indicemus, nihilominus tamen seriem nostram e serie differentiarum deducere, nobis licebit. Quam methodum seriei Tayloriae explicandae, non quoniam eam elegantissimam esse censemus, sed solummodo eo consilio exposituri sumus, ut quod inter calculum differentiarum et calculum differentialem discrimen sit (hic enim deinde reducemur) clarius appareat. Praeterea, quae ad varias illius pronuntiati demonstrationes spectant, cum Lacroix, viro celeberrimo, maxime consentio, qui immenso analyseos campo perarato, sibi persuasum habet, re vera nil interesse, qua ratione rem exponamus atque singulos terminos interpretemur.

5) Sint

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ u_n$$

quantitates quaelibet ita solummodo inter se conjunctae, ut imaginemur, nos inde ab u profectos per quantitates intermedias u_1, u_2, u_3 ... usque ad u_n progredi. Quo posito, ope differentiarum variorum ordinum quantitas u_n facilis erit expressu. Habebimus enim passatim, si denotationes usitatas adhibemus:

1. $$u_1 = u + \Delta u$$
$$\Delta u_1 = \Delta u + \Delta^2 u$$
$$u_2 = u_1 + \Delta u_1$$
$$= u + \Delta u$$
$$+ \Delta u + \Delta^2 u$$

2. $$= u + 2\Delta u + \Delta^2 u$$
$$\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u + \Delta^3 u$$
$$\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$$
$$= \Delta u + 2\Delta^2 u + \Delta^3 u$$
$$u_3 = u_2 + \Delta u_2$$
$$= u + 2\Delta u + \Delta^2 u$$
$$+ \Delta u + 2\Delta^2 u + \Delta^3 u$$

$$\begin{aligned} 3. \qquad &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \\ \Delta u_3 &= \Delta u + 3\Delta^2 u + 3\Delta^3 u + \Delta^4 u \\ u_4 &= u_3 + \Delta u_3 \\ &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \\ &\quad + \Delta u + 3\Delta^2 u + 3\Delta^3 u + \Delta^4 u \\ 4. \qquad &= u + 4\Delta u + 6\Delta^2 u + 4\Delta^3 u + \Delta^4 u. \end{aligned}$$

Qua via progressuri hanc ad seriem generalem:

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.} \quad (a)$$

inducemur, in qua singulorum terminorum coefficientes:

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \text{ etc.}$$

indicatu facile fuit, intelligentibus nobis illos coefficientes cum Binomii coefficientibus omnino congruere.

6) Ut quantitates

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n$$

vago modo inter se conjunctas arctioribus vinculis coerceamus, u functionem quandam ignotam esse quantitatis variabilis x:

$$u = \varphi(x)$$

supponamus; deinde $u_1 - u = \Delta u$ respondere variabilis accremento Δx,

$$u_2 - u = 2\Delta u + \Delta^2 u$$

accremento $2\Delta x$: itemque

$$u_3 - u = 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u$$

accremento $3\Delta x$, et sic porro. Seriem generalem (a) cui nec terminus x, nec Δx implicitus est, ut hisce conditionibus accommodetur, has in formas reducemus:

$$\begin{aligned} u_n - u &= n\Delta x \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta x^2 \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta x^3 \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} + \text{etc.} \\ &= (n\Delta x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\frac{n^2\Delta x^2 - n\Delta x^2}{1.2}\right)\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \\ &\quad + \left(\frac{n^3\Delta x^3 - 3n^2\Delta x^3 + 2n\Delta x^3}{1.2.3}\right)\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} + \cdots \end{aligned}$$

unde, duabus aequationis partibus per $n\Delta x$ divisis, habebitur:

$$\frac{u_n - u}{n\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\frac{n\Delta x - \Delta x}{1.2}\right)\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \left(\frac{n^2\Delta x^2 - 3n\Delta x^2 + 2\Delta x^2}{1.2.3}\right)\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} + \cdots.$$

Quantitas $u_n - u$, quam nunc ita:

$$f(x + n\Delta x) - f(x)$$

interpretamur, summam n accrementorum quantitatis u, n accrementis Δx respondentium, nobis significat. Positis denique

$$u_n - u = k, \quad n\Delta x = h,$$

atque hisce terminis in serie nostra substitutis, prodit:

$$\frac{k}{h} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{h}{1.2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \frac{h^2}{1.2.3}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} + \cdots.$$

Quiscunque sit numerus n, prima aequationis pars nullo modo mutabitur, si tantum aequationi

$$h = n\Delta x$$

satisfaciamus. Quod si igitur, ad limites transgressuri, n omni numero majus ponimus, Δx infinite parvum censendum est, ita ut

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ in } \frac{du}{dx},$$
$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} \text{ in } \frac{d^2 u}{dx^2},$$

et sic porro, transmutatis, obtinebimus:

$$\frac{k}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{h}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3}\cdot\frac{h^2}{1.2.3} + \cdots$$

seriem, quam deducere nobis proposuimus.

7) Cum coefficientes $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^3 u}{dx^3}$ etc. functiones sint variabilis x,

$$\frac{du}{dx} = X_1$$
$$\frac{1}{1.2}\frac{d^2 u}{dx^2} = X_2$$
$$\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3 u}{dx^3} = X_3 \cdots$$

positis, aequationem nostram ita scribamus:

$$\frac{k}{h} = X_1 + X_2 h + X_3 h^2 + \cdots$$

unde statim derivabitur:

$$k = X_1 h + X_2 h^2 + X_3 h^3 + \cdots. \qquad (b)$$

Si quae ad singulum casum spectant:

$$x = a$$

ponimus, X_1, X_2, X_3 etc. constantes fiunt coefficientes:

$$X_1 = A_1, \quad X_2 = A_2, \quad X_3 = A_3 \text{ etc.}$$

unde emanabit

$$k = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \text{etc.} \qquad (c)$$

qua in aequatione termini A_1, A_2, A_3 solummodo a genere aequationis primitivae:

$$u = \varphi(x)$$

dependent.

Si quis seriei (b) coefficiens constans fit, membris sequentibus evanescentibus, prodit solummodo

$$k = X_1 h + X_2 h^2 + \cdots + X_{n-1} h^{n-1} + X_n h^n$$

et pari modo (c)

$$k = A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{n-1} h^{n-1} + A_n h^n;$$

quibus aequationibus hasce in formas reductis:

$$k = X_1 h + X_2 h^2 + \cdots + (X_{n-1} + X_n h) h^{n-1}$$

$$k = A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + (A_{n-1} + A_n h) h^{n-1}$$

statim perspicitur $X_n h^n$ (ut unam tantum seriem consideremus), quem ultimum terminum esse velimus, ita cum praecedenti $X_{n-1} h^{n-1}$ confundi posse, ut nil nisi hujusce termini coefficiens X_{n-1} mutetur. Habebitur enim pro X_{n-1} coefficiens $(X_{n-1} + X_n h)$, unde elucet coefficientem praecedentem eo minus augeri, quo minus h ponatur, nec non accrementorum limitem esse 0. Ideo lex generalis mutationis termini k, novo accedente coefficiente, aut quod idem est, ordine aequationis primitivae:

$$u = \varphi(x)$$

unitate creto, in oculos incidit.

Nexu, qui membra serierum (b) et (c) sese sequentia coercet, indicato, quatenus singuli coefficientes X_1, X_2, X_3 etc. ad quantitatem k augendam contribuant, definitu facile erit. De functione enim primitiva:

$$u = \varphi(x)$$

primi ordinis, ideo hujusce formae:

$$u = mx + n$$

valorem primi coefficientis:

$$X_1 = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{k}{h}$$

derivabimus, unde ad aequationes superiorum ordinum transgressuri, secundum id, quod modo pronuntiavimus, coefficientes accessuros inductione definire licebit.

8) Sed hisce demonstrationibus, quae nisi exemplis sustinentur, nimis subtilius fieri possint, relictis, statim medias in res rapturi, ea, quae perpaucis delineavimus, ad geometriam analyticam transferemus, nec non copiosius tractabimus.

Pars geometrica.

9) Si variabiles x et y coordinatas, in axibus, qui rectum includunt angulum, sumtas nobis significant, per aequationem:

$$y = f(x)$$

curva data est; hinc statim si, ut supra

$$\frac{1}{1}\frac{dy}{dx} \text{ per } X_1$$

$$\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} \text{ per } X_2$$

$$\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} \text{ per } X_3$$

et sic porro designamus, hanc aequationem elicemus:

$$\Delta y = X_1\Delta x + X_2\Delta x^2 + X_3\Delta x^3 + \cdots;$$

aut denique, quae ad singulum curvae punctum pertinent,

$$x = a, \quad y = b$$

positis et deinde

$$X_1 \text{ in } A_1, \quad X_2 \text{ in } A_2, \quad X_3 \text{ in } A_3$$

et sic porro transmutatis, habebitur

a) $$\Delta b = A_1\Delta a + A_2\Delta a^2 + A_3\Delta a^3 + \cdots.$$

In altera aequationis parte coefficiens A_1, qui primae termini Δa potestati adhaeret, tangens trigonometrica anguli (α) est, quem recta, tangens vocata, cum axe abscissarum constituit. Recta autem, quae cum axe abscissarum angulum:

$$x(\text{tang} = A_1)$$

facit, neque non per punctum transgreditur, cujus coordinatae sunt a et b, per aequationem

$$y - b = A_1(x - a)$$

quam ita scribamus:

b) $$\Delta b = A_1\Delta a$$

data est. Aequationibus (a) et (b) collatis, de tali linea, quae *tangens vocatur*, et de natura contactus illius cum curva pauca exponamus.

10) Sed ut rem modo, quam maxime generali, contemplemur, rectae alteram curvam, pari modo punctum, cujus coordinatae sint a et b, transeuntem, substituamus. Sit ejus aequatio

$$y = f^1(x)$$

unde, simili denotatione, qua supra usi sumus, adhibita, statim derivabitur:

c) $$\Delta b = A^1\Delta a + A^2\Delta a^2 + A^3\Delta a^3 + \cdots.$$

Deinde cum in aequationibus a) et c) Δa et Δb variabiles censendae sint, in utrisque aequationibus Δa aequales esse supponamus; tum

diversi valores Δb, valori cuidam Δa respondentes, solummodo a quantitatibus constantibus:

$$A_1,\ A_2,\ A_3\ \ldots$$
$$A^1,\ A^2,\ A^3\ \ldots$$

dependebunt. Si quovis valore termini Δa substituto, quantitates Δb in utrisque aequationibus aequales reperiuntur, curvae, per aequationes:

$$y = f(x),\quad y = f^1(x)$$

determinatae, omnino congruunt. E contrario autem, si in utraque aequatione:

$$\Delta b(=\Delta f[a]) = A_1\Delta a + A_2\Delta a^2 + A_3\Delta a^3 + \cdots$$
$$\Delta b(=\Delta f^1[a]) = A^1\Delta a + A^2\Delta a^2 + A^3\Delta a^3 + \cdots$$

eidem valori Δa diversi quantitatis Δb valores conveniunt, dua ea puncta, quae per eandem abscissam $a + \Delta a$ determinata, in utrisque vero curvis sita sunt, eo magis appropinquant, quo propius termini:

$$\Delta b = \Delta f(a),\quad \Delta b = \Delta f^1(a)$$

sibi accedunt. Quae ad curvarum partes spectant, quae abscissae accrementis (Δa) ita sumtis conveniunt, ut generaliter quiscumque sit index n:

$$A_n\Delta a^n > A_{n+1}\Delta a^{n+1} + A_{n+2}\Delta a^{n+2} + \cdots$$
$$A^n\Delta a^n > A^{n+1}\Delta a^{n+1} + A^{n+2}\Delta a^{n+2} + \cdots$$

habeatur; conjunctionem curvarum nostrarum eo arctiorem esse dicere licebit (omnia enim utriusque curvae singula puncta iisdem abscissis, intra limites a et $a + \Delta a$ sumtis, convenientia magis magisque sibi accedent) quo plures terminos:

$$A_1\Delta a = A^1\Delta a,\quad A_2\Delta a^2 = A^2\Delta a^2,\quad A_3\Delta a^3 = A^3\Delta a^3\ \ldots$$

aut, variis hisce aequationibus per Δa, Δa^2, Δa^3 etc. divisis, quo plures coefficientes:

$$A_1 = A^1,\quad A_2 = A^2,\quad A_3 = A^3\ \ldots$$

inde a manu sinistra ad dextram progressuri, aequales reperimus. Quod modo pronuntiavimus, etiamsi Δa omni valore minus ponitur, pleno jure confirmare licebit.

Ad rectam regressuri habebimus solum, sequentibus membris evanescentibus:

$$\Delta b = A^1\Delta a,$$

qua aequatione cum (a) collata constituemus: *arctissimam curvae cum recta conjunctionem, quantitate Δa satis diminuta, eo determinari* ut

$$A_1 = A^1.$$

Rectam autem, quae ita determinata est, ut A^1, id est tangens trigonometrica anguli, quem illa cum axe abscissarum constituit, aequale sit A_1, aut denique:

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx}\,(x = a),$$

supra *tangentem nominavimus.* Tangentis igitur, quae per curvae punctum, cujus coordinatae sunt a et b, eat, aequatio est haec:

$$y - b = \frac{dy}{dx}\,[x = a]\,(x - a).$$

(Fig. I.) In tangentium definitione tangente trigonometrica adhibita, hunc terminum, ut minimam etiam descripti circuli vitiosi suspicionem removeamus, accuratissime definiemus. Tangentem trig. nec a modis contactus nec a circuli virtutibus dependere, facile intellectu. In generalibus enim rectae aequationibus:

$$y = ax + b, \quad y - y' = a(x - x')$$

qualecunque sit coordinatarum systema, (a) quotus constans est, qui, (ut brevitatis causa ad figuram regrediamur) linea CB parallela axi ordinatarum per AB divisa, prodit, quem quotum, $AB = 1$ posito, ipsa linea CB nobis repraesentat. Axibus rectangulis supputatis:

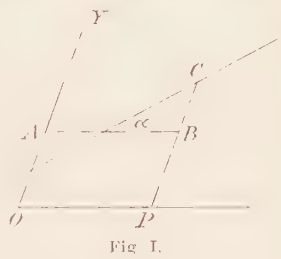

Fig. I.

$$CBA = \frac{\pi}{2}$$

exigitur. — Circulo solummodo, ad angulum α, a quo rectae BC longitudo dependet, commode determinandum utimur. Lineam praeterea in fine radii normalem circulum tangere, facile demonstratu. Sit enim radii cujusdam aequatio ad circuli centrum relata:

$$y = ax.$$

Hinc prodit:

$$a = \frac{y}{x}$$

ac etiam, coordinatis puncti, in quo radius circulum secat, x_1, y_1 vocatis:

$$a = \frac{y_1}{x_1}.$$

Normalis idem punctum transeuntis aequatio est haec:

$$y - y_1 = a^1(x - x_1)$$

quam ope notissimae aequationis conditionis:

$$aa^1 = -1$$

ita transmutemus:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\,(x - x_1).$$

E circuli aequatione, ad eandem coordinatarum originem reducta:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

differentiando obtinebitur:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Aequatio normalis igitur cum tangentis aequatione:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}[x = x_1]\,(x - x_1)$$

congruit.

10) Re ita exposita, ad tangentium theoriam quae spectant, eo pervenimus, ut campo geometriae relicto, in quaestione tantummodo analytica, quo modo terminus $\frac{dy}{dx}$ intelligendus sit, versemur. Ad eandem quaestionem etiam in altera parte dissertationis, via analoga, definitionem celeritatis reducemus. Nam si licet opinionem nostram particularem proferri, velimus, nos in omni disciplina a principiis quibusdam, quae data esse supponimus, profecti, argumenta indirecta vitemus. Tale principium (ne terminis, quibus hic circumscripti sumus, excedamus), si aeque motus theoriam ac altiorem geometriam analyticam respicimus, in legibus, quae analyseos sunt fundamenta, ponendum est. Deinde, interpretatione terminorum differentialium facta, inter purum calculum et ea, quae per calculum illustrentur, connexum quendam (utraque enim parallela inter se progredi imaginemur) indagare atque persequi possumus.

Tangentium theoria cum calculo differentiali vinculis tam arctis conjuncta est, ut in dubium vocari possit, an illa per hunc aut potius hic per illam illustrandus sit. Quamquam tangentibus construendis occupati, geometrae primo ad analysin superiorem pervenerunt, nos nihilominus tamen (nam nulla fortasse theoria analytica nisi e casu singulari elicita est) viam inversam persecuturi, illam theoriam ut particularem applicationem hujusce calculi considerabimus. Sed antequam de tangentium definiendarum rationibus, quae res explicatu digna videtur, plus afferemus, perpaucis verbis, quomodo calculum differentialium dispiciamus, delineabimus.

11) Modus elegantissimus primi coefficientis differentialis illustrandi fortasse est hic, ut

$$\frac{dy}{dx} = a$$

limitem termini $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx magis magisque diminutis, constituamus. Quem limitem clarius, ut nobis videtur, concipi licet, si transitum esse termini $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per $\Delta x = 0$ ad terminum $-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ imaginemur (conf. [13]). Sed

nihilominus confitendum est, illum limitem (a) per calculum termino $\frac{dy}{dx}$, id est quoto duarum quantitatum infinite parvarum, *omnino aequivalentem* reperiri:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Quamquam absurdum ne dicamus, certo nullius momenti esset, si huic rationi modo magis philosophico, quam mathematico explicandae, operam daremus, nobis verumtamen licebit singulorum terminorum dy, dx valores ($= 0$), qui per calculum adhibentur, et porro in calculo adhibere. At etiam pari modo, cum per calculum facile demonstratu sit, omne differentiale altioris ordinis, cum differentiali praecedentis collatum evanescere, quid nos prohiberet (ut ipsis viri celeberrimi verbis utar): „de nous servir du langage et de la mécanique des infiniments petits.“

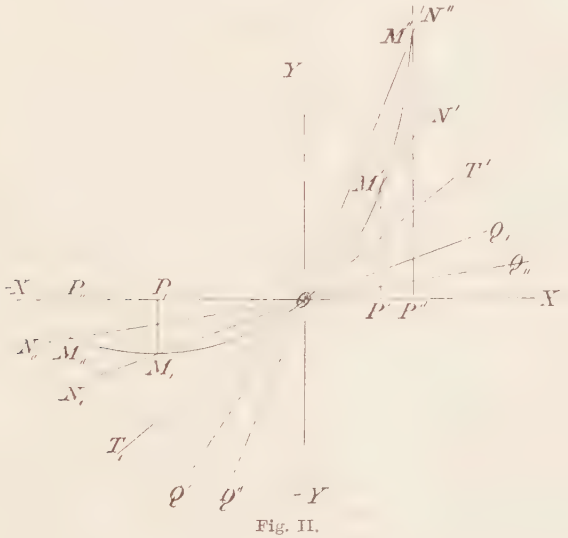

Fig. II.

12) Unamquamque generalem, quae data sit, aut etiam, quae dari possit, tangentium theoriam in aequatione:

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx},$$

via sive directa sive indirecta, deducenda explicandaque versari, facile perspectu; imo etiam particulares omnes tangentium constructiones, et longe ante adeo, quam novus calculus constitutus sit, datas, illam aequationem circumscribere, persuasum nobis habebimus. Quo consilio pluribus definitionibus lucem afferemus.

13) (Fig. II.) Si brevitatis causa coordinatarum initium in ipsum contactus punctum transferimus, aequationem paragraphi (9)

$$\Delta b = A_1 \Delta a + A_2 \Delta a^2 + A_3 \Delta a^3 + \cdots$$

ita:

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

scribere licebit, unde statim elicimus

$$\frac{y}{x} = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots$$

$\frac{y}{x}$ tangens trigonometrica est anguli, quem recta, a qua curva pariter in puncto O et in altero puncto h, cujus coordinatae sunt x, y, secatur, cum axe abscissarum constituit. Ad plures lineas quae spectant, quas per punctum O et varia curvae puncta M', M'' etc. transducimus, tangentes trigonometricae eo propius ad valorem A_1 accedunt, quo minus x sumitur. Pari modo distantia utriusque intersectionis puncti OM una cum x diminuitur, limes ejus $= 0$. Habemus enim cordam quamcumque OM:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots)^2}$$
$$= x\sqrt{1 + A_1^2 + 2A_1 A_2 x + A_2^2 x^2 + \cdots}.$$

Hinc concludemus: limitem secantium, quarum cum curva puncta intersectionis magis magisque appropinquant, esse tangentem.

Cum, x negative posito, per aequationes

$$y = \varphi(-x) = -A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \cdots$$
$$\frac{y(=\varphi[-x])}{-x} = A_1 - A_2 x + A_3 x^2 - \cdots$$

ad eosdem limites perveniremus, quae ad singulum quem per figuram illustravimus casum pertinent, imaginemur tangentem TT'' limitem esse duorum rectarum systematum:

$$N'Q', \quad N''Q'' \text{ etc.}$$
$$N_{,}Q_{,}, \quad N_{,,}Q_{,,} \text{ etc.}$$

Quod praeterea inde a puncto O profecti, curvae partes solummodo consideremus, quae erga axem OX eodem sensu conversae sunt, expresse dicere opus non est.

14) Inde a paragraphi praecedentis conclusionibus plures tangentium theoriae, quarum in sequentibus duas in examen vocabimus, exordiuntur. Hunc ad finem rem ita aggrediamur, ut primo singulos utriusque passus modo generali indicemus.

(Fig. III.) Per curvae cujusdam punctum, quod locum contactus esse velimus, rectam, quae iterum, sive antea, sive postea, curvam secet, describamus. Sint enim M et M' intersectionis puncta atque:

$$y = f(x)$$

curvae aequatio, ad axes rectangulos: OX, OY relata, tum

$x' = OP$, $y' = PM$, $h = PP'$, $k = M'N$

sumtis, habebimus

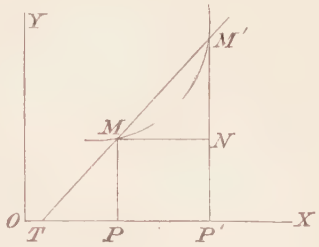

Fig. III.

$$PM = y' = f(x')$$

$$P'M' = y' + k = f(x' + h);$$

unde secundum seriem Tayloriam prodit:

$$M'N = k = \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}h^3 + \cdots$$

si in coefficientibus $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc., e functione primitiva deductis, termino x valorem x', termino y valorem y' substituimus.

Figura considerata, statim via geometrica intelligemus, triangula TMP et $MM'N$ similia esse, ideo,

$$TP = s$$

posito, obtinebitur:

$$s : y' = h : k$$

ideo:

$$k = \frac{y'}{s}h$$

aut etiam cum $\frac{y'}{s}$ tangenti trigonometricae anguli α aequipolleat,

$$k = h \text{ tang } \alpha;$$

quo valore k in priori aequatione substituto, habebimus:

$$h \text{ tang } \alpha = \frac{dy'}{dx'}h + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

et denique utraque hujus aequationis parte per factorem h, qui omnibus membris adhaeret, divisis:

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy'}{dx'} + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h}{1.2} + \frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^2}{1.2.3} + \cdots$$

Postremo, $h = 0$ posito, $\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h}{1.2}$, sequentiaque membra evanescent; solum enim restabit:

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy'}{dx'}.$$

Hinc si placet, elicimus etiam

$$s = \frac{y'}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{y}{\frac{dy'}{dx'}} = y' \frac{dx'}{dy'}$$

id est subtangentis valorem.

15) Sed frequentissimis in casibus calculo differentiali carere possumus. Sit enim:

$$y = f(x)$$

curvae aequatio, unde nisi terminos transcendentes continet, via pure algebraica passatim ad aequationes sequentes progredi licebit:

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x') \\ y' + k \\ y' + \frac{y'}{s} h \end{array}\right\} = f(x' + h)$$

$$h = f'(x'y's^*))$$

posito deinde $h = 0$ prodit:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = f'(x'y's) \\ s = f''(x'y') \end{array}\right.$$

aut denique, si ex aequatione $y = f(x)$ valorem termini y in x elicere possumus:

$$s = f'''(x').$$

Viam generalem, quam delineavimus, exemplo illustrabimus. Circuli enim notissima aequatio est haec:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

nec non punctum, per quod tangentem describere nobis proposuimus, cujus coordinatae sint x' et y', hocce igitur modo:

$$x'^2 + y'^2 - r^2 = 0$$

determinatum est. Substitutis igitur

$$x' + h \text{ pro } x'$$

$$y' + k \text{ pro } y'$$

et postea:

$$k = \frac{y'}{s} h$$

posito ad hasce passatim aequationes inducemur:

*) Cum certa constansque denotatio in calculo summae sit utilitatis, functiones cognitas per litteras latinas f, f' etc. functiones autem ignotas per litteras graecas φ, φ' etc. indicabimus.

$$x'^2 + 2x'h + h^2 + y'^2 + 2y'k + k^2 - r^2 = 0$$

$$2x'h + h^2 + 2y'k + k^2 = 0$$

$$2x'h + h^2 + 2\frac{y'^2}{s}h + \left(\frac{y'}{s}\right)^2 h^2 = 0$$

$$\left(2x' + \frac{2y'^2}{s}\right)h + \left(1 + \left(\frac{y'}{s}\right)^2\right)h^2 = 0;$$

omnibus terminis denique per h divisis ac

$$h = 0$$

posito, prodit

$$2x' + \frac{2y'^2}{s} = 0$$

$$x's + y'^2 = 0$$

$$s = -\frac{y'^2}{x'};$$

quod facillime geometrice interpretandum esset.

16) Ut clarissime in oculos incidat, quam similis sit calculi instituti modus coefficientis primi differentialis investigationi, diutius hisce in rebus versati sumus. Re vera enim aequatione:

$$s : y' = h : k$$

in casum cui convenit

$$h = 0$$

translata (quod nervus est argumenti praecedentis) prodit:

$$s : y' = 0 : 0.$$

Hinc elucet, nos dua triangula, quorum alterum infinite parvum est, comparasse, aut, si malimus, quotum duarum quantitatum infinite parvarum $\left(\frac{k}{h}\right)$ quoto quantitatum finitarum $\left(\frac{y'}{s}\right)$ aequasse, aut denique legem continuitatis (loi de continuité), quam magnus geometra basin esse calculi differentialis voluit, constituisse.

17) Calculus ita institutus, cum constructionem geometricam ei immiscuerimus, minus elegans mihi videtur, quam si viam pure analyticam persequamur. At quidem rem tali modo tracturos, nos ducem optimum sequi, nec non methodum analyticam, quam in sectionibus conicis adhibet, modo generali indicare licebit (Biot: Géométrie analytique). Quem ad finem:

$$y = f(x)$$

curvae aequatio sit; ideo certum curvae punctum, cujus coordinatae sunt x', y', ita:

$$y' = f(x')$$

determinatur. Lineae denique, quae per ipsum punctum transeat, aequatio est haec:

$$y - y' = a(x - x').$$

Combinatis tribus hisce aequationibus, obtinebitur:

$$f(x) - f(x') - a(x - x') = 0.$$

Tangente trigonometrica (a) anguli, quem recta cum axe abscissarum constituit, determinata, varias aequationis radices, aut, aliis verbis, valores abscissae x, qui curvae pariter et rectae conveniunt, per calculum elicere possumus. Nos autem viam inversam secuturi valorem tangentis trigonometricae (a), radice x' in aequatione nostra substituta, investigabimus. Cum verumtamen, hoc posito, quantitatis (a), qui primo nobis occurrit, valor:

$$a = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$

ad terminum $\frac{0}{0}$ reducatur, ut verum hujusce termini valorem indagemus, artificio analytico utamur, oportet.

18) Docet enim algebra, primo, unaquaeque aequatio, cui radicem $x = x'$ satisfacere velimus, per factorem $(x - x')$ dividi possit, deinde et aequationi, quae per divisionem prodeat, valor radicis $x = x'$ conveniat, necesse esse. In quibus, si ad aequationem nostram transferuntur, methodus aequationis, per quam quantitas (a) determinatur, obtinendae nititur.

Sed statim parabolae scilicet superioris ordinis aequationem simplicissimam: $y^3 = px$ tractantes, exemplo utemur (nec ea enim, quae Biot l. c. §§ 107, 127, 167, 193 exposuit, repetamus). Sint igitur eodem tempore:

$$y^3 = px$$
$$y'^3 = px'$$
$$y - y' = a(x - x').$$

Duabus prioribus collatis aequationibus, elicitur:

$$y^3 - y'^3 = p(x - x')$$

quod, cum e tertia aequatione derivetur etiam:

$$y = y' + a(x - x'),$$

ita transmutabimus:

$$(y' + a[x - x'])^3 - y'^3 = p(x - x')$$
$$3y'^2a(x - x') + 3y'a^2(x - x')^2 + a^3(x - x')^3 - p(x - x') = 0.$$

Qua aequatione per $(x - x')$ divisa obtinebitur:

$$3ay'^2 + 3a^2y'(x - x') + a^3(x - x')^2 - p = 0$$

radice x' quantitati x substituta, prodit denique:

$$3ay'^2 - p = 0$$

$$a = \frac{p}{3y'^2}$$

Casus, qui calculum differentialem exigunt, aequatione generali

$$f(x) - f(x') = a(x - x')$$

in examen vocata, determinare facile est. De brevi denique inter algebram et analysin superiorem limite pluria afferri liceret, quod vero, statim tertiam tangentium construendarum methodum aggressuri, missum faciamus.

19) E definitione, quam supra (13) dedimus, tangentem secantium limitem esse, quarum cum curva intersectionis puncta sibi appropinquent, et argumento absque elucet, omnem rectam, quae punctum quoddam, intra tangentem et curvam situm, cum puncto contactus conjungat, curvam secare. Quod vero pronuntiatum, via analytica, distinctius confirmabimus.

Si iterum, brevitatis causa, originem coordinatarum in ipso contactu ponimus, curvae et tangentis aequationes haece:

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$
$$y = A_1 x$$

prodeunt. Alia rectae coordinatarum originem transeuntis aequatio est:

$$y = A^1 x.$$

Quod si deinde rectam per punctum quoddam (cujus abscissa est x') intra curvam et tangentem situm, descriptam esse, supponimus, tum A^1 limitibus A_1 et $(A_1 + A_2 x'^1 + A_3 x'^2 + \text{etc.})$ circumscribitur. Scribamus igitur,

$$m > n$$

posito:

$$A^1 = A_1 + \frac{n}{m}(A_2 x' + A_3 x'^2 + \cdots)$$

unde prodit rectae aequatio:

$$y = \left[A_1 + \frac{n}{m}(A_2 x' + A_3 x'^2 + \cdots)\right] x$$

quam si ad puncta, in quibus cum curva congruat, determinanda cum hujusce aequatione:

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

combinamus, obtinebitur:

$$\left[A_1 + \frac{n}{m}(A_2 x' + A_3 x'^2 + \cdots)\right] x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

unde derivabimus:

$$\left.\begin{matrix} A_2 x + A_3 x^2 + \cdots \\ F(x) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{n}{m}(A_2 x' + A_3 x'^2 + \cdots) \\ \frac{n}{m} F(x'). \end{matrix}\right.$$

Hinc sequitur, cum solum functiones algebraicas inter oculos habeamus, aliquam aequationis radicem (omittamus enim an plures radices aequationi satisficiant) inter limites 0 et x' contineri. Quod in linguam geometricam translatum, ita pronuntiaremus, omnem rectam, quae punctum quoddam intra curvam et tangentem situm cum contactus utriusque lineae puncto conjungat, curvam secare.

20) (Fig. IV.) Inde a generali hoc pronuntiato profecti, via indirecta sed satis eleganti (licet enim et hic magistrum sequi optimum) tangentium theoriam exponemus. Sed ne res inutile complicetur, duos casus singulatim illustrabimus.

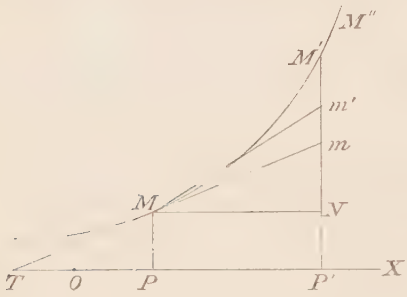

Fig. IV.

Curvae $MM'M''$, per aequationem

$$y = f(x)$$

coordinatis rectangulis, datae partem MM', eodem sensu erga axem OX conversam (quod MM' satis parve posito semper statui licebit) considerabimus, et quidem

I. MM' erga axem OX convexam esse ponamus. Curva deinde ita determinata in puncto M cum recta TMm, cujus aequatio sit:

$$y = mx + n$$

congruat; tum, si

$$m = \frac{df(x)}{dx}\,[x = a] = A_1,$$

($OP = a$ posito) curvam MM' in puncto M recta TM tangi, constituamus.

Argumentum. Recta TMm, quae ordinatam MP secat, sat prolongata parallelam etiam $M'P'$, quam ex altero curvae puncto M' normalem in axem OX demittamus, secabit. Quod si factum in puncto m ponimus, omnia rectae $M'P'$ puncta intra M' et m, pari modo et intra curvam et rectam TMm sita sint, oportet. Si igitur rectam illam TMm tangentem esse velimus, recta Mm', quae punctum quoddam (m') lineae $M'm$ cum puncto M conjungit, inter M et M' curvam secet, necesse est. Cui conditioni

$$m = A_1$$

posito satisfaciemus.

Nam si contrarium ponimus, quamvis proxime, recta TMm locum suum tenente, puncta M et M' sibi accedant, semper tamen

$$P'M' - P'm'$$

quantitas positiva sit, oportet. Quod vero illis sub conditionibus fieri non posse, facile demonstratu. PP' enim h nominato, quiscunque sit situs alterius puncti M', semper tamen habetur:

$$P'M' = f(a+h) = f(a) + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

Porro, si rectae Mm' aequatio sit haec:

$$y = \mu x + \nu$$

(cum angulus $NMm' > NMm$ atque rectae Mm' et Mm utraeque per punctum M transeant):

$$\mu > m$$

et pari modo cum $m = A_1$:

$$\mu > A_1$$

obtineri, necesse est. Habebitur autem:

$$P'm' = \mu(a+h) + \nu$$

et denique differentia:

$$P'M' - P'm' = f(a) - (\mu a + \nu) + (A_1 - \mu)h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

aut etiam, cum $f(a) - (\mu a + \nu)$ evanescat:

$$P'M' - P'm' = (A_1 - \mu)h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

Quam parve igitur h ponatur,

$$(A_1 - \mu)h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots > 0$$

exigitur; cui conditioni, cum h tam parve sumi liceat, ut omne seriei membrum summam omnium sequentium superet, satisfieri non potest. Tum enim primi seriei termini signum signum totius seriei indicat; qui terminus autem, cum

$$\mu > A_1$$

habeatur, negativus sit, oportet.

Hinc statim elucet, curvam intra puncta M et M' recta iterum secari. Quod cum pari modo, in omni recta, quae punctum quodvis rectae $M'm$ cum puncto M conjungit, obtinuerimus, recta Tm, secundum definitionem, quam supra dedimus, curvam in puncto M tangit.

II. (Fig. V.) Curvam, quae partem suam concavam axi abscissarum advertat, consideraturi, priori definitioni nonnullas tantum mutationes faciamus, necesse est. Sint iterum

$$y = f(x)$$

curvae MM' et

$$y = mx + n$$

$$y = \mu x + \nu$$

rectarum Tm et Mm' aequationes, tum vero, via analoga ut supra:

$$\mu \lessgtr \frac{df(x)}{dx} \; [x = a] \lessgtr A_1$$

habebitur, et nisi recta curvam intra puncta M et M' secat, quantitatem:

$$P'm' - P'M' = (\mu - A_1)h - A_2h^2 - A_3h^3 - \cdots$$

(quisque termino h substituatur valor) positivam esse, sat apparebit. Cum vero h satis parve posito contrarium obtineatur, recta Tm et hic curvam in puncto M tangit.

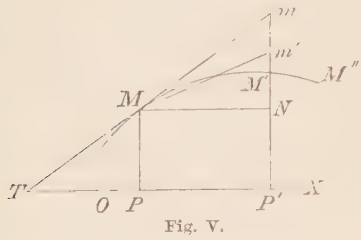

Fig. V.

21) Cum satis, ut videtur, persuasum nobis haberemus, omnes tangentium definitiones eundem finem (a quo nos exordiri conati sumus) circumscribere, longum esset, ut, tribus, quae rem de diversis partibus aggrediuntur, theoriis delineatis, diutius hisce in rebus versaremur, nec non aliis definitionibus particularibus lucem afferremus. Sed antequam viam seriei Tayloriae interpretandae, quam diu reliquimus, persequamur, videamus et haec.

Quae ad rectam spectant, tangens trigonometrica A_1, quavis abscissa sumta, nullo modo mutatur; et vice versa illa cujusvis lineae, cujusvis linearum systematis pars, quae pro omnibus variabilis x valoribus ei convenientibus ita determinatur, ut $\frac{dy}{dx}$ aequalis sit constanti, rectae aequivalet. Nunc autem si

$$\frac{dy}{dx} = A_1$$

habemus, secundum id, quod (11) pronuntiavimus, curvae parti ds, quae coordinatarum differentialibus dy, dx respondet, recta substitui potest. In omni autem curva continua, ut $\frac{dy}{dx}$ functio sit variabilis x, tangentis erga axem situs, x et minime tantum mutato, variabit. Hinc ideo Leibnitii principium emanat, „figuram“ — ut ipsis viri celeberrimi verbis utar — „curvilineam censendam esse aequipollere polygono infinitorum laterum; unde sequitur, quidquid de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita, ut tanto magis verificetur, quanto major sumitur laterum numerus, ita ut error tandem fiat quovis dato minor: id de curva posse pronuntiari.“ Acta eruditorum MDCLXXXIV.*)

*) Si inde ab hoc pronuntiato exordiremur, tangentium definitio per se nobis occurreret. Sed nec diutius hisce in rebus versemur; sufficit enim, ut hic quo-

Quamquam hoc principium non in capite geometriae analyticae poneremus, saepius tamen idoneum mihi videtur, ut ea, quae via solummodo analytica investigata sint, clarius ante oculos ponantur; quod verbi causa in mechanica cum utilitate fieri licet. Haec vero nunc relinquemus, cum deinde locum, quem illud pronuntiatum in analysi occupat, distinctius determinari liceat.

22) Brevitatis causa origine coordinatarum in ipsum contactus punctum translata, nec non

$$A_1 = \frac{dy}{dx} \quad (x = 0)$$

$$A_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{1.2} \quad (x = 0)$$

$$A_3 = \frac{d^3y}{dx^3}\frac{1}{1.2.3} \quad (x = 0)$$

et sic porro sumtis, aequationem habuimus hanc:

$$y = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots = f(x)$$

quam contemplari in sequentibus continuabimus.

Evanescentibus A_2, A_3 sequentibusque coefficientibus, aequatio nostra in simplicissimam hanc formam:

$$y = A_1x$$

reducitur, unde prodit:

$$A_1 = \frac{y}{x}.$$

Tum etiam terminus A_1 nullo modo cum variabilis x valore connectitur, ita ut semper habeatur:

$$A_1 = \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ autem constante, aequatio:

$$y = f(x)$$

rectae convenit.

23) Si vero et sequentia accedunt membra:

$$y = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$$

tum quotus

$$\frac{y}{x} = A_1 + A_2x + A_3x^2 + \cdots$$

nonnisi $x = 0$ ponitur, valorem coefficientis A_1 indicat. Quo in casu $\frac{dy}{dx}$ functio est variabilis x, unde

$$y = f(x)$$

curvae obtinebitur aequatio.

que cognoscamus, nos, termino $\frac{dy}{dx}$ quocunque modo circumscripto, generalem tangentium theoriam jam quasi constituisse.

Si coefficiens

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\ (x = 0)$$

cum variabili x non connectitur, ita ut $\frac{d^2y}{dx^2}$ constans fiat, membris sequentibus seriei evanescentibus, habebitur solum:

$$y = A_1 x + A_2 x^2.$$

Brevitatis causa $A_1 = 0$ sumto, aut aliis verbis, axe abscissarum ita constituto, ut cum tangente in origine coordinatarum congruat, aequatio nostra ita transmutabitur:

$$y = A_2 x^2$$

unde:

$$\frac{y}{x} = A_2 x$$

prodit.

24) Sed antequam hoc persequamur, curvae, qua occupamur, aequationem:

$$y = f(x)$$

investigabimus. Posito enim:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{constanti} = 2b$$

integrando obtinebimus:

$$\frac{dy}{dx} = 2bx + \text{const.}$$

cum vero $\frac{dy}{dx}$ una cum x evanescere constituamus:

$$\text{const.} = 0$$

prodit. Aequatione

$$\frac{dy}{dx} = 2bx$$

iterum integrata, nec non constante, cum y et x simul evanescant, omissa, habebitur:

$$y = bx^2$$

(quae, ut cum vulgari parabolae aequatione $y^2 = 2px$ congruat, sufficit, ut axes coordinatarum commutemus, atque pro b scribamus $\frac{1}{2p}$). Habemus igitur

$$y = bx^2 = \frac{1}{2p}x^2$$

$$x^2 = 2py$$

aequationem parabolae, cujus vertex punctum contactus est.

25) Quae ad reliquas spectant curvas omnes, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est functio variabilis x, atque ex aequatione:

$$y = A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \cdots$$

derivabitur:

$$\frac{y}{x} = A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \cdots$$

quotus qui quanto magis x diminuitur, eo magis ad:

$$\frac{y}{x} = A_2 x,$$

cujus limes:

$$\text{lim.}\ \frac{y}{x} = 0$$

accedit; aut denique x infinite parvo:

$$x = dx\,(x = 0) = dx_0$$

supposito, obtinebitur:

$$\frac{dy_0}{dx_0} = A_2 dx_0 + A_3 dx_0^2 + \cdots$$

Tunc vero omne seriei membrum cum praecedente collatum, evanescit; neglectis igitur $A_3 dx_0^2$ ceterisque membris, prodit solum:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx_0} &= A_2 dx_0 \\ &= \frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx\,(x = 0) \\ &= \frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^2y}{dx}\,(x = 0). \end{aligned}$$

—

$\frac{dy_0}{dx_0}$ pro analogia tangentem trigonometricam anguli ω, quem tangens cum curva constituit, nominabimus (nec vero, nos angulum ω in ipso contactus puncto metiri obliviscamur). Scribamus igitur:

$$\text{tang.}\ \omega = \frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^2y}{dx}\,(x = 0).$$

26) Ut clarius, quidquid de angulo contactus sentiendum sit, appareat, rem modo quam maxime generali considerantes, viae, quam paragrapho praecedenti inivimus, lucem afferemus.

(Fig. VI.) Duae rectae, quae postquam in puncto quodam congruerunt, disgrediuntur, angulum constituunt. Qui angulus quanam ratione via geometrica definiatur, nos trigonometricam denotationem secuturi ponemus

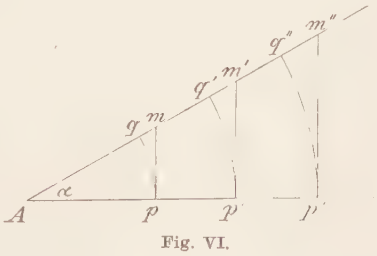

Fig. VI.

$$CAB = \alpha = \frac{\text{arc.}:pq}{Ap},$$

id est, angulum esse quotum (numerum) qui arcu per radium diviso, obtinetur. Cum vero quoti

$$\frac{p'q'}{Ap'}, \quad \frac{p''q''}{Ap''}, \cdots$$

quemnam radium sumamus, aequales sint, valorem anguli α in ipsum verticem translatum imaginari, nobis licebit. Pari modo nil interest in quanam a vertice distantia lineas trigonometricas metiamur, ita ut exempli gratia

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{pm}{Ap} = \frac{p'm'}{Ap'} = \frac{p''m''}{Ap''} \cdots$$

habeatur.

(Fig. VII.) Aliter, quae ad angulum contactus spectant, res se habet. Quotus enim, qui utriusque lineae distantia mp (quanam ratione constanti eam metiamur) per distantiam puncti (p) a puncto contactus (A) divisa, obtinebitur, functio est hujusce distantiae (Ap). Quod brevissimum est, distantias utriusque lineae, ope ordinatarum, quas pro analogia tangentes nominemus, mensuri sumus, tum enim habebimus:

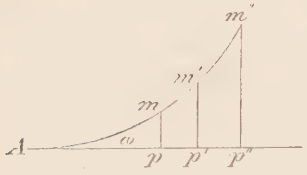

Fig. VII.

$$\frac{pm}{Ap}, \quad \frac{p'm'}{Ap'}, \quad \frac{p''m''}{Ap''}, \cdots$$

tangentes trigonometricas anguli $CAB(=\omega)$, quae quanto minus Ap ponitur, eo magis limiti $= 0$ accedunt. De anguli nostri magnitudine igitur non aliter, nisi ad certam a vertice distantiam relata, sententiam ferre, atque omnino angulos contactus, cum natura sunt plane diversi, nullo modo cum angulis communibus comparare possumus.

27) Plerumque verumtamen anguli contactus, ut inter se comparentur, in ipso vertice, via analytica, determinari solent. Quem ad finem

$$\text{tang.}\,\omega = A_2 dx + A_3 dx^2 + \cdots$$

deduximus, cui aequationi, neglectis infinite parvis superiorum ordinum

$$\text{tang.}\,\omega = A_2 dx$$

substitui licet; id est, ut supra vidimus, angulus, quem curva quaedam cum tangente constituit, angulo contactus, qui parabola communi et tangente includitur, aequipollere censendus est. (Fig. VIII.) E parabolae aequatione enim

$$2py = x^2$$

(ut viam inversam ineamus), statim derivabitur:

$$\left.\begin{matrix} y \\ x \\ \text{tang.}\,\omega \end{matrix}\right\} = \frac{x}{2p}.$$

Talem angulum ω, qui, si in ipso vertice eum metimur (ita enim determinatus saepius in calculo adhibetur) quantitati infinite parvae

primi ordinis respondet, angulum contactus primi ordinis vocabimus. Lex praeterea, secundum quam ejus tangens:

$$\text{tang. } \omega = \frac{x'}{2\rho}$$

erga verticem diminuitur, in oculos incidit.

28) Sed alia etiam via angulos contactus inter se comparare, nec non eorum valores finitos in calculum introducere possemus. Nam si eos in certa distantia x', quae unitas ponitur, metiri conveniremus, denotationem praecedentem adhibentes, haberemus:

$$\text{tang. } \omega = A_2 x' = A_2.$$

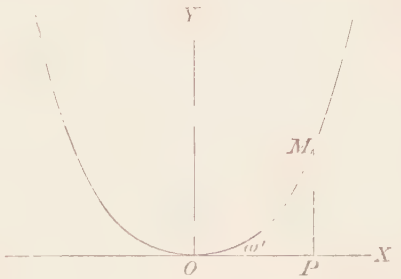

Fig. VIII.

(Fig. VIII.) Terminus A_2 igitur (quem, $OP = 1$ posito, recta PM repraesentat) tangens trigonometrica anguli contactus, ad abscissae unitatem relati, nominari licebit. (Tali modo in mechanica vires acceleratrices determinantur. Cf. (43.))

29) (Fig. IX.) Valorem anguli contactus infinite parvi primi ordinis ope Leibnitii principii in figura ante oculos positu, nec non deinde via geometrica deductu, facile erit. Nam si Om, mm', $m'm''$ curvae elementa, polygonum constituentia nobis significant, tum OX (quem axem esse abscissarum ponimus) curvam tangit, atque $m'mp' = \omega$ angulum contactus, qui supplementum est anguli polygoni Omm' ad π, designat. Habemus ad haec:

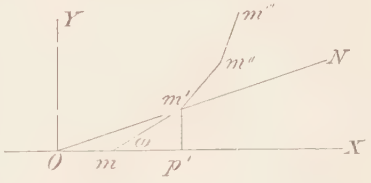

Fig. IX.

$$\text{tang. } \omega = \frac{m'p'}{mp'}$$

et cum, $Op' = 2dx$ posito, $m'p' = d^2y$ prodeat (conf. Lacroix, Traité du calc. diff. et intégr. I.) pari modo

$$\text{tang. } \omega = \frac{d^2y}{dx}. \text{ —*)}$$

*) Quod re vera cum prioribus consentit. Nam quod altera aequationis pars factore $\frac{1}{1.2}$ careat, nullius momenti est, cum quantitates infinite parvas ante oculos habeamus, quas solummodo cum quantitatibus ejusdem generis comparare licet. Ad angulum

30) Ideo, si angulus in ipso vertice consideratur, omnino angulo rectilineo infinite parvo aequipollet. Quibus praemissis valorem ejus indagatum:

$$\text{tang. } \omega = A_2 dx$$

et in alias formas reducere licet. Primo seriei notissimae:

$$\omega = \text{tang. } \omega - \frac{\overline{\text{tang. } \omega}^3}{3} + \frac{\overline{\text{tang. } \omega}^5}{5} - \cdots$$

$$= A_2 dx - \frac{A_2^3}{3} dx^3 + \frac{A_2^5}{5} dx^5 - \cdots$$

ratione habita, intelligemus, neglectis solummodo quantitatibus infinite parvis tertii ordinis, tangenti ipsum angulum substitui posse, ita ut obtineatur:

$$\omega = A_2 dx.$$

Docet deinde aequatio (ds differentiale arcus nominetur):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$= dx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{dy^4}{dx^4} + \cdots\right)$$

cum propter axium situm $\frac{dy}{dx}$ sit infinite parvum, licere etiam pro differentiali abscissae differentiale arcus in calculo adhibere, ideo:

$$\omega = A_2 ds = \frac{d^2 y}{dx^2} (x = 0) \frac{ds}{2}.$$

Denique secundum notam, quam paragrapho praecedenti adjecimus, nil obstat, quominus, factore $\frac{1}{2}$ suppresso ubique aequatione:

$$\omega \left(\text{tang.} = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{dx}\right)$$

figura designandum sufficit, ut angulo $m' m p'$ angulus $N O X$ substituatur, tum enim

$$\text{tang. } N O X = \frac{m' p'}{o p'} = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{dx}.$$

Omnino in quantitatibus infinite parvis denotandis vagi quid et arbitrii est, quod vero, si eadem denotatione ubique utamur, nil detrimenti fert.

Res praeterea subtili discrimine nititur inter aequationes

$$\frac{y}{x} \begin{pmatrix} y = 0 \\ x = 0 \end{pmatrix} = A_2 x$$

et:

$$\frac{dy}{dx} \begin{pmatrix} y = 0 \\ x = 0 \end{pmatrix} = 2 A_2 x$$

quae utraeque ex communi aequatione:

$$y = A_2 x^2$$

elici possunt. Conf. et pars mech. (43).

$$\omega = 2A_2 ds = \frac{d^2y}{dx^2}(x=0)\,ds$$

utamur.

31) Anguli contactus valorem, quem modo constituimus, quae ad circulum spectant, investigabimus. Circuli enim aequationem ad axes rectangulos, quorum alter abscissarum cum tangente congruat, ita scilicet, ut punctum contactus coordinatarum initium sit, relatam, talem esse:

$$x^2 = 2ay - y^2$$

(a circuli radium significat) facile intellectu, si tantum figuram ante mentem habeamus. Qua aequatione bis differentiata, reductione facta, atque denique:

$$x = 0, \quad y = 0$$

positis, passatim prodit:

$$x\,dx = a\,dy - y\,dy \qquad dy = \left(\frac{x}{a-y}\right)dx$$

$$dx^2 = a\,d^2y - y\,d^2y - \left\{\begin{matrix} dy^2 \\ \left(\frac{x}{a-y}\right)^2 dx^2 \end{matrix}\right.$$

$$dx^2 = a\,d^2y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x=0) = \frac{1}{a}.$$

Ideo:

$$\omega = \frac{d^2y}{dx^2}(x=0)\,ds = \frac{ds}{a}.$$

Qui valor, quidquid circuli punctum consideretur (cum omne coordinatarum originem esse statui licet) nullo modo mutatur.

32) (Fig. X.) Quod idem per sequentem, quam dare conaturi sumus, demonstrationem geometricam, a posteriori obtinebitur. Etenim statuentibus nobis, radium CM (quodcunque sit punctum M) curvae esse normalem, circuli natura satis determinata est. Posito igitur, duas rectas CM et CM' e centro C in fines cordae MM' demissas, huicce cordae esse normales, ita ut habeatur:

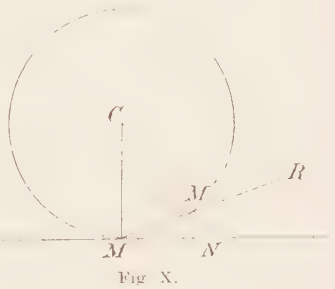

Fig. X.

$$CMM' = \frac{\pi}{2}, \quad CM'M = \frac{\pi}{2},$$

tum corda MM' *circuli* elemento aequipollere censenda est. Adhunc si rectam MT circulum $MM'M''$ in puncto M tangere jubemus, angulus $M'MN$ angulo contactus aequivalet.

Quibus praemissis, quidquid igitur ope conclusionum geometrica-

rum de angulo rectilineo $M'MN$ obtineatur, de angulo contactus etiam, quem *circulus* cum tangente constituit, pronuntiare poteremus. —

CMN angulus est, quem radius CM in puncto M cum tangente, et ideo cum curva constituit, igitur:

$$CMN = \frac{\pi}{2}.$$

Pari modo cum MM' elementum rectilineum circuli sit, angulus etiam, quem radius CM' in puncto M' cum curva constituit:

$$CM'M = \frac{\pi}{2}$$

unde sequitur:

$$CMN = CM'M$$

deinde cum:

$$CM'M = M'MC + M'CM$$
$$CMN = M'MC + M'MN$$

obtinebitur

$$M'MC + M'MN = M'MC + M'CM$$
$$M'MN \left\{ \begin{array}{l} = \\ \omega \end{array} \right\} \begin{array}{l} M'CM \\ M'M \\ CM \\ ds \\ a \end{array}$$

Nervus argumenti in oculos incidit.

33) Cum a voluntate nostra dependeat, angulo, quem circulus cum tangente constituit:

$$\omega = \frac{ds}{a}$$

mutato circuli radio (a) quem placet valorem contribui, satis apparet, angulo contactus primi ordinis, quem curva qualiscunque cum tangente constituit, angulum contactus, circulo cuidam convenientem, substitui licere. Quem circulum difficultate absque determinabimus. Intelligemus enim, cum in investigando anguli contactus primi ordinis valore coefficientes differentiales secundo superiores plane neglexerimus, circulum illum (si per $y' = f''(x')$ curvae, per $y = f'(x)$ circuli aequationem designamus) eo indicari, ut cum curva in hisce terminis:

$$x = x' \quad f'(x) = f'(x')$$
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df'(x')}{dx'}$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2f'(x')}{dx'^2}$$

congruere oporteat. Talem circulum osculatorem vocamus, atque radius ejus in geometria analytica ita:

$$\gamma = \frac{(dx'^2 + dy'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx' d^2y'}$$

constituitur. Habebimus igitur denique, si γ radium quendam curvaturae nobis significat:

$$\text{ang. cont. } \omega = \frac{ds}{\gamma} \cdot —$$

Nescio an in quibusdam de geometria analytica libris de angulo contactus copiosius disertum sit. Plerumque verumtamen in mechanica aequatio, quam modo constituimus, adhibetur, nec non ita scilicet, via diversa, ope Leibnitii principii investigatur: „Poisson, Traité de mécanique 154."

34) Postquam in seriei generalis:

$$\Delta b = A_1 \Delta a + A_2 \Delta a^2 + A_3 \Delta a^3 + A_4 \Delta a^4 + \cdots$$

prioribus coefficientibus interpretandis explicandisque diutius versati sumus, id quod adhuc nobis restat, celerius absolvemus. Connexu terminorum A_1, A_2 cum angulis diversi generis indagato, ut videamus, an non et sequentibus seriei coefficientibus A_3, A_4 etc. anguli respondeant, res nos exhortatur. Re vera nimirum, quod statim cognituri sumus, ad angulos ordinum altiorum (si hisce licet verbis uti) reducemur.

Primo ut sequentia seriei membra evanescant, terminus

$$A_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3y}{dx^3} (x = a)$$

non a valore (a) dependeat. Tum etiam exigitur, si per c constantem designamus:

$$\frac{d^2y}{dx^3} = c$$

unde, c', c'', c''' alias constantes indicantibus, paulatim prodit:

$$y = \int\int\int d^3y = \int\int\int c\,dx^3$$

$$= \int\int c\,x\,dx^2 + \int\int c'\,dx^2$$

$$= \int \frac{1}{2} c x^2 dx + \int c' x\,dx + \int c''\,dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} c x^3 + \frac{1}{2} c' x^2 + c'' x + c'''.$$

Si, ut jam supra fecimus, coordinatarum initium in punctum contactus transferimus, nec non tangentem cum axe abscissarum congruere jubemus, tum y et $\frac{dy}{dx}$ simul cum x evanescentibus, habebitur solum:

$$y = \frac{c}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{c'}{2} x^2$$

35) (Fig. XI.) Quae ad casum particularem spectant, ut et $\frac{d^2y}{dx^2}$ una cum x evanescat, aut aliis verbis, ut nullus sit angulus contactus primi ordinis, aut denique, ut radius curvaturae infinitus fiat:

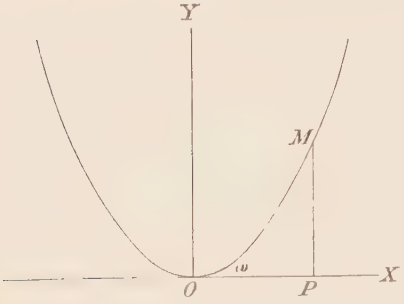

Fig. XI.

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y} = \\ = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{ds^2}{d^2y}\,(x = 0) = \frac{1}{0},$$

habebitur:

$$y = \frac{c}{2\,.\,3}\,x^3$$

parabolae tertii ordinis aequatio. Secundum conclusiones, prioribus analogas, valorem anguli, quem talis parabola cum tangente constituit ita:

$$\omega' = cx^2 = \frac{d^3y}{dx^3}\,(x = 0)\,x^2$$

aut si malimus ita etiam:

$$\omega' = A_3x^2 = \frac{c}{2\,.\,3}\,x^2$$

determinabimus. Si talem angulum in unitate a vertice distantiae (quae ut supra in tangente sumatur) metimur, priorem denotationem secuturi, obtinebimus:

$$\omega' = c = \frac{d^3y}{dx^3}\,(x = 0)\,x^2.$$

Si vero in ipso vertice ope terminorum analyticorum ejus valorem constituere velimus, tum emanabit:

$$\omega' = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^2 = \frac{d^3y}{dx}\,(x = 0).$$

Qui angulus erga verticem rapidius diminuitur, quam angulus contactus primi ordinis ω, ita quidem, ut in ipso vertice cum eo comparatus infinite parvus fieri censendus sit.

36) (Fig. XII.) Generaliter autem hicce angulus alia sub forma nobis occurret; etenim non curva et recta, sed duabus curvis, nimirum curva tertii ordinis et parabola communi inclusus, apparebit. Sed brevitatis causa figura adspiciatur; angulus MOQ scilicet constituitur per curvam OM, cujus aequatio secundum (34) est:

$$y = \frac{c}{2\,.\,3}\,x^3 + \frac{c'}{2}\,x^2$$

et per parabolam OQ cujus parametrum $= \frac{c'}{2}$.

Ad valorem talis anguli finitum constituendum, conveniatur de ratione certa et constanti ejus metiendi, oportet. Hunc ad finem exempli causa ordinatarum partes intra curvam et parabolam MQ, $M'Q'$ etc.:

$$\left(y - \frac{c'}{2}x^2\right) = \frac{c}{2.3}x^3$$

quae eodem modo ut coordinatae paragraphi praecedentis erga verticem diminuuntur, in certa a vertice distantia determinari possunt. Quod vero multis exponi hic longum esset.

37) Via, quam indicavimus, perrecturi infinitos ordines diversos angulorum indagaremus, quorum valores in vertice ita constituere licebit:

$$\alpha = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{dy}{dx}\right), \quad \omega = \frac{d^2y}{dx}, \qquad \omega' = \frac{d^3y}{dx},$$

$$\omega'' = \frac{d^4y}{dx}, \quad - - - - - - - \quad \omega^{n-2} = \frac{d^ny}{dx}.$$

Qui anguli generaliter per duas curvas, quarum aequationes sunt:

$$y = px^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$$

$$y = \qquad p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$$

includuntur, nec non, quae ad casum particularem spectant, per parabolam ordinis n:

$$y = px^n$$

et per rectam, quam axem abscissarum esse jubemus.

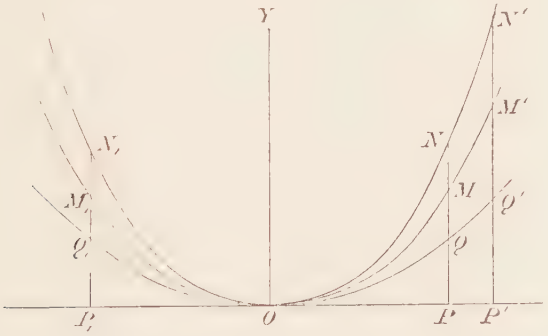

Fig. XII.

38) Antequam partem geometricam relinquamus, breviter tantummodo quatenus ea, quae hucusque exposuimus, multarum applicationum fundamenta sint, attingemus.

(Fig. XII.) Ope angulorum contactus curvam quamlibet, functionis $f(x)$ instar, secundum exponentes variabilis x evolutae, in seriem curvarum explicari licet. Vice versa quoque de curvis inferioris ad curvas

superioris ordinis ascendentes, curvae cuidam, cujus aequatio idoneis terminis haberi non potest, quam proxime appropinquare poterimus.

Ita exempli gratia, si seriem (quam, denotatione terminis jam supra adhibitis accommodata, e „Lacroix: Traité etc.“ transscribamus):

$$f(x)\,dx \begin{Bmatrix} x = a + \Delta a \\ x = a \end{Bmatrix} = A\Delta a + A_1\Delta a^2 + A_2\Delta a^3 + A_3\Delta a^4 + \cdots$$

ad curvarum quadraturam applicamus, curvae cujus aequatio est:

$$y = f(x)$$

paulatim rectam, axi abscissarum parallelam, deinde tangentem, tum parabolam, tum curvam tertii ordinis et sic porro substituimus.

Quod distinctius adhuc in construendis aequationibus differentialibus apparebit. Nam si aequationem:

$$f\left(\frac{dy}{dx},\ y,\ x\right) = 0$$

in curvam vertere velimus, pro ejus limite polygonus Leibnitianus nobis occurret. Aequatio differentialis secundi ordinis

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{dy}{dx},\ y,\ x\right) = 0$$

ad polygonum infinitorum laterum parabolicorum (quibus etiam arcus circuli substitui licet) reducit. — Similis rei demonstrandae ratio denique, si ad prima rudimenta regredimur, systematis geometriae analyticae quod illust. Monge exposuit, basis est.

Pars Mechanica.

39) Si duo corpora (M, N) potentiis quibusdam compelluntur, spatia percurrunt, quae, certis limitibus circumscripta, inter se comparari possunt. Hunc ad finem locis, quos utrumque corpus in iisdem temporis momentis tenet, observatis, habebitur, si spatia, simultaneis observationibus determinata, per variabiles s et t designamus:

$$s = \varphi(t);$$

unde statim, ut supra, derivabimus:

$$\Delta s_{,} = T_1\Delta t_{,} + T_2\Delta t_{,}^2 + T_3\Delta t_{,}^3 + \cdots$$

($s_{,}$ et $t_{,}$ nimirum singulos quoscunque variabilium valores indicant, nec non

$$T_1 = \frac{ds}{dt'},\quad T_2 = \frac{d^2s}{dt^2}\frac{1}{2},\quad T_3 = \frac{d^3s}{dt^3}\frac{1}{2\,.\,3} + \cdots$$

supponuntur) quam aequationem, ut facilius quantitates variabiles a constantibus distingui possint, hanc etiam in formam:

$$s - s' = T_1(t - t_{,}) + T_2(t - t_{,})^2 + T_3(t - t_{,})^3 + \cdots$$

reduci licet. Seriei terminum T_1, cujus valor ita:

$$T_1 = \frac{s - s_,}{t - t_,} - T_2(t - t_,) - T_3(t - t_,)^2 - \cdots$$

elicitur, *celeritatem vocamus;* ita enim, ut dicamus celeritatem corporis M, postquam spatium s peregerit, $T_,$ plicem esse celeritatis, qua corpus N movetur.

Generaliter $T_,$ functio erit spatii $t_,$ a corpore N peracti, ita ut $T_,$ simul cum $t_,$ mutetur; quo supposito solummodo, t infinite $t_,$ approximato, celeritas quoto duorum spatiorum (infinite parvorum) aequipollere censenda est:

$$T_1 = \lim \frac{s - s_,}{t - t_,}.$$

Si vero aequatio $s = \varphi(t)$ talis est, ut habeatur:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \text{const.}$$

tum, membris sequentibus evanescentibus, obtinebitur:

$$T_1 = \frac{s - s_,}{t - t_,};$$

id est celeritas quotus est duorum quorumvis spatiorum sibi correspondentium, quae ab utroque corpore perfecta sint. Quo casu corporum motus, qui $T_1 = 1$ posito, omnino congruerent, ejusdem generis est.

40) Quamquam leges, secundum quas utrumque corpus movetur, nobis ignotae sunt, licebit tamen via, quam in paragrapho praecedenti designavimus, utrumque motum inter se conferri. Quem ad finem sufficit ut, duobus corporibus motis in variis temporis momentis observatis, valores spatiorum variabilium $s,$ $t,$ sibi respondentium constituamus:

$$s_, \; s_{,,} \; s_{,,,} \; \ldots\ldots \; s_n$$
$$t_, \; t_{,,} \; t_{,,,} \; \ldots\ldots \; t_n.$$

Si differentias spatiorum $t,$ quae alterum corpus (N) percurrit, aequales esse velimus, solummodo corpus (M) tum observetur oportet, cum illud (N) aequali quantitate Δt progressum est. Quo posito medio in calculo differentiali versati sumus, nec non seriem nostram secundum methodum notissimam interpolare, at denique etiam functionem

$$s = \varphi(t)$$

constituere poterimus. Prodeat exempli gratia ex observationibus simultaneis:

$$t_, = 1, \quad t_{,,} = 2 \;, \quad t_{,,,} = 3 \;, \quad t_{,,,,} = 4$$
$$s_, = 7, \quad s_{,,} = 12, \quad s_{,,,} = 19, \quad s_{,,,,} = 28$$

tum:

$$\Delta t = t_{''} - t_{'} = t_{'''} - t_{''} = t_{''''} - t_{'''} = 1$$
$$\Delta s_{'} = s_{''} - s_{'} = 5, \quad \Delta s_{''} = s_{'''} - s_{''} = 7, \quad \Delta s_{'''} = s_{''''} - s_{'''} = 9$$
$$\Delta^2 s_{'} = \Delta s_{''} - \Delta s_{'} = 2, \quad \Delta^2 s_{''} = \Delta s_{'''} - \Delta s_{''} = 2$$
$$\Delta^3 s_{'} = 0;$$

ideo habebitur:

$$s_{n+1} = 7 + \frac{n}{1} \cdot 5 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot 2.$$

Satis praeterea constat, conditioni:

$$\Delta^2 s = \text{const.}$$

satisfacere aequationem secundi ordinis, quae facile ita:

$$s = 4 + 2t + t^2$$

distinctius determinatur; quam valores etiam, qui ex observationibus obtinebantur, confirmant. Generaliter igitur functionem (t) datam esse, nec non $s = f(t)$ scribi licebit.

41) Deinde statim perspicimus, si leges motus utriusque corporis fingimus atque constituimus, omnia motus genera deductu facilia esse. Talis motus fictus est temporis progressio, a cujus conditionibus demonstratio paragraphi praecedentis nullo modo dependet. Nam (nil interest, quomodo alii tempus definiant) in mechanica tempus motum, id est continuos spatiorum progressus nobis significat et motus quidem aequabilis est. (Quod pronuntiatum, cum omnes, qui tempus definire velint, illud solummodo circumscribere conantur, tamquam axioma in capite posuimus.) Hisce rebus in sequentibus lux afferenda atque motus ille aequabilis definiendus est. Quod facillime fiet, si ad numeros transituri spatii unitatem constituimus. Hunc ad finem spatium ($= \gamma$), quod corpus quoddam, secundum leges quaslibet motum, in aliquo temporis intervallo percurret, observemus, nec non imaginemur, illo spatio peracto, corpus eodem modo per aequale spatium et sic porro moveri. Quo posito, n temporis intervallis n spatia ($= \gamma$), (quae unitates esse jubemus) respondent, quae iis etiam in calculo substituuntur; tota igitur, quam corpus percurrit via, per ϑ designata

$$\vartheta = n\gamma$$

(n numerum integrum significante) habebitur. Nunc autem, ut statim motus de quo agitur legem generalem modo analytico designemus, ante oculosque ponamus, sufficit ut ϑ et γ variabiles nobis significent; tum etiam inter aequationem nostram et aequationem, quam ex illa differentiando obtinebimus:

$$d\vartheta = nd\gamma$$

n eliminari potest, unde prodit:

$$\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\gamma}\,\gamma.$$

42) Postquam indolem motus aequabilis, qui temporis progressus nobis significat, per purum calculum constituimus, ab observationibus exorituri, clarius hujusce motus leges ante oculos ponere conabimur. Etenim cum in praecedentibus spatium, quod tempus repraesentat, ex multis tamquam spatiis aequalibus et a corporibus, secundum easdem leges motus peractis composuerimus, facile perspicietur, ad motum aequabilem observandum exigi, ut ex arbitrio eundem motum quendam reproducere possimus. Tum scilicet spatii ita peracti pars (quae sat parva substituatur) unitatem temporis nobis significat, quacum spatia respondentia et per observationes determinata, quae alterum corpus motum percurrit, conferri, nec non deinde motus aequationem $s = f(t)$ (40) determinari licebit. Quoniam hic autem locus non est, ut de temporis metiendi methodis disseratur, exemplo tantummodo, ut distinctius, quod statuimus appareat, usuri sumus.

Pluria corpora scilicet, quae sub iisdem conditionibus elabuntur, eodem modo moveri, a priori intelligimus, neque non experientia confirmatum videmus. Nunc vero si exempli gratia pro unitate temporis spatium, quod tale corpus descendens inde ab initio motus usque ad certum limitem (15 pedes si placet) percurrit, constituamus, tum spatia, quae alterum corpus in diversis viae ejus locis percurrit, cum tali unitate comparari possunt. Si spatia aequalia ei respondent, ita scilicet, ut aequationi paragraphi (38)

$$s - s_{,} = T_1(t - t_{,})$$

(T_1 numerum indicante) satisfaciant, corpus aequabiliter moveri concludimus.

Sed antequam pergamus, duo adhuc determinabimus; primo spatium esse viam a puncto mathematico (quod ex arbitrio in corpore, quod movetur, imaginamur) perfectam; deinde in sequentibus casum particularem supponemus, punctum illud rectam describere.

43) Si celeritatem T_1 non esse functionem temporis t velimus, ad aequationem hujusce formae reducemur:

$$s = f(t) = at + b$$

aut si malimus:

$$s - s_{,,} = a(t - t_{,,})$$

si $s_{,,}$ et $t_{,,}$ singulos duos variabilium valores significant. Tum scilicet celeritas in omnibus motus locis eadem censenda est. E contrario autem si T_1 est functio $t_{,,}$ celeritas continue variabit, ita scilicet, ut variatio cele-

ritatis in omni motus puncto quantitati infinite parvae respondeat, quae vero, quae ad certum tempus pertinent, motui mutationem efficacem affert. Ut primo casum simpliciorem in examen vocemus, aequationis nostrae jam saepius adhibitae:

$$s - s_{,} = T_1(t - t_{,}) + T_2(t - t_{,})^2 + T_3(t - t_{,})^3 + \cdots$$

alteram partem non duobus excedere terminis, supponemus, ita ut

$$T_2 = \frac{1}{2.3}\frac{d^2s}{dt^2}(t = t_{,})$$

non simul cum $t_{,}$ mutetur. Tum aequatione hanc in formam:

$$s - s_{,} = (T_1 + T_2[t - t_{,}])(t - t_{,})$$

reducta, in oculos incidit, celeritatem in omni temporis intervallo quantitate huic intervallo proportionali crescere aut diminui, prout T_2 negativum aut positivum sit. Si vero T_2 non functio est $t_{,}$, tum integrando aequationem generalem secundi ordinis obtinebimus, nam ut calculum indicem, passatim habebitur:

$$T_2 = c = \frac{d^2s}{dt^2}\frac{1}{1.2}$$

$$ds = \int d^2s = \begin{cases} 2\int c\,dt^2 \\ (2ct + c')\,dt \end{cases}$$

$$s = \int ds = \begin{cases} \int (2ct + c')\,dt \\ ct^2 + c't + c'' \end{cases}$$

Constantes arbitrariae c', c'', faciles determinatu; nam c'' ab initio, inde a quo spatia metiri exordiamur, dependet; c' autem celeritatem:

$$\frac{ds}{dt}(t = 0)$$

indicat. Si igitur spatia s inde a motus origine metimur, nec non initialem corporis celeritatem aequalem ponimus 0, tum ad aequationem simplicissimam motus accelerati:

$$s = ct^2$$

reducemur.

Sequentibus autem non evanescentibus seriei nostrae terminis: T_3, T_4 etc., nec non (secundum id quod modo exposuimus) termino T_1 suppresso, obtinebitur:

$$s - s_{,} = T_2(t - t_{,})^2 + T_3(t - t_{,})^3 + T_4(t - t_{,})^4 + \cdots$$

unde elicitur:

$$T_2 = \frac{s - s_{,}}{(t - t_{,})^2} - T_3(t - t_{,}) - T_4(t - t_{,})^2 \cdots.$$

Tum T_2 una cum $t_{,}$ mutatur, et solummodo, quae ad limites spectant, constans, et quidem infinite parvum primi ordinis censendum est:

$$T_3 = \lim.\left(\frac{s-s'}{(t-t')^3} - T_3(t-t_1) - T_4(t-t_1)^2 - \dots\right)$$
$$= \lim.\left(\frac{s-s'}{(t-t')^3}\right).$$

Terminus T_2, aut si malimus: $2\,T_2\left(=\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, *vis nominatur.**)

44) Respicientibus nobis in viam, quam paragraphis praecedentibus constituimus, apparet nos, inde ab experientia profectos, motus functionem investigasse; deinde illa functione via analytica explicata, ejus elementa tamquam (si licet talibus verbis uti) celeritatem atque celeritatis continuam mutationem (accelerationem) constituisse. Nunc autem secundum generale principium hisce phaenomenis causas viresve subjici, imo etiam hasce per eosdem terminos analyticos designari licebit. Celeritati nimirum potentia absoluta respondet:

$$\text{pot. abs.} = c = \frac{ds}{dt};$$

accelerationi vis aceleratrix, vis

$$v = \frac{dc}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

(Vulgarem denominationem, quae celeritatem et vim juxtaponit non accuratam esse in oculos incidit.) Quibus physicis causis, quarum veram naturam perspicere nemini fortasse contigit, per calculum circumscriptis certos etiam agendi modos iis attribuere, nec non viam inversam secuturi motum, qui virium conditionibus quibusdam, ita constitutis, conveniat, indagare possumus.

---

*) Cum vires acceleratrices solummodo inter se, nec vero cum potentiis absolutis conferri possint, re ipsa nil interest, utrum per $T_2 = \frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^2s}{dt^2}$, instar plurium scriptorum antiquorum, an per:

$$2\,T_2 = \frac{d^2s}{dt^2}$$

vim designamus, si tantum eundem denotandi modum retinemus, ita scilicet, ut eadem denotatione, cujus ope aequationes constituimus, et in iis, quae per calculum obtinebuntur, interpretandis utamur. Quodsi exempli gratia spatium ($=\gamma$), quod corpus libere descendens in primo secundo percurrit, vim attractionis vocamus, prodit:

$$v(\text{vis}) = \gamma = T_2 = \frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

E contrario autem si spatium aequale $g(=2\gamma)$, quod corpus, nisi porro sollicitaretur, in altero secundo percurreret, sive celeritatem, quam in fine primi secundi acquisivit, gravitatis vim (relatam scilicet ad unitatem temporis) nominamus, tum prodit:

$$v = 2\,T_2 = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

45) Quamquam omnes, quae nobis notae sunt quaestiones mechanicae, non secundum coefficientem differentialem spatii ad tempus relati excedunt, nosmet tamen interrogemus oportet, quidquid seriei nostrae

$$s - s_{,} = T_1(t - t_{,}) + T_2(t - t_{,})^2 + T_3(t - t_{,})^3 + T_4(t - t_{,})^4 + \cdots$$

coefficientes sequentes T_3, T_4 etc. significent. Sed antequam ad legem generalem, quam ab initio constituimus, regredimur, quidquid de tertio coefficiente:

$$T_3 = \frac{d^3 s}{dt^3} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

censendum sit, in particulari casu ficto ante oculos ponemus. Si hunc ad finem corpus descendens consideramus, tum, nec mutatae corporis distantiae a virium trahentium centro, nec medii obstantis ratione habita, obtinebitur:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \text{const.} = g.$$

Secundum leges attractionis universalis quantitas (g) a massa stellae, ubi corpus delabi imaginamur, dependet, in sole ex. c. corpus grave rapidius quam in terra descendit. Praeterea vim attractionis eadem ratione, qua massa corporum trahentium augeri constituamus. Quibus praemissis, stellae massam, quam huc usque constantem consideravimus, continue mutari supponamus; tum scilicet, si per M primitivam massam, per μ ejus accrementa, per g' novas hisce convenientes vires acceleratrices designamus, habebitur:

$$g : g' = M : M + \mu,$$

unde derivabimus:

$$\left.\begin{matrix} g' \\ \frac{d^2 s}{dt^2} \end{matrix}\right\} = g\left(\frac{M + \mu}{M}\right) = g\left(1 + \frac{\mu}{M}\right).$$

Terminus (μ) quodammodo a tempore dependet, ut autem simplicissimum casum exponamus, sint massae accrementa ut tempora, quae iis conveniunt, sit:

$$t : t_{,} = \mu : \mu_{,}$$

unde si $t_{,}$ temporis unitatem, cui $\mu_{,}$ respondet, significat, generaliter valor variabilis (μ) ita:

$$\mu = t\mu_{,}$$

elicitur. Habemus ideo:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g\left(1 + \frac{\mu_{,}}{M} t\right)$$

et denique:

$$\frac{d^3 s}{dt^3} = g \frac{\mu_{,}}{M} = \text{const.}$$

Cum g sit numerus constans, tertius coefficiens differentialis quoto massarum duarum aequipollere censendus est.

46) Si viam inversam secuturi coefficientem $\frac{d^3s}{dt^3}$ esse constantem:

$$\frac{d^3s}{dt^3} = c$$

jubemus, integrando prodit:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = ct + c'.$$

Quod ad casum particularem, ut c' evanescat, pertinet, sit:

$$\frac{d^2s}{dt^2}(t = 0) = 0$$

oportet. (Cui conditioni satisfaciemus, si stellam punctum attrahentem ex nihilo exoriri imaginamur.) Tum habemus:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = ct.$$

Hac via progressuri, ad motus aequationem tertii ordinis perveniremus. Sed hactenus.

47) Intelligitur praeterea, nos, nisi massae accrementa ut tempora sunt, aut aliis verbis si μ, functio temporis est, ad quartum coefficientem

$$T_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4s}{dt^4}$$

reduci. Tum enim, quinto sequentibusque terminis T_5, T_6 etc. evanescentibus, aequationes hujusce formae obtinebuntur:

$$\frac{d^3s}{dt^3} = g\frac{\mu_\prime}{M}\left(1 + \frac{\nu_\prime}{N}t\right)$$

$$= gm\left(1 + \frac{\nu_\prime}{N}t\right)$$

$$\frac{d^4s}{dt^4} = gm\frac{\nu_\prime}{N} = gmn = \text{const.}$$

si variatio massarum (tempori proportionalis) a causa quadam N dependet, nec non ($\nu_\prime$) ipsius causae in temporis unitate mutationem significat (g, m, n sint numeri abstracti).

48) Respicientibus nobis denique ad ea, quae in exemplo exposuimus, legem generalem paragraphi (7) confirmare licet. Re vera enim termini T_1, T_2, T_3, T_4 etc., aut si malimus $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{d^3s}{dt^3}$, $\frac{d^4s}{dt^4}$ etc. diversos virium ordines indicant. Si mutationes, quas novus omnis horum terminorum praecedenti affert, ad tempus $= 0$ referuntur, infinite parvae censendae sunt. Si vero, ut, quae ad duos priores spectant, fieri solet, pro tempore $= 1$ constituuntur, quantitates finitae sunt, quae a motus aequatione dependent.

49) Sed lege generali intellecta, non longius in coefficientibus superioribus determinandis, demonstrationem extendemus. Accedit adhuc, quod problemata et geometrica et mechanica, quae nobis occurrunt, theoriae generali, quae eo nititur, ut aequationes pro potestatibus variabilis in classes distribuantur, non sufficienter sese accommodent; ita ut ad ea, quae Monge primo pronuntiavit, nec non quae deinde celeberrimi alii geometrae approbaverunt, reduci videamur: quod scilicet, cum difficultas aequationum solvendarum non solum a gradu earum dependeat, de alia earum in ordines reducendarum ratione multa exspectanda sint.

(Parisiis mense Majo MDCCCXXIII.)

2.

Théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques.[1])

(Gergonne's Annales de Mathématiques, Band 17, S. 37—59. 1826.)

On sait que, pour déterminer une conique sur un plan, il faut cinq conditions distinctes, et déjà M. Brianchon a traité tous les cas où ces conditions sont de passer par des points ou de toucher des droites données.*)

Mais on peut aussi exiger d'une conique cherchée quelle ait avec une conique déjà tracée un ou plusieurs contacts d'ordre plus ou moins élevés et compléter ensuite les conditions du problème, en observant qu'un contact simple, en un point donné, équivaut à deux conditions, qu'un contact du second ordre, en ce même point, équivaut à trois conditions, et en observant aussi que deux coniques tracées sur un même plan ne peuvent avoir au plus entre elles que deux contacts simples ou un contact unique du troisième ordre.

Ces considérations donnent naissance à une série de problèmes curieux qui ont fait le sujet des recherches de M. Poncelet, dans son „*Traité des propriétés projectives des figures.*“[1]) Ce que nous nous proposons ici est de considérer quelques cas de cette théorie qui reposent sur des considérations fort simples et conduisent à des constructions qui ne le sont pas moins. Elles ont l'avantage de se déduire toutes de deux lemmes fondamentaux qui en sont comme l'expression générale, et que nous allons d'abord établir.

Le sujet de ce mémoire étant éminemment du nombre de ceux où les propositions se correspondent deux à deux; afin de rendre cette correspondance plus apparente, nous lui donnerons la forme déjà adoptée en divers endroits du présent recueil.[1])

---

*) Mémoire sur les lignes du second ordre (in 8°., Paris, Bachelier, 1817).

Soient A, B, C, F les quatre points communs à deux coniques tracées sur un même plan. Par les deux derniers C, F soient menées arbitrairement des sécantes aux deux courbes, coupant respectivement la première en D et E, et la seconde en D' et E'; les hexagones $ABCDEF$ et $ABCD'E'F$ seront respectivement inscrits à ces courbes. Soient donc G le point de concours de DD' et AF, et soit H celui de EE' et BC; par le théorème de Pascal le point de concours de AB soit avec DE soit avec $D'E'$ devra être en ligne droite avec les deux points G et H; ce qui revient à dire que les trois droites AB, DE, $D'E'$ doivent concourir en un même point K; on a donc le *lemme* que voici:

*Lemme I. Deux coniques étant circonscrites à un même quadrilatère; si, par les deux extrémités d'un même côté de ce quadrilatère, on mène aux deux courbes des sécantes arbitraires; les cordes menées à ces courbes, par les points où elles seront respectivement coupées par ces sécantes, iront concourir toutes deux sur la direction du côté opposé du quadrilatère.**)

Lorsque deux coniques circonscrites à un même triangle ont à

Soient A, B, C, F les quatre tangentes communes à deux coniques tracées sur un même plan. Sur les deux dernières C, F soient pris arbitrairement des points par lesquels soient menées deux tangentes D et E à la première courbe et deux tangentes D' et E' à la seconde; les hexagones $ABCDEF$ et $ABCD'E'F$ seront respectivement circonscrits à ces courbes. Soient donc G la droite qui joint le point DD' au point AF, et soit H celle qui joint le point EE' au point BC; par le théorème de M. Brianchon, la droite qui joint le point AB soit avec le point DE, soit avec le point $D'E'$ devra passer par le point de concours de G et H; ce qui revient à dire que les trois points AB, DE, $D'E'$ devront appartenir à une même droite K; on a donc le *lemme* que voici:

*Lemme I. Deux coniques étant inscrites à un même quadrilatère; si, sur les deux côtés d'un même sommet de ce quadrilatère, on prend arbitrairement deux points par chacun desquels on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des tangentes respectives à ces deux courbes seront en ligne droite avec le sommet opposé du quadrilatère.**)

Lorsque deux coniques inscrites à un même triangle touchent l'un

*) On doit remarquer qu'il ne s'agit pas seulement ici de quadrilatères convexes, mais encore de quadrilatères dans lesquels deux côtés opposés se couperaient entre les deux autres.

l'un de ses sommets une tangente commune, et ont conséquemment un contact simple en ce point; rien n'empêche de les considérer comme circonscrites à un même quadrilatère, dont un côté, d'une longueur nulle, est dirigé suivant la tangente commune; notre *lemme* est donc encore applicable à ce cas; et, en l'appliquant tour-à-tour aux différents côtés du quadrilatère devenu triangle, on obtient les théorèmes suivants:

Théorème I. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par ce sommet, on mène deux sécantes arbitraires à ces courbes et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde par les points où elle est coupée par ces deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la direction du côté opposé du triangle.

Théorème II. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par chaque extrémité du côté opposé, on mène une sécante arbitraire aux deux courbes, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente au sommet opposé.

*Théorème III. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune; si, par chacune de ses côtés au même point, et ont conséquemment un contact simple en ce point; rien n'empêche de les considérer comme inscrites à un même quadrilatère, dont un angle, égal à deux droites, a ses deux côtés dirigés suivant la tangente commune; notre *lemme* est donc encore applicable à ce cas; et, en l'appliquant tour-à-tour aux différents côtés du quadrilatère devenu triangle, on obtient les théorèmes suivants:*

Théorème I. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur ce côté, on prend arbitrairement deux points, et que par ces points on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le sommet opposé du triangle.

Théorème II. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur chacun des deux autres côtés, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec celui où elles touchent le troisième côté du triangle.

Théorème III. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur chacun des deux côtés

des extrémités de l'un des côtés adjacents à ce sommet, on mène une sécante arbitraire aux deux courbes, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points, où la coupent les deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur l'autre côté adjacent à cet angle.

Ces théorèmes donnent la solution du problème suivant:

Problème I. Une conique étant donnée et trois points étant donnés sur son périmètre, déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première en l'un des points donnés, la coupe aux deux autres et passe en outre par un quatrième point quelconque donné sur son plan.

Solution. Soient A, B, C les trois points donnés sur le périmètre de la première courbe, et soit P un autre point quelconque de son plan; tout se réduit à trouver un quelconque des points d'une autre conique qui touche la première en C, la coupe en A et B et passe en outre par le point P.

Pour cela soit menée la tangente en C à la courbe donnée. Soient menées à cette courbe, par le point C, deux sécantes, l'une CP et l'autre arbitraire. Soient respectivement D et E les points où cette courbe est coupée de

de l'un des sommets adjacents, on prend arbitrairement un point, et que par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec l'autre sommet adjacent au même triangle.

Ces théorèmes donnent la solution du problème suivant:

Problème I. Une conique étant donnée et trois tangentes à cette courbe étant aussi données, déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec l'une des tangentes données, touche les deux autres tangentes données et touche en outre une quatrième droite quelconque donnée sur son plan.

Solution. Soient A, B, C les trois tangentes données à la première courbe, et soit P une autre droite quelconque, donnée sur son plan; tout se réduit à trouver une quelconque des tangentes à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec C, touche les tangentes A et B et touche en outre la droite P.

Pour cela soit déterminé le point de contact de C avec la première courbe. Soient pris sur C deux points, l'un à son intersection avec P et l'autre arbitraire. Par ces deux points soient menées respectivement des tangentes D et E

nouveau par ces sécantes. Soit F le point où la droite AB^2) est coupée par la droite DE, et soit menée FP; cette droite coupera la sécante CE en un point Q qui appartiendra *(théorème I)* à la courbe cherchée.

Autre solution. Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, la première AP et l'autre arbitraire. Soient respectivement D et E les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit F le point où la tangente en C est coupée par la droite DE, et soit menée FP; cette droite coupera la sécante BE en un point Q qui appartiendra *(théorème II)* à la courbe cherchée.

Troisième solution. Par les points A et C, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, la première AP et l'autre arbitraire. Soient D et F les points où cette courbe est coupée de nouveau par ces sécantes. Soit E l'intersection de DF et de BC. En menant PE, cette droite coupera CF *(théorème III)* en un nouveau point R de la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur les deux autres l'avantage qu'elle n'exige pas que l'on mène la tangente par le point C.²)

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème I diminue jusqu'à devenir nul, à la conique donnée. Soit joint le point DE au point AB^2) par une droite F. Par le point FP et le point CE soit menée une droite Q; cette droite sera *(théorème I)* une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Sur les tangentes A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Par ces deux points soient menées respectivement à la courbe donnée deux tangentes D et E. Soit F la droite qui joint le point de contact de C avec le point DE et soit joint FP au point BE par une droite Q; cette droite sera *(théorème II)* une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Troisième solution. Sur les tangentes A et C, soient pris deux points, le premier AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées à la courbe donnée les tangentes D et F. Soit E la droite qui joint le point DF au point BC. En joignant le point PE au point CF par une droite R, cette droite sera *(théorème III)* une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur les deux autres l'avantage qu'elle n'exige pas que l'on détermine le point de contact de la tangente C.²)

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème I diminue jusqu'à devenir

les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème IV. Deux coniques étant circonscrites à un même triangle et ayant à l'un de ses sommets une tangente commune, si, par ce sommet, on mène une sécante arbitraire à ces courbes, puis des tangentes par les points où cette sécante les coupe; ces deux tangentes iront concourir sur la direction du côté opposé du triangle.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème II. Une conique étant donnée, et trois points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première en l'un des points donnés, la coupe aux deux autres et touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan.

Solution. Soient toujours A, B, C les trois points donnés, sur le périmètre de la première courbe; C étant encore celui d'entre eux, où elle doit être touchée par la seconde.

Soit F le point où AB est coupée par la droite donnée. Par ce point F, soit menée une tangente à la courbe donnée, et soit T son point de contact avec elle. En menant CT, coupant en P la nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème IV. Deux coniques étant inscrites à un même triangle et touchant un de ses côtés au même point; si, sur ce côté, on prend arbitrairement un point et que de ce point on mène des tangentes aux deux courbes; leurs points de contact seront en ligne droite avec le sommet opposé du triangle.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème II. Une conique étant donnée, et trois tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à son point de contact avec l'une des tangentes données, touche les deux autres tangentes données et passe en outre par un point quelconque, donné sur le plan de la courbe.

Solution. Soient toujours A, B, C les trois tangentes données à la première courbe; C étant encore celle, dont le point de contact doit lui être commun avec la seconde.

Soit F la droite qui joint le point AB au point donné. Par un des points où cette droite F coupe la courbe donnée, soit menée une tangente T à cette courbe. En joignant le point CT au point

droite donnée, ce point P sera *(Théorème IV)* son point de contact avec la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au précédent.

Remarque. Comme par le point F, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on aura deux points de contact T, et par suite deux droites CT et deux points P. Le problème a donc deux solutions.

Lorsque deux coniques n'ont qu'une seule corde commune et se touchent aux deux extrémités de cette corde, la corde commune peut être considérée comme deux côtés opposés et égaux d'un quadrilatère inscrit, dont les deux autres côtés opposés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant les tangentes aux deux extrémités de cette corde; notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et applicable aux divers côtés du quadrilatère; et il en résulte alors les théorèmes suivants:

Théorème V. Deux coniques ayant une corde commune unique et se touchant aux deux extrémités de cette corde; si, par l'une des extrémités de la corde commune, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on mène ensuite une corde à chacune des courbes, par les points où elle est coupée par ces deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente à l'autre extrémité de la corde commune.

donné par une droite P, cette droite P sera *(Théorème IV)* une tangente à la courbe cherchée par le point donné; de sorte que le problème se trouvera ramené au précédent.

Remarque. Comme la droite F coupe la courbe donnée en deux points, on aura deux tangentes T, et par suite deux points CT et deux droites P. Le problème a donc deux solutions.

Lorsque deux coniques n'ont qu'un seul angle qui puisse leur être circonscrit et touchent l'un et l'autre côtés de cet angle au même point, l'angle circonscrit peut être considéré comme un quadrilatère circonscrit, dont deux sommets opposés se confondent, et dont les deux autres sommets sont situés aux points où les deux courbes touchent les deux côtés de cet angle; notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et applicable aux divers sommets du quadrilatère; et il en résulte alors les théorèmes suivants:

Théorème V. Deux coniques étant inscrites à un même angle et touchant en un même point chacun des deux côtés de cet angle; si, sur l'un des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement deux points, et que, par chacun d'eux, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes seront en ligne droite avec le point où les courbes touchent l'autre côté de l'angle circonscrit.

Théorème VI. Deux coniques ayant une corde commune unique et se touchant aux deux extrémités de cette corde; si, par chacune des extrémités de la corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes; les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la corde commune elle même.

On pourra, d'après cela, résoudre e problème suivant:

Problème III. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première aux deux points donnés, et passe en outre par un troisième point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soient A, B les deux points donnés sur le périmètre de la première courbe, et soit P un autre point quelconque de son plan. Tout se réduit à trouver un quelconque des points d'une autre conique qui touche la première aux points A et B, et qui passe en outre par le point P.

Pour cela, soit menée la tangente en B à la courbe donnée. Soient menées à cette courbe, par le point A, deux séçantes, l'une AP, et l'autre arbitraire, coupant de nouveau la courbe en D et E.

Théorème VI. Deux coniques étant inscrites à un même angle et touchant en un même point chacun des deux côtés de cet angle; si, sur chacun des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes seront en ligne droite avec le sommet même de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème III. Une conique étant donnée, et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première en ses points de contact avec les deux tangentes données, et touche en outre une troisième droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soient A, B les deux tangentes données à la première courbe, et soit P une autre droite quelconque, donnée sur son plan. Tout se réduit à trouver une quelconque des tangentes à une autre conique touchant la première aux points de contact avec les tangentes A et B et touchant en outre la droite P.

Pour cela, soit déterminé le point de contact de B avec la courbe donnée. Soient pris, sur la tangente A, deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées à cette courbe

Soit C le point où la corde DE coupe la tangente en B; en menant CP, cette droite coupera la sécante AE en un point Q qui appartiendra *(Théorème V)* à la courbe cherchée.

Autre solution. Par les points A et B soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau cette courbe en D et E. Soit C le point de concours de DE et AB; la droite CP coupera la sécante BE en un point Q qui appartiendra *(Théorème VI)* à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on mène la tangente par le point B.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème V diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème VII. Deux coniques ayant une corde commune unique, et se touchant aux deux extrémités de cette corde; si, par l'une des extrémités de la corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune de ces courbes une tangente, par le point où elle est coupée par cette sécante; les deux tangentes ainsi menées iront concourir sur la tangente à l'autre extrémité de la corde commune.

deux tangentes D et E. Soit C la droite qui joint le point DE au point de contact de B; en joignant les points CP et AE par une droite Q, cette droite sera *(Théorème V)* une tangente à la courbe cherchée.

Autre solution. Sur les droites A et B soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées des tangentes D et E à la courbe donnée. Soit C la droite qui joint le point DE au point AB; si l'on joint le point CP au point BE par une droite Q; cette droite sera *(Théorème VI)* une tangente à la courbe cherchée.

Remarque. Cette dernière solution a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on détermine le point de contact de la tangente B.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème V diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème VII. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et touchant en un même point les deux côtés de cet angle; si, sur l'un des côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point duquel on mène des tangentes aux deux courbes; les points de contact de ces tangentes seront en ligne droite avec le point où ces courbes touchent l'autre côté de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème IV. Une conique étant donnée et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui touche la première aux deux points donnés, et touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soient toujours A et B les deux points donnés, sur le périmètre de la première courbe, et soit C le point où la tangente en B est coupée par la droite donnée. Par ce point, soit mené à la courbe donnée une tangente dont D soit le point de contact. Soit menée AD, coupant en P la droite donnée; ce point P sera *(Théorème VII)* le point de contact de la courbe cherchée avec cette droite; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème III.

Lorsque deux coniques qui n'ont qu'une seule corde commune ont, à l'une des extrémités de cette corde, un contact du second ordre, elles doivent inévitablement se couper à son autre extrémité. Elles peuvent alors être considérées comme circonscrites à un même quadrilatère dont deux côtés consécutifs, d'une égale longueur, se confondent dans la corde commune, tandis que les deux autres, d'une longueur nulle et formant entre eux un angle égal à deux droites, se con-

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème IV. Une conique étant donnée et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui touche la première à ses points de contact avec les tangentes données, et passe en outre par un point quelconque donné sur son plan?

Solution. Soient toujours A et B les deux tangentes données, à la première courbe, et soit C la droite qui joint le point donné au point de contact de B. Par le point où cette droite coupe la courbe donnée, soit menée une tangente D à cette courbe. Soit joint le point AD au point donné, par une droite P; cette droite P sera *(Théorème VII)* une tangente à la courbe cherchée en ce point, de sorte que le problème se trouvera ramené au problème III.

Lorsque deux coniques qui ne peuvent être inscrites qu'à un même angle ont, en un même point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, elles doivent inévitablement toucher l'autre côté de cet angle en deux points distincts. Elles peuvent alors être considérées comme inscrites à un même quadrilatère dont deux angles consécutifs, de même grandeur, se confondent dans l'angle circonscrit, tandis que les deux autres d'une grandeur nulle, ont leurs sommets

fondent avec le point de contact, et ont pour direction commune la tangente aux deux courbes en ce point. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai et indistinctement applicable aux divers côtés du quadrilatère; et il en résulte alors les théorèmes suivants:

Théorème VIII. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on mène ensuite une corde à chacune des courbes, par les points où elle est coupée par ces deux sécantes; les deux cordes ainsi menées concourront sur la corde commune.

Théorème IX. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité, si, par chacune des extrémités de cette corde commune, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite à chacune d'elles une corde, par les points où la coupent les deux sécantes, les deux cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente commune aux deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème V. Une conique étant donnée, et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en

au point de contact des deux courbes. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et indistinctement applicable aux divers sommets du quadrilatère, et il en résulte les théorèmes suivants:

Théorème VIII. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts; si, par deux points pris arbitrairement sur le premier de ces côtés, on mène des tangentes aux deux courbes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le sommet de l'angle circonscrit.

Théorème IX. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts, si, sur chacun des deux côtés de l'angle circonscrit, on prend arbitrairement un point, et que, par chacun des deux points ainsi choisis, on mène des tangentes aux deux courbes, les deux points de concours des couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec le point de contact de ces mêmes courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème V. Une conique étant donnée et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déter-

n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique, qui ait avec la première, en l'un des points donnés, un contact du second ordre, qui la coupe à l'autre point donné, et passe en outre par un troisième point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit A le point où les deux courbes doivent avoir entre elles un contact du second ordre, et soit B le point où elles doivent se couper; soit de plus P un point du plan de la courbe donnée, par lequel doit passer la courbe cherchée.

Par le point A soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les points où ces deux sécantes rencontrent de nouveau cette courbe. Soit C le point où DE coupe AB; en menant PC, cette droite rencontrera AE en un point Q appartenant à la courbe cherchée.*)

Autre solution. Soit toujours A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B le point où ces deux courbes doivent se couper. Soit enfin P un point par lequel doit passer la courbe cherchée.

miner, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique, qui ait un contact du second ordre avec la première au point où elle est touchée par une des tangentes données, qui touche aussi l'autre tangente donnée, et touche en outre une troisième droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit A la tangente au point de contact de laquelle les deux courbes doivent avoir entre elles un contact du second ordre, et B la droite qu'elles doivent toucher en deux points distincts. Soit de plus P une droite donnée, à laquelle la courbe cherchée doit être tangente.

Sur la droite A soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les tangentes menées à la courbe par ces deux points. Soit enfin C la droite qui joint entre eux les points DE et AB; en menant du point PC au point AE une droite Q, cette droite sera une nouvelle tangente à la courbe cherchée.*)

Autre solution. Soit toujours A la tangente à la courbe donnée au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B celle que les deux courbes doivent toucher en des points distincts. Soit enfin P l'autre droite que doit toucher aussi la courbe cherchée.

*) Cette construction a été indiquée, sans démonstration, par M. Poncelet (Annales de Mathématiques, tom. VIII, pag. 153).

Par les points A et B, soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire, coupant de nouveau la courbe donnée en D et E. Soit menée DE coupant en C la tangente en A. Soit enfin menée CP coupant en Q la sécante BE; alors le point Q sera *(Théorème IX)* un nouveau point de la courbe demandée.

Remarque. La première de ces deux solutions a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on trace la tangente en A.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème VIII diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème X. Deux coniques ayant une corde commune unique et un contact du second ordre à l'une des extrémités de cette corde, de manière à se couper à son autre extrémité; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène une sécante arbitraire, et qu'on mène ensuite une tangente à chacune des deux courbes, par le point où elle est coupée par cette sécante; les deux tangentes ainsi menées iront concourir sur la corde commune.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème VI. Une conique étant donnée et deux points étant donnés sur son périmètre; déterminer, en

Sur les droites A et B, soient pris deux points, l'un AP et l'autre arbitraire, par lesquels soient menées les tangentes D et E à la courbe donnée. Soit joint le point DE au point de contact de A par une droite C. Soit enfin joint le point CP au point BE par une droite Q; cette droite Q sera *(Théorème IX)* une nouvelle tangente à la courbe demandée.

Remarque. La première de ces deux solutions a sur l'autre l'avantage de ne point exiger que l'on détermine le point de contact de la tangente A.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème VIII diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème X. Deux coniques étant inscrites à un même angle, et ayant, en un point de l'un des côtés de cet angle, un contact du second ordre, de manière à toucher l'autre côté de l'angle en deux points distincts; si, d'un point pris arbitrairement sur le premier de ces côtés, on mène des tangentes aux deux courbes, les points de contact de ces tangentes seront en ligne droite avec le sommet de l'angle circonscrit.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème VI. Une conique étant donnée et deux tangentes à cette courbe étant aussi données; déter-

n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique, qui ait avec la première, en l'un des points donnés, un contact du second ordre, qui la coupe à l'autre point donné, et qui touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit toujours A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B le point où ces deux courbes doivent se couper; soit enfin C le point où la droite donnée coupe la corde commune AB. Soit menée, par ce point C, une tangente à la courbe donnée, et soit D son point de contact; en menant AD, cette droite coupera la droite donnée en un point P, qui sera *(Théorème X)* son point de contact avec la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème V.

Remarque. Comme, par le point C, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on pourra avoir deux points de contact D, et par suite deux droites AD et deux points P; de manière que le problème a deux solutions.

Lorsque deux coniques ont en un point commun un contact du troisième ordre, elles ne sauraient avoir alors aucun autre point commun, ni conséquemment aucune corde inscrite commune. On peut,

miner, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique, qui ait avec la première, au point où elle est touchée par une des tangentes données, un contact du second ordre, qui touche aussi l'autre tangente donnée, et passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit toujours A la tangente à la courbe donnée au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du second ordre, et soit B celle que les deux courbes doivent toucher en deux points distincts; soit enfin C la droite qui joint le sommet de l'angle circonscrit au point donné. Par le point où cette droite coupe la courbe donnée, soit menée une tangente D à cette courbe; en joignant le point AD au point donné, par une droite P, cette droite sera *(Théorème X)* une tangente menée par ce point à la courbe cherchée; de sorte que le problème se trouvera ramené au problème V.

Remarque. Comme la droite C coupe la courbe donnée en deux points, on pourra avoir deux tangentes D, et par suite deux points AD et deux droites P; de manière que le problème a deux solutions.

Lorsque deux coniques touchent une même droite en un même point, et ont en ce point un contact du troisième ordre, elles ne sauraient alors avoir aucune autre tangente commune, ni conséquem-

dans ce cas, les considérer comme étant toutes deux circonscrites à un même quadrilatère dont les côtés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant la tangente commune, et dont les sommets se confondent tous quatre avec le point de contact. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et il en résulte le théorème suivant:

Théorème XI. Deux coniques n'ayant qu'un seul point commun, et ayant conséquemment, en ce point, un contact du troisième ordre; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène deux sécantes arbitraires, et qu'on joigne ensuite par des cordes les points où ces sécantes coupent les deux courbes; les cordes ainsi menées iront concourir sur la tangente commune.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème VII. Une conique étant donnée et un point étant donné sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui, ayant avec la première, au point donné, un contact du troisième ordre, passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre,

ment aucun angle circonscrit commun. On peut, dans ce cas, les considérer comme étant toutes deux inscrites à un même quadrilatère dont les angles, d'une grandeur nulle, ont tous leurs sommets au point de contact, et dont les côtés sont tous quatre dirigés suivant la tangente commune. Notre *Lemme* ne cesse pas pour cela d'être vrai, et il en résulte le théorème suivant:

Théorème XI. Deux coniques n'ayant qu'une seule tangente commune, et ayant conséquemment entre elles, sur cette tangente, un contact du troisième ordre; si, sur la tangente commune aux deux courbes, on prend arbitrairement deux points par lesquels on leur mène des tangentes; les points de concours des deux couples de tangentes à ces courbes seront en ligne droite avec leur point de contact.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème VII. Une conique étant donnée, et une tangente à cette courbe étant aussi donnée; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui, ayant avec la première, en son point de contact avec la tangente donnée, un contact du troisième ordre, touche en outre une droite quelconque donnée sur son plan?

Solution. Soit A la tangente donnée à la première courbe et au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec

et soit P le point donné, sur le plan de cette courbe.

Par le point A soient menées à la courbe donnée deux sécantes, l'une AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les points où ces deux sécantes coupent cette courbe, et soit menée DE, coupant en C la tangente en A. Soit enfin menée CP, coupant en Q la sécante arbitraire AE; le point Q sera *(Théorème XI)* un nouveau point de la courbe cherchée.

Si l'on conçoit que l'angle arbitraire des deux sécantes du théorème XI diminue jusqu'à devenir nul, les deux cordes deviendront des tangentes; et il en résultera le théorème suivant:

Théorème XII. Deux coniques n'ayant qu'un seul point commun, et ayant conséquemment, en ce point, un contact du troisième ordre; si, par le point de contact des deux courbes, on leur mène une sécante arbitraire et ensuite des tangentes, par les deux points où cette sécante les coupe; ces deux tangentes iront concourir sur la tangente commune aux deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème VIII. Une conique étant donnée, et un point étant donné sur son périmètre; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de points qu'on voudra d'une autre conique qui, ayant avec la première, au point donné, un contact du troi-

celle-là un contact du troisième ordre, et soit P la droite donnée, sur le plan de cette courbe.

Soient pris sur la droite A deux points, l'un AP et l'autre arbitraire. Soient D et E les tangentes menées à la courbe donnée, par ces deux points. Soit C la droite qui joint le point de contact de A au point DE. Soit joint enfin le point CP au point AE, par une droite Q; cette droite Q sera *(Théorème XI)* une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Si l'on conçoit que la distance arbitraire entre les deux points du théorème XI diminue jusqu'à devenir nulle, les points de concours des tangentes deviendront des points de contact, et il en résultera le théorème suivant:

Théorème XII. Deux coniques n'ayant qu'une seule tangente commune, et ayant conséquemment entre elles, sur cette tangente, un contact du troisième ordre; si, par un point pris arbitrairement sur la tangente commune, on leur mène des tangentes; les points de contact de ces deux tangentes se trouveront en ligne droite avec le point de contact des deux courbes.

On pourra, d'après cela, résoudre le problème suivant:

Problème VIII. Une conique étant donnée, et une tangente à cette courbe étant aussi donnée; déterminer, en n'employant que la règle seulement, tant de tangentes qu'on voudra à une autre conique qui, ayant avec la première, en son point de contact

sième ordre, touche en outre une droite quelconque, donnée sur son plan?

Solution. Soit A le point du périmètre de la courbe donnée où la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre. Soit en outre C le point où la tangente en A est coupée par la droite donnée. Par ce point C, soit menée à la courbe donnée une tangente dont D soit le point de contact, alors le point P, où la droite donnée sera coupée par AD, sera *(Théorème XII)* le point de contact de cette droite donnée avec la courbe cherchée; ce qui ramènera le problème au problème VII.

avec la tangente donnée, un contact du troisième ordre, passe en outre par un point quelconque, donné sur son plan?

Solution. Soit A la tangente donnée à la courbe donnée, au point de contact de laquelle la courbe cherchée doit avoir avec elle un contact du troisième ordre. Soit en outre C la droite qui joint le point de contact de A au point donné. Par le point où cette droite C coupe la courbe donnée, soit menée à cette courbe une tangente D; joignant alors, par une droite P, le point donné au point AD, cette droite sera *(Théorème XII)* la tangente, en ce point donné, à la courbe cherchée; ce qui ramènera le problème au problème VII.

Rien n'empêcherait, dans tout ce qui précède, de supposer que l'une des deux coniques dont il s'agit est le système de deux droites, du moins lorsqu'il n'est question que d'intersections et de contacts simples; mais on ne ferait que retomber ainsi sur les propriétés connues des hexagones inscrits et circonscrits, et sur les conséquences également connues qui en dérivent.

On doit remarquer aussi que tous nos théorèmes et problèmes peuvent être, sans restriction, transportés à la sphère, pourvu qu'on y remplace les droites par des arcs de grands cercles, et les coniques planes par ce que M. Magnus a appelé *coniques sphériques*, dans le mémoire de la page 33 du précédent volume.

3.

Recherche graphique du cercle osculateur, pour les lignes du second ordre.

(Gergonne's Annales de Mathématiques, Band 17, S. 69—72. 1826.)

Soit rapportée une ligne du second ordre à l'un quelconque de ses points, pris pour origine des coordonnées, et à sa tangente en ce point prise pour axe des y, l'axe des x étant dirigé suivant la normale; l'équation de la courbe sera de la forme

$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cx = 0 \qquad (1)$$

où a, b, c seront des quantités déterminées. Il faut en effet, d'après la situation donnée de la courbe qu'en posant $x = 0$, on ait deux valeurs nulles pour y.

Toutes les autres lignes du second ordre touchant celle-là à l'origine seront comprises dans l'équation générale

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cx = 0, \qquad (2)$$

où A, B, C seront des quantités indéterminées.

Deux lignes du second ordre pouvant, en général, se couper en quatre points, et un point de contact étant la réunion en un seul de deux points d'intersection; il s'ensuit que les courbes (1) et (2), outre leur point commun à l'origine, doivent en avoir encore deux autres, réels ou imaginaires. Cherchons l'équation de la droite qui joint ces deux derniers.

Il est connu que, si l'on combine ensemble, d'une manière quelconque, les équations de deux lieux géométriques, l'équation résultante sera celle d'un troisième lieu géométrique, contenant les points communs aux deux premiers; donc, en particulier, la différence des équations (1) et (2) appartient à un lieu géométrique qui contient le point de contact qu'ont les deux courbes à l'origine et les deux autres points où elles se coupent; or, cette différence est

$$x\{2(A - a)y + (B - b)x + 2(C - c)\} = 0,$$

qui exprime le système de deux droites, dont l'une est l'axe des y qui contient uniquement le point de contact, donc l'autre

$$2(A-a)y+(B-b)x+2(C-c)=0 \qquad (3)$$

est la droite qui joint les deux points d'intersection des deux courbes. Si ces points d'intersection sont imaginaires, la droite (3) deviendra ce que M. Poncelet a appelé *corde idéale*, mais on pourra toujours la construire.

Si l'on profite de l'indétermination des constantes A, B, C, pour faire en sorte que la droite (3) passe par l'origine, ce qui se réduit à poser $C=c$, l'un des deux points d'intersection viendra se joindre au point de contact; de sorte que les deux courbes auront alors, à l'origine, un contact du second ordre. Ainsi, toutes les courbes comprises dans l'équation générale

$$y^2+2Axy+Bx^2+2cx=0, \qquad (4)$$

dans laquelle A et B sont indéterminés, ont à l'origine, avec la courbe (1), un contact du second ordre. Les deux courbes ont en outre une intersection qui, dans ce cas, est nécessairement réelle.

Si l'on profitait de l'indétermination des constantes A, B, C, pour faire coïncider la droite (3) avec l'axe des y, ce qui se réduirait à poser, à la fois, $A=a$ et $C=c$, les points d'intersection se confondraient alors tous deux avec l'origine; de sorte que les deux courbes auraient en ce point un contact du troisième ordre. L'équation

$$y^2+2axy+Bx^2+2cx=0, \qquad (5)$$

où B est indéterminé, est donc l'équation commune à toutes les lignes du second ordre qui ont avec la courbe (1), à l'origine, un contact du troisième ordre. Dans ce cas les deux courbes ne peuvent plus se couper autre part.

Quelles que soient la nature de la courbe (1) et sa situation par rapport aux axes, la courbe (4) peut fort bien devenir un cercle, puisqu'il ne s'agit pour cela que de supposer à la fois $A=0$ et $B=1$. Ainsi, *il y a, pour chaque point d'une ligne du second ordre, un cercle qui a avec la courbe, en ce point, un contact du second ordre.* C'est ce cercle, qu'on appelle *le cercle osculateur* de la courbe; il la coupe, en outre, en un autre point.

Mais l'équation (5) ne saurait devenir celle d'un cercle, qu'autant qu'on aurait déjà, dans l'équation (1), $a=0$; c'est-à-dire, qu'autant que l'origine des coordonnées serait un des sommets de la courbe; c'est-à-dire, *qu'un cercle ne saurait avoir avec une ligne du second ordre, en l'un de ses points, un contact du troisième ordre, qu'autant que ce point est un des sommets de la courbe.*

La courbe (2) variant sans cesse, la corde commune (3) avec la courbe (1) demeurera constamment parallèle à elle-même, si le rapport $\frac{B-b}{A-a}$ demeure constant. Or, c'est ce qui arrivera, en particulier, si, A et B demeurant constants, on fait seulement varier C, dans l'équation (2); et cela, quelles que soient d'ailleurs les valeurs constantes de A et B; donc, il en sera ainsi, en particulier, lorsqu'on aura $A = 0$ et $B = 1$, c'est-à-dire, lorsque l'équation (2) exprimera un cercle; ainsi, *tant de cercles qu'on voudra, tangents en un même point à une ligne du second ordre, la coupent de manière que les cordes qui joignent les points d'intersection sont toutes parallèles.* Celui de ces cercles pour lequel la corde passe par l'origine est, d'après ce qui précède, le cercle osculateur de la courbe, en ce point.

De là résulte une construction facile, pour obtenir le centre de courbure, et conséquemment le cercle osculateur d'une ligne du second ordre, en l'un de ses points. Par ce point soit menée à la courbe une normale sur laquelle soit choisi un point tel qu'en décrivant, de ce point comme centre, un cercle passant par le point donné, ce cercle coupe la courbe en deux autres points. Soient menées à la courbe une corde par ces deux points, et par le point donné une nouvelle corde, parallèle à celle-là. La perpendiculaire sur le milieu de cette dernière corde coupera la normale au centre de courbure cherché.

Cette construction revient à une autre construction déjà connue; mais il était difficile d'y parvenir par une voie plus simple.

4.

Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles.

(Gergonne's Annales de Mathématiques, Band 18, S. 29–47. 1827.)

Nous nous proposons, dans ce qu'on va lire, de déduire d'une analyse que le lecteur trouvera peut-être assez simple, diverses solutions du problème où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés, ainsi que d'autres problèmes compris dans celui-là, comme cas particuliers. Nous enseignerons aussi, plus généralement, à décrire un cercle qui en coupe trois autres sous des angles donnés; et aussi à décrire un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux; ou, plus généralement, sous des angles dont les cosinus soient entre eux dans un rapport donné. Nous montrerons enfin comment on peut résoudre des problèmes analogues sur les surfaces du second ordre.

Dans un des numéros du journal de M. Crelle, publié à Berlin, M. Steiner a donné, sans démonstration, la construction de divers problèmes, parmi lesquels ceux-ci se trouvent compris, en déclarant que ses constructions se déduisaient d'une théorie qu'il a exposée avec assez de développement; mais la publicité que ce géomètre a donnée à son travail ne nous a pas paru un motif suffisant pour renoncer à publier un sommaire du nôtre, qu'on sera peut-être bien aise de lui comparer, et dont on trouvera peut-être même la marche plus rapide et plus simple à quelques égards.

I. Soient

$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad c'' = 0,$$

les équations de trois cercles, tracés sur un même plan, et rapportés aux mêmes axes; chacune des trois équations

$$c' - c'' = 0, \qquad c'' - c = 0, \qquad c - c' = 0,$$

étant linéaire en x et y, et ayant lieu en même temps que celles de deux de ces cercles, sera conséquemment celle de leur corde commune, réelle ou idéale, c'est-à-dire, de leur *axe radical;* mais chacune de ces trois dernières équations est évidemment comportée par les deux autres; donc elles sont toutes trois satisfaites par le même système de valeurs

de x et de y; donc, finalement, *les axes radicaux de trois cercles quelconques, tracés sur un même plan, et pris tour à tour deux à deux, concourent tous trois en un même point que nous appellerons à l'avenir le centre radical* des trois cercles dont il s'agit*).

*) Ce tour de raisonnement, dont la première idée paraît appartenir à M. Gergonne, mérite une attention toute particulière, attendu qu'il peut être utilement employé dans beaucoup d'autres rencontres.

Nous nous bornerons seulement ici à faire remarquer que le théorème subsiste, lorsqu'on remplace un ou deux des cercles donnés, ou même tous les trois, par des points, dont on peut mettre les équations sous cette forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0.$$

Deux points qui ont avec un même cercle le même axe radical sont dits *conjugués* l'un à l'autre, par rapport à ce cercle. Soit un cercle donné par l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

et deux points donnés par celles-ci

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0,$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = 0;$$

leurs axes radicaux par rapport au cercle seront donnés par les équations

$$2ax + 2by - (a^2 + b^2 + r^2) = 0,$$
$$2a'x + 2b'y - (a'^2 + b'^2 + r^2) = 0.$$

Afin donc que ces deux axes radicaux se confondent, on devra avoir

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a^2 + b^2 + r^2}{a'^2 + b'^2 + r^2}.$$

La première partie de cette double équation prouve que les deux points dont il s'agit doivent être en ligne droite avec le centre du cercle; d'où il suit que, si l'on suppose $b = 0$, on devra avoir aussi $b' = 0$. Notre double équation se réduira ainsi à

$$\frac{a}{a'} = \frac{a^2 + r^2}{a'^2 + r^2},$$

d'où l'on tirera

$$aa' = r^2;$$

ce qui prouve 1° que les deux points doivent être situés d'un même côté du centre; 2° que le rayon doit être moyen proportionnel entre leurs distances à ce centre.

Il résulte de là que, si l'un de ces points est sur la circonférence, l'autre se confondra avec lui; et que conséquemment l'axe radical d'un cercle et d'un point de sa circonférence n'est autre que la tangente à ce cercle en ce point.

Rien de plus facile d'après cela que d'obtenir l'équation de la tangente à un cercle

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

en l'un quelconque

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0$$

de ses points. En prenant en effet la différence de leurs équations, et ayant égard à la condition

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

on aura, sur-le-champ, pour l'équation cherchée de la tangente au cercle,

$$x'x + y'y = r^2.$$

On pourra facilement, d'après cela, *décrire un cercle qui, passant par deux points donnés, touche un cercle donné.* On peut remarquer, en effet, que le problème a deux solutions et que les deux cercles qui le résolvent ont, avec le cercle donné, un centre radical qui doit se trouver à la fois sur la droite qui joint les deux points donnés, et au point de concours des tangentes communes à ces deux mêmes cercles et au cercle donné. Ce centre radical demeurera donc le même si l'on remplace l'un des deux cercles cherchés par un autre cercle qui, passant comme lui par les deux points donnés, coupe le cercle donné; puisque ce point se trouvera toujours à l'intersection des deux mêmes droites. Décrivant donc arbitrairement un tel cercle, sa corde commune avec le cercle donné coupera la droite menée par les deux points en un point duquel menant des tangentes au cercle donné, leurs points de contact avec lui seront aussi ceux où il doit être touché par les cercles cherchés. Menant donc des rayons par ces deux points, ces rayons seront coupés par la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés aux centres des deux cercles cherchés.

2. Cette construction se trouve en défaut, lorsque le cercle donné dégénère en une droite donnée. Voyons comment alors on peut y suppléer. Soient

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = r'^2,$$

les équations de deux cercles quelconques, en retranchant on aura

$$2(a - a')x + 2(b - b')y + (r^2 - a^2 - b^2) - (r'^2 - a'^2 - b'^2) = 0.$$

Si donc on place l'origine en un quelconque des points de l'axe radical, on aura

$$r^2 - (a^2 + b^2) = r'^2 - (a'^2 + b'^2);$$

ce qui veut dire que *si, de l'un quelconque des points de l'axe radical de deux cercles, on mène des tangentes à ces deux cercles, ces tangentes auront même longueur.*

Il sera facile, d'après cela, de *décrire un cercle qui, passant par deux points donnés, touche une droite donnée.* On voit, en effet, que les deux cercles qui résolvent le problème doivent avoir pour axe radical la droite qui joint les deux points donnés et pour tangente commune la droite donnée; d'où il suit que la première de ces deux droites doit couper l'autre au milieu de l'intervalle entre les deux points de contact.

La même méthode est applicable à toutes les lignes du second ordre. Appliquée aux lignes des ordres plus élevés, au lieu de leurs tangentes, elle donnerait leurs lignes osculatrices.

Or, si à l'un des deux cercles cherchés on en substitue un autre, passant comme lui par les deux points donnés, l'axe radical ne changera pas, et les tangentes menées aux deux cercles de l'un quelconque des points de cet axe seront encore de même longueur. La construction se réduit donc à ce qui suit: Soit décrit arbitrairement un cercle qui passe par les deux points donnés; par l'intersection de la droite qui joint ces deux points avec la droite donnée soit menée une tangente à ce cercle; soit portée la longueur de cette tangente de part et d'autre du même point sur la droite donnée; on déterminera ainsi ses points de contact avec les cercles cherchés; alors les perpendiculaires élevées à cette droite par ces deux points couperont la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés aux centres de ces mêmes cercles.

3. Occupons-nous présentement de la recherche des cercles qui touchent trois cercles donnés. Soient les équations de ces trois cercles

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2&=r^2\ ,\\(x-a')^2+(y-b')^2&=r'^2\ ,\\(x-a'')^2+(y-b'')^2&=r''^2;\end{aligned}$$

soient trois autres cercles, concentriques avec ceux-là, ayant des rayons respectivement égaux aux leurs, augmentés d'une même longueur quelconque R, positive ou négative. Les équations de ces nouveaux cercles seront

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2&=(r+R)^2,\\(x-a')^2+(y-b')^2&=(r'+R)^2,\\(x-a'')^2+(y-b'')^2&=(r''+R)^2.\end{aligned}$$

On obtiendra les équations des axes radicaux de ces derniers cercles en prenant les différences de leurs équations deux à deux. Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait pris pour origine des coordonnés le centre radical des trois cercles primitifs; on aura alors

$$r^2-(a^2+b^2)=r'^2-(a'^2+b'^2)=r''^2-(a''^2+b''^2),$$

et en conséquence les équations des axes radicaux des trois nouveaux cercles, pris tour à tour deux à deux, seront

$$\begin{aligned}(a'-a'')x+(b'-b'')y+(r'-r'')R&=0,\\(a''-a)x+(b''-b)y+(r''-r)R&=0,\\(a-a')x+(b-b')y+(r-r')R&=0.\end{aligned}$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par r, r', r'', la longueur R disparaît, et l'on obtient l'équation linéaire

$$\{r(a' - a'') + r'(a'' - a) + r''(a - a')\}x + \{r(b' - b'') + r'(b'' - b) + r''(b - b')\}y = 0,$$

d'une droite qui passe par l'origine et qui doit contenir évidemment le centre radical des trois nouveaux cercles, quel que soit R. On a donc ce théorème: *Si les rayons de trois cercles, tracés sur un même plan, croissent ou décroissent d'une même quantité quelconque, leur centre radical, variable de position, parcourra une ligne droite.* Cette droite est facile à obtenir, puisqu'elle doit passer par le centre radical des trois cercles primitifs et par le centre radical des trois cercles qu'on déduirait en augmentant ou diminuant leurs rayons d'une même quantité quelconque.

4. On sait que les équations des centres de similitude directe des trois cercles primitifs, pris tour à tour deux à deux, sont

$$\begin{cases} x = \dfrac{r'a'' - r''a'}{r' - r''}, \\ y = \dfrac{r'b'' - r''b'}{r' - r''}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{r''a - ra''}{r'' - r}, \\ y = \dfrac{r''b - rb''}{r'' - r}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{ra' - r'a}{r - r'}, \\ y = \dfrac{rb' - r'b}{r - r'}; \end{cases}$$

lesquels points sont sur une même droite, qu'on appelle *l'axe de similitude* directe des trois cercles, et dont on trouvera facilement l'équation

$$\{r(b' - b'') + r'(b'' - b) + r''(b - b')\}x = \{r(a' - a'') + r'(a'' - a) + r''(a - a')\}y - \{r(a'b'' - a''b') + r'(a''b - ab'') + r''(ab' - a'b)\}\ ^{1}),$$

or, cette droite est perpendiculaire à l'autre; on a donc ce nouveau théorème: *La droite que parcourt le centre radical de trois cercles, lorsque leurs rayons croissent ou décroissent d'une même quantité quelconque, est perpendiculaire à leur axe de similitude directe.* Il suffira donc, pour obtenir cette droite, d'abaisser du centre radical des trois cercles une perpendiculaire sur leur axe de similitude directe.

5. Si des centres de similitude directe des trois cercles primitifs, pris tour à tour deux à deux, on décrit trois nouveaux cercles, tels que chacun d'eux ait avec les deux cercles dont le centre de similitude est son centre, le même axe radical, ces trois nouveaux cercles auront évidemment leur centre radical commun avec les trois premiers; et comme ils ont leurs centres en ligne droite, ils devront avoir un axe radical unique passant par ce centre et perpendiculaire à cette droite. Cet axe radical ne sera donc autre chose que la droite dont il s'agit ici; on a donc encore ce nouveau théorème: *La droite que parcourt le centre radical de trois cercles dont les rayons croissent ou décroissent à la fois d'une même quantité quelconque, est l'axe radical commun de trois autres cercles qui ont leurs centres aux centres de similitude directe de*

ces trois cercles, pris tour à tour deux à deux, et dont chacun a le même axe radical avec deux de ces cercles; ce qui peut offrir une troisième détermination de la droite dont il s'agit.

Si, au lieu d'augmenter ou de diminuer à la fois les rayons des trois cercles, on faisait croître les uns et décroître les autres, mais toujours d'une même quantité quelconque, leur centre radical décrirait encore une ligne droite; mais cette droite serait alors perpendiculaire à l'un des axes de similitude inverse des trois cercles; elle serait axe radical commun de trois nouveaux cercles dont les centres seraient aux trois centres de similitude situés sur cet axe, et dont chacun aurait toujours le même axe radical avec deux des cercles donnés. On doit remarquer enfin que tout ce qui précède subsiste encore, lorsqu'on remplace un quelconque des cercles donnés par une droite ou un point.

L'application de ceci au problème qui nous occupe est visible. Que l'on demande, en effet, un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés; supposons ce cercle déjà obtenu, et soit R son rayon. Supposons, pour fixer les idées, que ce cercle touche les trois autres de la même manière, c'est-à-dire, qu'il les touche tous trois extérieurement ou qu'il les enveloppe tous trois, ou enfin qu'il en soit lui-même enveloppé. Si l'on décrit trois nouveaux cercles concentriques avec les premiers, et passant tous par le centre de celui-là, ce centre en sera le centre radical; mais leurs rayons ne seront que les rayons des cercles primitifs, augmentés ou diminués du rayon R; donc le centre du cercle cherché se trouvera (4) sur la perpendiculaire à l'axe de similitude directe des trois cercles primitifs, menée par leur centre radical. En variant donc les hypothèses, sur la nature des contacts, on parviendra à ce théorème général: *Les centres des huit cercles qui touchent à la fois les trois mêmes cercles donnés sont distribués, deux à deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de ces trois cercles sur leurs quatre axes de similitude.*

On pourrait, en partant de là, et en suivant une marche analogue à celle de Viète, dans son *Apollonius Gallus*, parvenir à la solution du problème; mais, en poursuivant notre analyse, nous en déduirons des constructions beaucoup plus élégantes et plus brièves.

6. Soient

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2, \qquad (c)$$

$$(x - a')^2 + y^2 = r'^2, \qquad (c')$$

les équations de deux cercles; en prenant leur axe radical pour axe des y, nous aurons

$$a^2 - r^2 = a'^2 - r'^2.$$

Soit ensuite

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2 \quad . \qquad (C)$$

l'équation d'un troisième cercle que, pour fixer les idées, nous supposons toucher extérieurement les deux premiers; il en résultera

$$(A - a)^2 + B^2 = (R + r)^2,$$
$$(A - a')^2 + B^2 = (R + r')^2;$$

d'où, en retranchant et ayant égard à la relation ci-dessus,

$$(a - a')A = -(r - r')R.$$

Si au contraire, le cercle (C) enveloppait les deux autres ou en était enveloppé, le signe du second membre serait positif; de sorte que, pour comprendre les deux cas dans un seul, il faudra écrire

$$(a - a')A = \pm (r - r')R;$$

dans tous les cas, $A:R$ sera une quantité constante.

Si donc on considère deux cercles touchants (C), (C'), on aura

$$\frac{A}{R} = \frac{A'}{R'}, \quad \text{ou} \quad RA' - R'A = 0,$$

d'où résultera encore

$$\frac{RA' - R'A}{R - R'} = 0;$$

or, c'est là la valeur de x pour le centre de similitude directe des deux cercles (C), (C'); donc ce centre de similitude est sur l'axe radical de (c) et (c'). Ainsi, *le centre de similitude directe de deux cercles qui ont avec deux autres cercles un même mode de contact, est sur l'axe radical de ces deux-ci.* On démontrera avec la même facilité que ce sera *le centre de similitude* inverse de ces deux cercles qui sera sur l'axe radical des deux autres, si les premiers ont des modes de contact inverses avec les deux autres. Il est d'ailleurs évident que ces relations doivent être réciproques; c'est-à-dire, qu'à l'inverse l'un des deux centres de similitude des deux cercles (c) et (c') doit se trouver sur l'axe radical des deux cercles (C) et (C'). Donc, si l'on a un troisième cercle (C''), tangent comme les deux autres au deux cercles (c), (c'), le centre radical de ces trois cercles coïncidera avec l'un des deux centres de similitude de ces deux-ci, savoir avec leur centre de similitude directe ou avec leur centre de similitude inverse, suivant que les trois cercles (C), (C'), (C'') seront touchés de la même manière ou d'une manière différente par les deux cercles (c) et (c'); d'où l'on voit encore que si les cercles (C), (C'), (C'') .... étaient en plus grand nombre, ils auraient tous leur centre radical au même point.

7. Si donc de ce point comme centre et avec la tangente menée du même point à l'un d'eux pour rayon, on décrit un nouveau cercle, il coupera tous les cercles (C), (C'), (C'').... orthogonalement; et, à cause de cette propriété, nous l'appellerons le *cercle orthogonal* de tous ceux-là. Or, si les deux cercles (c), (c') se coupent, on pourra considérer leurs points d'intersection comme deux cercles de rayon nul qui les touchent tous deux; d'où il suit qu'alors le cercle orthogonal passera par ces deux points; ce qui offre un moyen facile de le construire dans ce cas. Dans tous les cas, il aura même axe radical avec ces deux-là.[2])

8. Deux cercles (c), (c') étant tracés sur un même plan, on peut toujours concevoir tant d'autres cercles qu'on voudra qui les touchent tous deux, soit de la même manière soit d'une manière différente. Soient (C), (C'), (C'') trois de ces cercles; on voit que les cercles (C), (C'), (C''), pris deux à deux, auront l'un de leurs centres de similitude (7) sur l'axe radical de (c) et (c') et que conséquemment trois de leurs six centres de similitude seront sur cette droite. C'est le théorème de Monge, qu'on peut encore énoncer ainsi: *Les quatre axes de similitude de trois cercles sont en même temps les axes radicaux de quatre couples de cercles tangents à la fois à ces trois-là.*

9. De ce qui précède on peut déduire divers modes de construction des cercles tangents à la fois à trois cercles donnés.

I. Soient construits le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés, ainsi que leurs quatre axes de similitude. Si ces axes coupent le cercle orthogonal, on achèvera (8) la construction, en décrivant (1) des cercles passant par chaque couple de points d'intersection et touchant en même temps l'un quelconque des cercles donnés.

10. Soient p et p' les deux points où les cercles (c) et (c') sont touchés par (C); la droite pp' passera par l'un des centres de similitude de (c) et (c'), ou, ce qui revient au même (6), par le centre radical des trois cercles (C), (C'), (C''). De plus, les tangentes communes aux points p et p' vont concourir en un point de l'axe radical de (c) et (c'), centre radical de (c), (c') et (C); d'où il suit que cette droite pp' passe par le pôle de cet axe radical relatif à (C). De la résulte cette autre construction.

II. Que l'on construise le centre radical des trois cercles donnés, leurs quatre axes de similitude et les *douze* pôles de ces quatre axes, par rapport à ces trois cercles. Que l'on mène ensuite des droites du centre radical à ces douze pôles. Ces droites détermineront, sur les trois cercles, *leurs vingt-quatre* points de contact avec les huit cercles qui résolvent le problème.

L'on sait qu'on peut construire le pôle d'une droite par l'intersection des polaires de deux quelconques de ses points. En prenant pour ces points deux centres de similitude, on tombe précisément sur l'élégante construction de M. Gergonne*).

11. La polaire d'un point quelconque de pp' passant par son pôle, intersection des tangentes communes en p et p', ce point est aussi situé sur la polaire du centre radical de (C), (C'), (C'') relative à (C), ce qui fournit cette troisième construction:

III. Que l'on construise les quatre axes de similitude, et en outre les polaires du centre radical relatives aux trois cercles, ces polaires auront avec les axes de similitude *douze* points d'intersection, desquels menant des tangentes aux cercles respectifs, on obtiendra de nouveau les *vingt-quatre* points de contact des huit cercles cherchés.

Les constructions indiquées, sans analyse, par M. Poncelet**) doivent nécessairement rentrer dans les précédentes.[3])

12. Les modifications que doivent subir ces diverses constructions lorsqu'on substitue des points ou des droites à un ou à deux des cercles donnés, n'offrent aucune difficulté.[4]) On peut prouver, par exemple, en toute rigueur analytique, que les deux points où un cercle est coupé par la perpendiculaire menée à une droite indéfinie, par son centre, sont les deux centres de similitude de ce cercle et de cette droite. Ainsi, en combinant un cercle avec deux droites, les quatre axes de similitude formeront un rectangle inscrit, dont les diagonales seront respectivement perpendiculaires aux deux droites données. En nous arrêtant à ce cas, pour y appliquer la seconde construction, l'on voit d'abord que les pôles des axes de similitude sont les sommets du parallélogramme circonscrit au cercle, dont les côtés sont parallèles aux droites données; le point d'intersection de ces droites est d'ailleurs ici le centre radical; et l'on obtient ainsi la construction suivante:

Pour décrire un cercle qui touche à la fois un cercle donné et deux droites données, circonscrivez au cercle donné un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux deux droites données; joignez ses quatre sommets à l'intersection de ces deux droites par quatre autres droites qui, par leurs intersections avec la circonférence, détermineront les points où le cercle donné doit être touché par les huit cercles qui, en général, résolvent le problème.

13. Reprenons présentement notre analyse du no. 6. Au lieu de supposer que le troisième cercle (C) touche les deux autres (c) et (c'), supposons qu'il les coupe sous des angles égaux ou supplémentaires

*) Annales de Mathématiques, Band 7, S. 302.

**) Annales de Mathématiques, Band 11, S. 318.

quelconques, que nous représenterons par ω. Convenons, pour fixer les idées, de prendre constamment pour l'angle de deux cercles l'angle de deux arcs dont les concavités sont tournées dans le même sens; nous aurons

$$(A - a)^2 + B^2 = R^2 + r^2 \pm 2rR \cdot \cos. \omega,$$
$$(A - a')^2 + B^2 = R^2 + r'^2 \pm 2r'R \cdot \cos. \omega;$$

les signes inférieurs étant relatifs aux supplements; nous aurons en retranchant, et ayant toujours égard à la relation qui résulte de ce que l'axe des y est l'axe radical des deux cercles coupés,

$$(a - a')A = \pm (r + r')R \cos. \omega.$$

En considérant trois cercles (C), (C'), (C'') coupant (c) sous les angles respectifs ω, ω', ω'', et (c') sous les mêmes angles ou sous leurs supplémentaires, on aura

$$\frac{R \cos \omega}{A} = \frac{R' \cos \omega'}{A'} = \frac{R'' \cos \omega''}{A''};$$

et par conséquent

$$\frac{A''R' \cos \omega' - A'R'' \cos \omega''}{R' \cos \omega' - R'' \cos \omega''} = \frac{AR'' \cos \omega'' - A''R \cos \omega}{R'' \cos \omega'' - R \cos \omega} =$$
$$= \frac{A'R \cos \omega - AR' \cos \omega'}{R \cos \omega - R' \cos \omega'} = 0;$$

d'où l'on voit que l'axe des y, c'est-à-dire, l'axe radical des deux cercles (c) et (c'), est un axe de similitude de trois cercles concentriques à (C), (C'), (C'') et dont les rayons $R \cos \omega$, $R' \cos \omega'$, $R'' \cos \omega''$ seraient égaux aux leurs, diminués dans le rapport de l'unité aux cosinus respectifs des angles ω, ω', ω''; savoir l'axe de similitude directe ou un axe de similitude inverse, facile à reconnaître, suivant que les trois angles ω, ω', ω'' sont de même espèce ou d'espèces différentes.

Les dernières expressions ne changeant pas tant que les rapports

$$\frac{\cos \omega}{\lambda} = \frac{\cos \omega'}{\lambda'} = \frac{\cos \omega''}{\lambda''}$$

restent les mêmes; il en résulte que tout cercle qui coupe (C), (C'), (C'') sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant de λ, λ', λ'' a le même axe radical avec (c) et (c'). Parmi ces cercles, se range évidemment le cercle orthogonal des trois cercles (C), (C'), (C''), pour lequel ces trois cosinus sont nuls; d'où résulte la construction suivante du problème où l'on propose de décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés ω, ω', ω''.

Soit diminué le rayon de chacun des cercles donnés dans le rapport de l'unité au cosinus de l'angle sous lequel il doit être coupé par le cercle cherché. On obtiendra ainsi trois nouveaux cercles, dont on

déterminera un des axes de similitude, savoir l'axe de similitude *directe*, si les trois angles ω, ω', ω'' sont de même espèce et celui des trois axes de similitude *inverse* qui passe par le centre de similitude directe des deux cercles pour lesquels les angles sont de même espèce, dans le cas contraire. Soit construit ensuite le cercle orthogonal des trois cercles donnés. Construisant enfin les deux cercles qui ont avec celui-ci pour axe radical l'axe de similitude dont il vient d'être question, et coupent un des cercles donnés sous l'angle donné, ces deux cercles résoudront le problème.[5])

Cette construction se prête, sans difficulté, aux méthodes ordinaires de la géométrie analytique, même dans le cas où le cercle orthogonal devient imaginaire, c'est-à-dire, lorsque le carré de son rayon devient négatif. Le problème a deux solutions ou bien il est impossible. Dans le premier cas, les deux cercles ainsi construits coupent l'un et l'autre les cercles donnés sous les angles donnés, ou bien ils les coupent tous deux sous les suppléments de ces angles, ou enfin l'un d'eux les coupe sous ces angles mêmes, tandis que l'autre les coupe sous leurs suppléments.

14. Il résulte de ce qui vient d'être dit que les centres de tous les cercles qui coupent les trois donnés (C), (C'), (C'') sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant des trois nombres λ, λ', λ'', sont situés en ligne droite, conséquence qu'on déduirait aussi d'un calcul analogue à celui du no. 3. En combinant de même les deux cercles (C), (C') avec un quatrième cercle (C'''), on trouvera une seconde droite, lieu des centres des cercles qui coupent ces trois-là sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant de λ, λ', λ'''; le point où cette droite coupera la première sera le centre d'un cercle qui coupera les quatre cercles donnés (C), (C'), (C''), (C''') sous des angles dont les cosinus seront entre eux dans le rapport des nombres λ, λ', λ'', λ'''.

La construction de ce cercle revient donc à décrire, du point d'intersection des deux droites comme centre, un cercle qui ait avec l'orthogonal de (C), (C'), (C''), pour axe radical, l'axe de similitude dont il a été question ci-dessus. Comme les quatre cercles donnés peuvent se combiner trois à trois de quatre manières différentes, on peut construire quatre droites passant par le centre du cercle demandé; tout comme on peut aussi construire quatre droites qui soient les axes radicaux du cercle cherché et des quatre cercles orthogonaux des cercles donnés, pris trois à trois. Si l'un quelconque de ces axes radicaux coupe le cercle orthogonal correspondant, le cercle à construire sera réel.[6])

Le cercle cherché peut être réel sans rencontrer tous ou partie des cercles donnés.

De ce qui précède, on déduit la construction suivante du cercle coupant quatre cercles donnés (C), (C'), (C''), (C''') sous des angles dont les cosinus soient respectivement entre eux comme les nombres λ, λ', λ'', λ'''.

Soient construits pour deux fois trois cercles, pris arbitrairement parmi les quatre cercles donnés, les deux cercles orthogonaux. Soient diminués ensuite, en conservant le rayon du premier des quatre cercles donnés, les rayons des trois autres dans les rapports de λ à λ', de λ à λ'', de λ à λ''', et soient construits les axes de similitude directe des deux systèmes de trois cercles, pris parmi les quatre cercles transformés, qui répondent aux systèmes primitifs pour lesquels on avait construit les deux cercles orthogonaux; le cercle cherché sera celui qui, pris successivement avec les deux cercles orthogonaux, aura pour axes radicaux avec eux ces deux axes de similitude.

15. Le cercle que nous venons d'enseigner à construire sera unique, tant qu'on ne prendra pas indistinctement l'angle d'intersection et son supplément; dans le cas contraire, le problème aura huit solutions, comme il résulte des huit combinaisons qu'on peut faire des signes + et — devant les rapports de l'une quelconque des quatre quantités λ, λ', λ'', λ''' aux trois autres. Pour les sept autres cas, les modifications à faire subir à la construction qui vient d'être indiquée, consistent à remplacer des axes de similitude directe par des axes de similitude inverse.

16. La construction d'un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux est implicitement comprise dans ce qui précède (14). On peut aussi l'obtenir par le procédé que voici:

Soient construits, pour deux systèmes quelconques de trois cercles, choisis parmi les quatre cercles donnés, deux couples de cercles tangents. Le cercle à construire devra passer par les intersections des deux cercles de chaque couple; ou, plus généralement, il aura avec eux le même axe radical.

17. La construction suivante, où nous nous bornons aux angles d'intersection égaux, n'est qu'une légère modification de celle du no. 14.

Soient construits les centres de similitude directe de trois couples de cercles choisis à volonté parmi les quatre cercles donnés; de manière toutefois que ces quatre cercles s'y trouvent compris. De ces trois points comme centres soient décrits trois cercles nouveaux, ayant même axe radical avec les cercles du couple correspondant. Le cercle à construire sera le cercle orthogonal de ces trois derniers cercles.[1])

18. De la même manière qu'il a été expliqué au no. 12, on pourra, par des modifications convenables, rendre ces constructions propres au cas où des points ou des droites remplaceront un ou plusieurs des cercles donnés.

19. Des constructions analogues à celles qui viennent d'être indiquées se présentent, sans difficulté, pour les problèmes relatifs aux contacts et aux intersections des sphères; et ces mêmes constructions s'appliquent aussi immédiatement aux cercles tracés sur une même sphère. Nous nous arrêterons seulement quelques instants sur ce dernier cas. L'on sait que, dans la projection stéréographique, dite de Ptolémée ou de Mercator, les cercles se projettent suivant des cercles et les angles suivant d'autres angles qui leur sont égaux. L'on peut aller plus loin encore. En suivant la démonstration analytique de la première partie de ce théorème, celle de M. Puissant,[8]) par exemple, on aperçoit sur le champ la vérité du théorème suivant, beaucoup plus général. En prenant pour tableau un plan situé d'une manière quelconque, par rapport à une surface du second ordre, et en plaçant l'oeil à l'extrémité du diamètre de cette surface qui passe par son point de contact avec le plan tangent parallèle à ce tableau, les projections des sections faites dans cette même surface par des plans quelconques seront toutes des courbes semblables. On sait en outre qu'en général toute surface du second ordre peut, et même dans deux sens différents, être coupée par des plans parallèles suivant des circonférences de cercles. Il en résulte qu'en projetant de la manière qui vient d'être dite, sur un plan parallèle à ceux de ces cercles, les projections des sections planes faites dans la surface, suivant toutes les directions possibles, seront également des cercles. En particulier, pour les surfaces de révolution du second ordre, l'oeil doit être à une des extrémités de l'axe et le tableau normal à cet axe. Dans le cas du paraboloïde de révolution, il faut projeter orthographiquement sur un plan normal à son axe.

Il suit de toutes ces remarques qu'on peut, pour des lignes du second ordre tracées sur une surface du même ordre, résoudre des problèmes analogues à ceux que nous avons résolus pour des cercles tracés sur un même plan, et tous les problèmes du même genre; celui de Malfatti, par exemple, dans toute sa généralité. Il suffira pour cela de projeter les données sur un plan tellement situé que les projections soient des cercles; de résoudre le problème plan pour ces cercles et de projeter ensuite les cercles obtenus sur la surface du second ordre.

5.

Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés.

(Gergonne's Annales de Mathématiques, Band 19, S. 97—106. 1828.)

Je me propose, dans l'essai que l'on va lire, de donner quelques exemples d'une méthode à l'aide de laquelle on peut déduire, immédiatement et sans aucune sorte de calcul, un grand nombre de propriétés générales des courbes de tous les degrés, de la simple considération de la constitution algébrique des équations qui les représentent. Dans un autre essai, qui suivra de près celui-ci, j'étendrai ces considérations aux surfaces courbes.

§ 1.

On sait que cinq points sont nécessaires sur un plan pour déterminer complètement une courbe du second degré, et que, généralement parlant, il n'en saurait passer qu'une seule par cinq points donnés; d'où il suit qu'on en peut faire passer une infinité par quatre points donnés; il n'est donc pas étonnant, d'après cela, que deux courbes de ce degré se coupent en quatre points.

Mais on sait aussi que neuf points suffisent sur un plan pour déterminer complètement une courbe du troisième degré, et, qu'en général, il n'en saurait passer plus d'une par neuf points donnés; on doit donc, d'après cela, éprouver quelque surprise de voir deux courbes de ce degré se couper en neuf points.

Pareillement, quatorze points suffisant sur un plan pour déterminer complètement une courbe du quatrième degré, et une courbe unique de ce degré pouvant en général être conduite par ces quatorze points, on ne saurait voir sans surprise deux courbes de ce degré se couper en seize points.

En général, le nombre des points nécessaires, sur un plan, pour déterminer complètement une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré est, comme l'on sait, $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$, et il n'en saurait passer plus d'une de ce

degré par un tel nombre de points. D'un autre côté, deux courbes de ce degré, tracées sur un même plan, peuvent se couper en m^2 points. Si donc on choisit le nombre entier m de telle sorte que m^2 soit au moins égal à $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} - 1$, ce qui arrivera pour toutes les valeurs de $m > 2$; on aura un exemple de deux courbes du même degré se coupant en autant de points au moins qu'en exigerait la détermination complète de l'une d'elles.

Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, est le premier, je crois, qui ait signalé cette espèce de paradoxe qui s'explique aisément en remarquant que, lorsqu'il est question du nombre des points nécessaires et suffisants sur un plan, pour déterminer complètement une courbe d'un degré déterminé, on sous-entend toujours que ces points sont pris au hasard, et ne sont liés entre eux par aucune relation particulière. Je l'avais rencontré moi-même en discutant la théorie de l'osculation des lignes courbes; en cherchant à l'interpréter géométriquement, j'ai été conduit à quelques théorèmes assez singuliers au premier aspect, mais très-féconds en beaux corollaires; ils ont déjà paru autre part[1]), mais je crois devoir les reproduire ici avec plus de développements. J'indiquerai ensuite brièvement quelques-unes des applications dont ils sont susceptibles.

§ 2.

Bien qu'en général, passé $m = 2$, le nombre m^2 des points d'intersections de deux courbes du $m^{\text{ième}}$ degré soit plus grand que le nombre $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} - 1$ des points nécessaires pour déterminer l'une d'elles, on peut néanmoins faire passer par ces m^2 points, non seulement les deux courbes dont ils sont les intersections, mais encore une infinité d'autres courbes du $m^{\text{ième}}$ degré, de sorte qu'il faut se donner un point de plus pour déterminer complètement une d'entre elles. Si, en effet, on représente par

$$M = 0, \quad M' = 0,$$

les équations de ces deux courbes, l'équation du même degré

$$\mu M + M' = 0,$$

dans laquelle μ est supposé un coëfficient constant indéterminé, exprimera une infinité d'autres courbes du $m^{\text{ième}}$ degré, passant par les m^2 points d'intersection des deux premières; mais si l'on se donne arbitrairement un nouveau point de l'une d'elles, outre ceux-là, il en résultera une équation linéaire pour la détermination de μ; de sorte qu'alors la courbe sera complètement déterminée.

Cela posé, soient $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés sur un plan; concevons qu'on ait décrit toutes les courbes, en nombre infini, qui peuvent passer par ces points, et considérons deux d'entre elles en particulier; elles auront m^2 points d'intersection, savoir les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés, et $m^2-\left(\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2\right)$ nouveaux points; or, d'après ce qui précède, par ces m^2 points, on pourra faire passer une infinité d'autres courbes du $m^{ième}$ degré, lesquelles seront les autres courbes de la série dont il s'agit, puisqu'elles passeront par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ points donnés; donc toutes ces courbes passent aussi par les $m^2-\left(\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2\right)$ points restants; en invoquant donc le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes:

Théorème I. Toutes les courbes du $m^{ième}$ degré qui passent par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ mêmes points fixes, se coupent en outre aux $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+2$, autres mêmes points fixes.

Ainsi, par exemple, toutes les courbes du troisième degré qui passent par les huit mêmes points fixes, se coupent en outre en un neuvième même point fixe. De même encore, toutes les courbes du quatrième degré qui passent par les treize mêmes points fixes, se coupent toutes en outre en trois autres mêmes points fixes, et ainsi du reste.

Théorème I. Toutes les courbes de $m^{ième}$ classe qui touchent les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-2$ mêmes droites fixes, touchent en outre les $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+2$, autres mêmes droites fixes.

Ainsi, par exemple, toutes les courbes de troisième classe qui touchent les huit mêmes droites fixes, touchent en outre une neuvième même droite fixe. De même encore, toutes les courbes de quatrième classe qui touchent les treize mêmes droites fixes, touchent en outre les trois autres mêmes droites fixes, et ainsi du reste.

Rien n'empêche d'admettre, dans le théorème qui précède, que tous ou partie des points fixes donnés se confondent par groupes plus ou moins nombreux en un point unique, auquel cas les courbes dont il s'agit auront en ces points des contacts d'ordres plus ou moins élevés.

Ainsi, par exemple, au lieu de considérer toutes les courbes du troisième degré qui passent par les huit mêmes points fixes, on peut considérer toutes celles qui, passant par les deux mêmes points fixes, ont entre elles, en chacun de ces points, un contact de quatre

points ou du troisième ordre; et l'on verra, en vertu du théorème, qu'elles doivent se couper toutes en un troisième point.

Nous n'avons comparé, dans ce qui précède, que des courbes exprimées par des équations complètes dans lesquelles toutes les coefficients étaient supposés indéterminés; mais en assujétissant ces courbes à certaines conditions, nous pourrons rabaisser, à volonté, le nombre des constantes arbitraires de leur équation commune. Nous pourrons, par exemple, regarder comme donnés, un certain nombre de ces coefficients pour toutes les courbes que nous comparons, ou bien supposer qu'il existe entre tous ou partie d'entre eux un certain nombre d'équations de condition. Ces considérations conduisent au théorème suivant plus général que celui que nous avions d'abord établi:

Théorème II. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du $m^{ième}$ degré à deux indéterminées, ou encore étant données n équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficients; toutes les courbes représentées par l'équation générale ainsi modifiée et passant par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-(n+2)$ *mêmes points fixes donnés, se couperont en outre aux* $m^2-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}+(n+2)$ *autres mêmes points fixes.*

Il est évident que, dans l'application de ce théorème, on ne doit pas supposer $n>\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}-1$.

§ 3.

Notre théorème, sous sa première forme, ne saurait s'appliquer qu'aux courbes des degrés supérieurs au second; mais, sous la seconde, il s'applique fort bien aux courbes du second degré. Il prend alors la forme particulière que voici:

Etant donnés n coefficients de l'équation générale du second degré à deux indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficients; toutes les courbes représentées par l'équation générale ainsi modifiée et passant par les $4-n$ *mêmes points fixes donnés, se coupent en outre aux n autres mêmes points fixes.*

Ainsi l'équation générale du second degré à deux indéterminées étant

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

dans laquelle il est permis de supposer F connu; si l'on donne 1.° un des cinq autres coefficients et trois points; 2.° deux d'entre eux et deux points; 3.° trois d'entre eux et un point; 4.° enfin quatre d'entre eux, il y aura, dans tous les cas, un nombre infini de courbes représentées par l'équation (1), et toutes ces courbes passeront par les

quatre même points. Il en sera de même si, au lieu de se donner un certain nombre de ces coefficients, on se donne un égal nombre d'équations entre tous ou partie d'entre eux. On va voir, par quelques exemples pris au hasard, avec quelle facilité on déduit de là la plupart des propriétés des courbes du second degré.

On sait que, dans l'hypothèse des coordonnées rectangulaires, l'équation (1) représente des hyperboles équilatères lorsqu'on a $A + B = 0$; donc

Toutes les hyperboles équilatères qui passent par les trois mêmes points donnés, se coupent en outre en un quatrième point fixe.

Le système de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre peut, comme l'on sait, être considéré comme une hyperbole équilatère; en conséquence, les trois systèmes de bases et de hauteurs, d'un même triangle, peuvent être considérés comme trois hyperboles équilatères ayant trois points communs, qui sont les sommets du triangle; elles doivent donc avoir un quatrième point commun; et ainsi se trouve démontré que *les trois hauteurs de tout triangle concourent en un même point.*

Etant donné l'un des deux rapports $\frac{C}{A}$ ou $\frac{C}{B}$, on connaît deux diamètres conjugués de la courbe, dont un est parallèle à l'un des axes des coordonnées; donc

Toutes les coniques qui ont deux diamètres conjugués parallèles à deux droites fixes, et qui passent par trois points fixes, se coupent en outre en un quatrième point fixe.

La construction de ce quatrième point étant très-facile, on pourra trouver tant de points qu'on voudra, 1.° d'une conique dont on connaîtra quatre points, avec les directions de deux diamètres conjugués; 2.° d'une conique dont on connaîtra trois points, avec les directions de deux systèmes de diamètres conjugués.

Et de là encore cet autre théorème:

Toutes les coniques qui passent par les quatre mêmes points fixes ont un système de diamètres conjugués parallèles à deux droites fixes.

On sait que l'équation

$$By + Cx + E = 0$$

est celle du diamètre de la courbe (1) dont le conjugué est parallèle à l'axe des y; d'où il suit que $\frac{E}{B}$ étant donné, on connaîtra le point d'intersection de ce diamètre avec l'axe des y; c'est-à-dire, si cet axe rencontre la courbe, le point milieu de la corde interceptée. Etant

donné un quelconque (a, b) des points de la direction de ce diamètre, on aura

$$Bb + Ca + E = 0,$$

c'est-à-dire, une équation linéaire entre les trois coefficients B, C, E. En connaissant de plus l'un quelconque (a', b') des points de la direction du diamètre dont le conjugué est parallèle à l'axe des x, on aura semblablement

$$Aa' + Cb' + D = 0;$$

c'est-à-dire, une équation linéaire entre les trois coefficients A, C, D. Enfin, une droite quelconque étant donnée par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

l'équation du diamètre dont le conjugué lui est parallèle sera

$$\alpha(By + Cx + E) = \beta(Ax + Cy + D);$$

équation linéaire par rapport à A, B, C, D, E. On pourra se donner une, deux, trois ou quatre équations de la même forme. Dans ce dernier cas, en supposant un de ces coefficients donné, ce qui est permis pourvu qu'on rende au dernier terme F son indétermination, ils seront tous complètement déterminés excepté celui-là. De ces considérations se déduisent, sur-le-champ, les théorèmes suivants:

Toutes les coniques qui passent par trois points donnés et dans lesquelles les conjugués des diamètres parallèles à une même droite fixe vont concourir en un même point fixe, se coupent en outre en un quatrième point.

Si tant de coniques qu'on voudra passent toutes par les quatre mêmes points, les conjugués de leurs diamètres parallèles à une même droite fixe concourront tous en un même point fixe.

Ce dernier théorème, dû à M. Lamé*) peut être complété de la manière suivante:

Si la droite à laquelle les diamètres sont parallèles tourne sur l'un quelconque des points de sa direction, le point de concours des conjugués de ces diamètres décrira une conique, lieu géométrique des centres de toutes les coniques passant par les quatre points donnés.[2])

Si deux coniques sont telles qu'elles interceptent, sur une même droite donnée, des cordes dont les milieux coïncident, la même chose aura lieu pour toutes les coniques qui, passant par les quatre points d'intersection de ces deux là, couperont la droite donnée.

Généralement, *toutes les coniques passant par* $4 - n$ *points donnés, et assujéties en outre à la condition que les conjugués de* n *de leurs*

*) Annales de Mathématiques, Bd. 7, S. 233.

diamètres parallèles à n droites données, passent par n points fixes, se coupent en outre en n points.

Si $n = 4$, les coniques seront semblables et concentriques, de manière que les points d'intersection passeront à l'infini.

Pour dernier exemple, supposons deux points (a, b), (a', b') tels que l'un d'eux soit situé sur la polaire de l'autre relativement à la courbe (1); cette circonstance sera exprimée par l'équation

$$b(Bb' + Ca' + E) + a(Aa' + Cb' + D) + (Da' + Eb' + F) = 0;$$

ou

$$Aaa' + Bbb' + C(ab' + ba') + D(a + a') + E(b + b') + F = 0;$$

équation dont la symétrie prouve qu'alors réciproquement l'autre point se trouve situé sur la polaire du premier. Or, c'est là une équation linéaire entre les coefficients de l'équation (1), et chaque système de deux pareils points en fournirait une semblable; donc

Toutes les coniques passant par $4 - n$ *points donnés, et assujéties à la condition que, par rapport à elles, les polaires de n points donnés quelconques passent respectivement par autant de points également donnés, se coupent toutes aux quatre mêmes autres points.*

Toutes les coniques touchant $4 - n$ *droites données, et assujéties à la condition que, par rapport à elles, les pôles de n droites données quelconques soient situés respectivement sur autant de droites également données, touchent toutes les quatre mêmes autres droites fixes.*

On voit de suite que ce dernier théorème conduit à ceux qui ont été démontrés auparavant, lorsqu'on suppose que les n pôles passent à l'infini.

6.

Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés.

(Gergonne's Annales de Mathématiques, Band 19, S. 129—137. 1828.)

§ 1.

On sait que *neuf* points sont nécessaires dans l'espace pour déterminer complètement une surface du second degré, et que, généralement parlant, on n'en saurait faire passer qu'une seule par neuf points donnés: d'où il suit qu'un infinité de surfaces de ce degré peuvent passer par les huit mêmes points. On ne saurait donc être surpris, d'après cela, de voir trois surfaces du second degré se couper en *huit* points.

Mais on sait aussi que *dix-neuf* points sont nécessaires pour déterminer complètement une surface du troisième degré, et, qu'en général, il n'en saurait passer plus d'une par dix-neuf points donnés; et on doit, en conséquence, éprouver quelque surprise en considérant que trois surfaces du troisième degré se coupent en *vingt-sept* points.

Pareillement, *trente-quatre* points de l'espace déterminent complètement une surface du quatrième degré; et néanmoins trois surfaces de ce degré peuvent avoir entre elles *soixante-quatre* points communs.

En général, le nombre des points de l'espace nécessaires pour la détermination complète d'une surface du $m^{\text{ième}}$ degré est

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-1,$$

et ces points n'en déterminent qu'une seule. D'un autre côté, trois surfaces de ce degré peuvent se couper en m^3 points de l'espace. Si donc on choisit le nombre entier m, de telle sorte que m^3 soit plus grand que $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-1$, ce qui arrivera toujours pour $m>2$, on aura un exemple de trois surfaces du même degré, assujéties à passer par plus de points qu'il n'en faudrait pour la détermination complète d'une seule d'entre elles.

Voilà donc un paradoxe apparent tout à fait analogue à celui qui nous a déjà occupé, relativement aux lignes courbes, dans un précédent article, et qui s'explique, comme celui-là, en considérant que, lorsqu'on parle du nombre des points de l'espace nécessaires et suffisants pour la détermination complète d'une surface, on sous-entend toujours qu'il s'agit de points pris au hasard dans l'espace, n'étant liés entre eux par aucune relation; et que tels ne sont point, en général, les m^3 points d'intersection de trois surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré.

Ce paradoxe donne naissance à des théorèmes analogues à ceux que nous avons déduits, à la page 97 du présent volume*), du semblable paradoxe relatif aux lignes courbes; théorèmes non moins féconds que ceux-là en conséquences curieuses, et dont la recherche va présentement nous occuper.

§ 2.

Deux surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré se coupent, comme l'on sait, suivant une courbe à double courbure, dont la projection sur un plan quelconque est, en général, une courbe du $(m^2)^{\text{ième}}$ degré; et trois pareilles surfaces se coupent, comme nous venons de l'observer, en m^3 points au plus.

Soient donc

$$M = 0, \quad M' = 0, \quad M'' = 0$$

les équations de ces trois surfaces; l'équation

$$\mu M + \mu' M' + M'' = 0,$$

dans laquelle μ et μ' sont supposés des constantes indéterminées, sera celle de toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré, passant par les m^3 points d'intersection des trois premières; de sorte que, bien que ces points soient, en général, en plus grand nombre qu'il n'est nécessaire pour déterminer complètement une de ces surfaces, ils les laisseront toutes néanmoins indéterminées. Mais si l'on se donne seulement deux points de plus, ces derniers, joints aux m^3 autres, détermineront complètement une de ces surfaces; car ils donneront naissance à deux équations de conditions linéaires en μ et μ', qui suffiront pour déterminer ces deux coefficients, et, par suite, pour particulariser la surface cherchée.

Remarquons, en outre, que les équations

$$\mu M + M'' = 0, \quad \mu' M' + M'' = 0, \quad \mu M + \mu' M' = 0,$$

*) [Vgl. S. 77 ff. dieser Ausgabe.]

représentent respectivement toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré passant par les courbes à double courbure, intersections deux à deux des surfaces proposées. Une surface du $m^{\text{ième}}$ degré n'est donc pas déterminée par la seule condition de passer par les courbes à double courbure, intersections de deux autres surfaces de ce degré. Mais ici un seul point de l'espace par lequel une de ces surfaces, en nombre infini, sera assujétie à passer, suffira pour la déterminer complètement, car il en résultera une équation linéaire, soit en μ, soit en μ', soit en $\frac{\mu'}{\mu}$, suffisante pour fixer la valeur de ce coefficient.

On voit par là que toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré qui passent par les m^3 points d'intersection de trois autres surfaces de ce degré, et en outre par un point donné, ont la même courbe d'intersection.

Concevons présentement que, sur la courbe d'intersection de deux surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré, on prenne arbitrairement $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-2$ points; si l'on y ajoute un nouveau point quelconque de l'espace, une troisième surface, assujétie à passer par tous ces points, sera complètement déterminée; mais nous venons de voir qu'elle le saurait aussi, si on l'assujétissait à passer par ce même point et par la courbe d'intersection des deux premières; en invoquant donc le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes:

Théorème I. Toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré qui passent par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-2$ mêmes points, se coupent, en général, suivant une même courbe à double courbure.

Théorème I. Toutes les surfaces de $m^{\text{ième}}$ classe qui touchent les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-2$ mêmes plans, sont, en général, circonscrites à une même surface développable.

Donc, en particulier,

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui passent par les huit mêmes points, se coupent suivant une même courbe à double courbure.

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent les huit mêmes plans, sont inscrites à une même surface développable.

De même, trois surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré se coupant en m^3 points, si l'on prend $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-3$ de ces points, et qu'on y joigne deux points quelconques de l'espace, une quatrième surface de ce degré sera tout aussi complètement déterminée, par ce système de points, qu'elle le serait par les deux derniers et par la totalité des

m^3 points d'intersection des trois premières; en invoquant donc encore ici le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes:

Théorème II. Toutes les surfaces du $m^{ième}$ degré assujéties à passer par $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-3$ *points donnés, passent en outre par les* $m^3-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}+3$ *mêmes points fixes.*

Théorème II. Toutes les surfaces de $m^{ième}$ classe assujéties à toucher $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-3$ *plans donnés, touchent en outre les* $m^3-\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}+3$ *mêmes plans fixes.*

Donc, en particulier,

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés, ont en outre un huitième point commun.

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent sept plans donnés, ont en outre un huitième plan tangent commun.

Ici encore, comme nous l'avons déjà remarqué pour les lignes courbes, on pourra admettre que tous ou partie des points fixes donnés se confondent par groupes plus ou moins nombreux en un point unique, auquel cas les surfaces dont il s'agit auront, en ces points, des contacts d'ordres plus ou moins élevés.

On peut également ici, comme alors, remplacer chaque point donné de la surface cherchée, soit par l'un des coefficients de son équation, soit par une équation linéaire entre tous ou partie de ces coefficients. Nos deux théorèmes se changeront ainsi dans les deux théorèmes plus généraux que voici:

Théorème III. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du $m^{ième}$ degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficients, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}-(n+2)$ *mêmes points fixes, se couperont suivant une seule et même courbe à double courbure.*

Donc, en particulier,

Corollaire. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires, entre tous ou partie de ces coefficients, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $8-n$ mêmes points fixes, se couperont suivant une seule et même courbe à double courbure.

Theorème IV. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du $m^{ième}$ degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations

linéaires entre tous ou partie de ces coefficients, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} \cdots (n+3)$ *mêmes points fixes donnés, se couperont, en outre, aux* $m^3 - \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} + (n+3)$, *autres mêmes points fixes.*

Donc, en particulier,

Corollaire. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires, entre tous ou partie de ces coefficients, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $7 - n$ mêmes points fixes donnés, se couperont, en outre, aux $n + 1$, autres mêmes points fixes.

Il est essentiel d'observer que, dans tout ceci, on suppose que l'un des termes de l'équation générale est privé de son coefficient; ou, ce qui revient au même, que le coefficient de l'un de ses termes est une quantité donnée.

On fera, de ces diverses propositions, un usage pareil à celui que nous avons fait*) de leurs analogues relatives aux lignes courbes. On en déduira, par exemple, sans aucune sorte de calcul, les propositions suivantes:

I. Toutes les surfaces du second ordre passant par six points donnés, et assujéties en outre à cette condition que les plans diamétraux, conjugués à des diamètres parallèles à une droite fixe, se coupent tous en un point donné, passeront en outre par deux nouveaux points fixes.

II. Toutes les surfaces du second ordre passant par cinq points donnés, et assujéties en outre à une des conditions suivantes: 1^0 que les plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles à une droite fixe, se coupent tous suivant une même droite ou soient parallèles à un même plan; 2^0 que les diamètres conjugués à des plans diamétraux parallèles concourent en un point donné ou soient parallèles à une droite donné, passeront en outre par trois nouveaux points fixes.

III. Toutes les surfaces du second ordre passant par six points donnés, et assujéties en outre a cette condition que les plans polaires d'un même point se coupent tous

III. Toutes les surfaces du second ordre touchant six plans donnés, et assujéties en outre à cette condition que les pôles d'un même plan donné soient tous dans un

*) [Vgl. S. 80 ff. dieser Ausgabe.]

en un autre point donné, passeront par deux nouveaux points fixes.

IV. Toutes les surfaces du second ordre passant par cinq points donnés, et assujéties en outre à cette condition que les plans polaires d'un même point se coupent tous suivant la même droite, passeront en outre par trois nouveaux points fixes.

V. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par sept points donnés, les plans polaires d'un point quelconque se coupent tous en un autre point fixe.

VI. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par huit points donnés, les plans polaires d'un point quelconque se coupent tous suivant une même droite fixe.

VII. Dans toutes les surfaces points donnés, les plans diamétraux à une même droite fixe, se coupent

VIII. Dans toutes les surfaces points donnés, les plans diamétraux à une même droite fixe, se coupent

IX. Toutes les surfaces du second ordre, assujéties à la condition que les plans polaires de quatre points donnés passent respectivement par quatre droites données, ont la même courbe d'intersection.

Etc., etc., etc.

autre plan donné, toucheront deux nouveaux plans fixes.

IV. Toutes les surfaces du second ordre touchant cinq plans donnés, et assujéties en outre à cette condition que les pôles d'un même plan soient tous situés sur une même droite, toucheront en outre trois nouveaux plans fixes.

V. Dans toutes les surfaces du second ordre touchant sept plans donnés, les pôles d'un plan quelconque sont tous situés dans un autre plan fixe.

VI. Dans toutes les surfaces du second ordre touchant huit plans donnés, les pôles d'un plan quelconque sont tous situés sur une même droite fixe.

du second ordre passant par sept conjugués aux diamètres parallèles en un même point fixe.

du second ordre passant par huit conjugués aux diamètres parallèles tous suivant une autre droite fixe.

IX. Toutes les surfaces du second ordre, assujéties à la condition que les pôles de quatre plans donnés soient situés respectivement sur quatre droites données, sont inscrites à une même surface développable.

7.

Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte.

(Crelle's Journal, Band 3, S. 324—336. 1828.)

1. In die Reihe der zierlichsten Resultate, zu welchen die allgemeinen Untersuchungen über krumme Oberflächen geführt haben, gehört unstreitig auch der von Euler zuerst bemerkte Satz, dass jede Fläche in jedem ihrer Punkte nur zwei Krümmungen hat, und die Richtungen dieser beiden Krümmungen auf einander senkrecht stehen. Dass dieser Satz allen möglichen continuirlichen, d. h. *durch eine Gleichung darstellbaren* Flächen zukommt, beruht offenbar darauf, dass ein Element einer solchen Fläche im Allgemeinen als ein Element einer Fläche zweiter Ordnung in allen denjenigen Beziehungen anzusehen ist, wo in der analytischen Entwicklung nicht höhere Differentialcoefficienten als die der zweiten Ordnung in Betracht kommen, oder mit andern Worten, wo wir auf der Fläche nach jeder Richtung hin nur drei auf einander folgende Punkte, oder, was dasselbe heisst, nur zwei geradlinige Elemente berücksichtigen. Zugleich erblickt man aber auch auf diese Weise, dass der Euler'sche Satz für gewisse Punkte seine Anwendung verliert, nämlich für solche Punkte, in welchen die Berührungsebene mit der Fläche einen Contakt höherer Ordnung hat, wobei zugleich mit den ersten Differentialcoefficienten (bei gehöriger Coordinatenbestimmung) auch die zweiten verschwinden. Alsdann kann man aber noch immer nach den Krümmungsrichtungen der Fläche, d. h. nach denjenigen Richtungen fragen, nach welchen man zu Punkten der Fläche kommt, in denen die Normalen der Normale im Berührungspunkte begegnen.[1]) Die Absicht dieses Aufsatzes geht nun eines Theiles dahin, den Euler'schen Satz insofern zu vervollständigen, dass jene Krümmungsrichtungen bestimmt und geometrische Beziehungen derselben nachgewiesen werden sollen.

Ferner hat Euler ebenfalls zuerst gezeigt, dass, wenn man durch einen gegebenen Punkt irgend einer Fläche nach allen beliebigen Richtungen Normalebenen legt, von allen auf diese Weise auf der Fläche bestimmten Durchschnittskurven diejenigen in dem gegebenen Punkte ein Maximum oder Minimum der Krümmung haben, welche in den beiden die Krümmungsrichtungen der Fläche enthaltenden Normalebenen sich befinden; und dass, wenn die Krümmungen nach diesen zwei Richtungen bekannt sind, sogleich sich die Krümmung nach jeder beliebigen dritten Richtung bestimmen lässt. Für die in dem Obigen schon bezeichneten Punkte ist, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, die Krümmung nach allen Richtungen hin Null, d. h. der Osculationskreis und überhaupt jede Osculationslinie zweiter Ordnung geht in eine gerade Linie über. Aber nichtsdestoweniger lassen sich die nach verschiedenen Richtungen genommenen Krümmungen in solchen Punkten unter einander vergleichen, und für das Maass solcher Krümmungen können wir allgemein den reciproken Werth des Parameters p einer Parabel der n^{ten} Ordnung

$$(1 . 2 \ldots . n) p y = x^n$$

nehmen, wenn der Contakt von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.[2]) Wir können also auch nach einem Maximum oder Minimum der Krümmung fragen und uns die Aufgabe stellen, die Krümmung nach einer beliebigen Richtung zu bestimmen, wenn dieselbe nach gewissen Richtungen schon bekannt ist.

2. Es sei, in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten,

$$u = \varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Zugleich sei der auf der Fläche gegebene Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten und die Tangentialebene in diesem Punkte zur Ebene der x, y genommen, wonach also die Normale Axe der z wird. Die Normale in irgend einem andern Punkte der Fläche, dessen Coordinaten x, y und z sind, hat, auf die Tangentialebene projicirt, folgende Gleichung:

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x),$$

indem wir Y und X als die eigentlichen veränderlichen Grössen (coordonnées courantes) betrachten und $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ aus (1) in der Voraussetzung herleiten, dass z constant sei. Soll die Normale der Axe z begegnen, so muss offenbar ihre Projektion durch den Anfangspunkt gehen. Hiernach erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$y + \frac{dx}{dy} x = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung stellt, indem wir x, y und z als veränderliche Grössen betrachten, eine Fläche dar, deren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche diejenigen Punkte bestimmt, denen Normalen entsprechen, die der Normale im Anfangspunkte begegnen. Diese Punkte liegen im Allgemeinen auf einer Curve doppelter Krümmung. Wenn $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ unabhängig ist von z, d. h. wenn die Gleichung der gegebenen Fläche unter folgender Form sich darstellt:

$$z = v(x, y),$$

so ist (2) auch die Gleichung der Projektion dieser Curve. Im entgegengesetzten Falle müssen wir, um diese Gleichung zu erhalten, z zwischen (1) und (2) eliminiren. Unsere Aufgabe, diejenigen Richtungen zu bestimmen, nach welchen wir von dem auf der Fläche gegebenen Punkte aus gehen müssen, um zu solchen consecutiven Punkten zu kommen, denen Normalen entsprechen, die der Normale in jenem Punkte begegnen, — reducirt sich hiernach offenbar darauf, an die eben bezeichnete Linie doppelter Krümmung, im Anfangspunkte der Coordinaten (der ein vielfacher Punkt ist), Tangenten zu legen. Da diese Tangenten auch die gegebene Fläche berühren müssen, so liegen sie in der Ebene der x, y, und die Construktion derselben läuft darauf hinaus, an die Durchschnittscurve dieser Ebene und der Fläche (2) [Curve, deren Gleichung man erhält, indem man in (2) $z = 0$ setzt] im Anfangspunkte der Coordinaten Tangenten zu ziehen.

3. Nachdem wir diese Bemerkungen vorausgeschickt haben, wollen wir nun die einzelnen Fälle discutiren und zu diesem Ende annehmen, die Entwicklung von (1) gebe:

$$z = Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dy^3 + Ey^2x + Fyx^2 + Gx^3 + \cdots \tag{3}$$
$$+ My^n + Ny^{n-1}x + O\,y^{n-2}x^2 + \cdots + Qy^2x^{n-2} + Ryx^{n-1} + Sx^n + \cdots$$

(Nach der oben gemachten Coordinatenbestimmung fehlen nothwendig das constante Glied und die mit x und y behafteten Glieder.) Alsdann erhalten wir, wenn wir entwickeln, statt (2) folgende Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = By^2 + 2(C - A)yx - Bx^2 \\ \quad + Ey^3 + (2F - 3D)y^2x + (3G - 2E)yx^2 - Fx^3 \\ \quad + \cdots \\ \quad + Ny^n + (2O - nM)y^{n-1}x + \cdots + (nS - 2Q)yx^{n-1} - Rx^n \\ \quad + \cdots \end{array}\right. \tag{4}$$

Die drei ersten Glieder dieser Gleichung für sich allein gleich Null gesetzt:

$$By^2 + 2(C - A)yx - Bx^2 = 0$$

stellen das System der beiden Tangenten im Anfangspunkte dar, und die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche diese beiden Tangenten mit der Axe der x bilden, sind durch die Wurzeln folgender Gleichung gegeben:

$$Bt^2 + 2(C - A)t - B = 0, \tag{5}$$

die wir erhalten, indem wir alle Glieder der vorhergehenden Gleichung durch x^2 dividiren und $\frac{y}{x} = t$ setzen*). Diese Gleichung hat *immer* reelle Wurzeln; bezeichnen wir dieselben durch t' und t'', so kommt:

$$t't'' + 1 = 0,$$

d. h. die durch (5) bestimmten Richtungen, die *Krümmungsrichtungen* der gegebenen Fläche in dem gegebenen Punkte, sind auf einander senkrecht.

4. Wenn wir die Axe der y in der Ebene der x, y drehen, bis sie mit der Axe der x irgend einen Winkel ω bildet, so erhalten wir nach den bekannten Coordinatenformeln

$$x + y\cos\omega \text{ für } x, \quad y\sin\omega \text{ für } y.$$

Um ferner zu der Gleichung der Durchschnittscurve der gegebenen Fläche und der neuen Ebene der z, y zu kommen, brauchen wir nur in der Gleichung (1) oder (3) die der obigen Coordinatenverwandlung entsprechenden Substitutionen zu machen und alsdann $x = 0$ zu setzen; oder, was dasselbe ist, sogleich in diesen Gleichungen $y\cos\omega$ für x und $y\sin\omega$ für y zu schreiben. Auf diese Weise ergiebt sich aus (3:

$$(6)\quad \begin{cases} z = y^2(A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega) \\ \quad + y^3(D\sin^3\omega + E\sin^2\omega\cos\omega + F\sin\omega\cos^2\omega + G\cos^3\omega) \\ \quad + \cdots\cdot \\ \quad + y^n(M\sin^n\omega + N\sin^{n-1}\omega\cos\omega + \cdots\cdot + R\sin\omega\cos^{n-1}\omega \\ \qquad\qquad + S\cos^n\omega) \\ \quad + \cdots\cdot \end{cases}$$

Der Krümmungshalbmesser dieser Curve im Anfangspunkte der Coordinaten ist, da $\frac{dz}{dy}$ verschwindet, gleich dem reciproken Werthe von

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 2(A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega).$$

*) Vergl. Euler, Introductio in Analysin infinitorum II.

Um das Maximum oder Minimum dieses Krümmungshalbmessers, wenn wir den Winkel ω als veränderlich betrachten, zu erhalten, brauchen wir nur den vorstehenden Werth für $\frac{d^2z}{dy^2}$ in Beziehung auf ω zu differentiiren und alsdann $\frac{d\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{d\omega}$ gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt, wenn wir zugleich durch $\cos^2\omega$ dividiren und t für tang ω schreiben:

$$Bt^2 + (C - A)t - B = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (5). Die beiden Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche in dem auf derselben gegebenen Punkte sind also zugleich diejenigen Richtungen, nach welchen Ebenen, die auf der Tangentialebene senkrecht stehen, die Fläche in Curven schneiden, deren Krümmungshalbmesser in dem gegebenen Punkte grösste oder kleinste Werthe erhalten.

Wenn wir endlich den Werth des zweiten Differentialcoefficienten gleich Null setzen, so erhalten wir diejenigen Richtungen, nach welchen wir Schnitte führen müssen, damit die Krümmungshalbmesser der Durchschnittscurven unendlich werden. Auf diese Weise kommt, wenn wir hier tang $\omega = u$ setzen:

$$Au^2 + Bu + C = 0.$$

Diese Gleichung hat reelle, imaginäre oder gleiche Wurzeln, je nachdem der Ausdruck $(B^2 - 4AC)$ positiv, negativ oder Null ist. Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch u' und u'', so ist

$$u' + u'' = -\frac{B}{A}.$$

Wenn wir also voraussetzen, dass die Coordinatenaxen ursprünglich so angenommen worden sind, dass $u' + u'' = 0$, so verschwindet auch B, und die Gleichung (5) giebt $t = 0$ oder $t = \infty$. Wir sehen hieraus, dass die Krümmungsrichtungen der Fläche die Scheitelwinkel halbiren, welche von denjenigen Richtungen, nach welchen die Krümmungshalbmesser der Schnitte unendlich sind (von den *Richtungen höheren Contakts*), gebildet werden.

Die Bestimmung der Richtungen höheren Contakts, wenn die beiden Krümmungsrichtungen gegeben sind, ist eine unbestimmte Aufgabe.

5. Wir gehen nun weiter und wollen voraussetzen, dass in der Gleichung (3) der gegebenen Fläche A, B und C Null seien. Alsdann erhalten wir folgende Gleichung:

$$(7) \qquad Ey^3 + (2F - 3D)y^2x + (3G - 2E)yx^2 - Fx^3 = 0,$$

welche das System dreier Tangenten der durch (4) dargestellten Curve in dem Anfangspunkte der Coordinaten, welcher ein dreifacher Punkt (point triple) derselben ist, darstellt. Durch diese Tangenten sind die Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche bestimmt, d. h. wenn wir nach der Richtung dieser Tangenten, vom gegebenen Punkt aus, auf der Fläche fortgehen, so begegnen wir solchen consecutiven Normalen, welche die Normale in jenem Punkte schneiden. Diese Richtungen bilden mit der ersten Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten durch nachstehende Gleichung, die wir aus (7) erhalten, indem wir durch x^3 dividiren und t für $\frac{y}{x}$ schreiben, gegeben sind:

$$(8) \qquad Et^3 + (2F - 3D)t^2 + (3G - 2E)t - F = 0.$$

Wir erhalten die Gleichung der Durchschnittscurve der Fläche und einer durch die Axe der z gehenden Ebene, die mit der Ebene der z, x irgend einen Winkel ω bildet, wenn wir in (6) A, B und C gleich Null setzen. Da für diese Gleichung alsdann die beiden Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ verschwinden, wenn wir z und y gleich Null setzen, so wird der Radius des Krümmungskreises für den Anfangspunkt unendlich und das Maass der Krümmung der Durchschnittscurve in diesem Punkte ist der dritte Differentialcoefficient:

$$\frac{d^3z}{dy^3} = 2 \,.\, 3(D \sin^3\omega + E \sin^2\omega \cos\omega + F \sin\omega \cos^2\omega + G \cos^3\omega).$$

Wenn wir ω als veränderlich betrachten, so erhalten wir für das Maximum oder Minimum dieses Ausdrucks, indem wir wie oben tang $\omega = t$ setzen, folgende Bedingungsgleichung zu erfüllen:

$$Et^3 + (2F - 3D)t^2 + (3G - 2E)t - F = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (8), und somit ist dargethan, dass die *Krümmungsrichtungen* der Fläche zugleich diejenigen Richtungen sind, nach welchen die Schnitte der Fläche ein Maximum oder Minimum der Krümmung haben.

Der dritte Differentialcoefficient verschwindet, wenn wir den Winkel ω vermittelst folgender Gleichung, in der wir u für tang ω schreiben, bestimmen:

$$(9) \qquad Du^3 + Eu^2 + Fu + G = 0.$$

Da diese Gleichung vom dritten Grade ist, so giebt es im Allgemeinen drei Richtungen, nach welchen hin die Fläche mit der Tangentialebene einen Contakt noch höherer Ordnung (der dritten) hat. Diese *Richtungen höheren Contakts* stehen mit den Krümmungsrichtungen in

gegenseitigen Beziehungen, worüber wir in einige Entwicklungen eingehen wollen.

6. Wenn $F = 0$, so wird eine Wurzel der Gleichung (8) gleich Null, d. h. die Axe der x fällt mit einer der drei Krümmungsrichtungen zusammen. Aber alsdann ist zugleich, wenn wir die drei Wurzeln der Gleichung (9) u', u'' und u''' nennen:

$$u'u'' + u'u''' + u''u''' = 0;$$

mithin auch, wenn wir durch $u'u''u'''$ dividiren:

$$\frac{1}{u'''} + \frac{1}{u''} + \frac{1}{u'} = 0. \tag{10}$$

Es ist also die Summe der Cotangenten derjenigen drei Winkel, welche die drei Richtungen höheren Contakts mit einer beliebigen der drei Krümmungsrichtungen bilden, gleich Null. Wenn wir also bei einer beliebigen Annahme der ersten Axe, die Winkel, welche die erstgenannten drei Richtungen mit dieser Axe bilden, α', α'' und α''' nennen, und ω denjenigen Winkel, welchen eine der drei Krümmungsrichtungen mit derselben Axe bildet, so ist

$$\cot(\alpha' - \omega) + \cot(\alpha'' - \omega) + \cot(\alpha''' - \omega) = 0, \tag{11}$$

mithin:

$$\frac{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\omega} + \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha'' \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha'' - \operatorname{tang}\omega} + \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha''' \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha''' - \operatorname{tang}\omega} = 0.$$

Diese Gleichung ist, wenn wir entwickeln, in Beziehung auf $\operatorname{tang}\omega$ vom dritten Grade, und durch ihre drei Wurzeln sind die Krümmungsrichtungen alle drei bestimmt.

7. Wenn wir $G = 0$ setzen, so ergiebt sich aus dem Anblick der Gleichung (9), dass ein Werth von u Null wird, d. h. dass die Axe der x mit einer der drei Richtungen höheren Contakts zusammenfällt. Alsdann folgt aus (8), wenn wir die Wurzeln dieser Gleichung t', t'' und t''' nennen:

$$t't'' + t't''' + t''t''' = -2$$

oder

$$\frac{1}{t'''} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{t'} = -2\left(\frac{1}{t'} \cdot \frac{1}{t''} \cdot \frac{1}{t'''}\right). \tag{12}$$

Es ist also die Summe der Produkte je zweier der trigonometrischen Tangenten derjenigen drei Winkel, welche die Krümmungsrichtungen der Fläche mit einer beliebigen der drei Richtungen höheren Contakts bilden, gleich (-2), oder, was dasselbe heisst, die Summe der Cotangenten dieser drei Winkel, negativ genommen, ist gleich dem doppelten Produkt derselben Cotangenten. Wenn wir, bei einer beliebigen Annahme der ersten Axe, diejenigen Winkel, welche die drei Krümmungsrich-

tungen mit dieser Axe bilden, ω', ω'' und ω''' nennen und α denjenigen Winkel, welchen mit derselben Axe eine beliebige der drei Richtungen höheren Contakts bildet, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$(13) \quad \begin{aligned} &\operatorname{tang}(\omega' - \alpha)\operatorname{tang}(\omega'' - \alpha) + \operatorname{tang}(\omega' - \alpha)\operatorname{tang}(\omega''' - \alpha) \\ &\quad + \operatorname{tang}(\omega'' - \alpha)\operatorname{tang}(\omega''' - \alpha) + 2 = 0, \end{aligned}$$

die zur Bestimmung von α durch ω', ω'' und ω''' zu einer Gleichung des dritten Grades führt.

8. Wir wollen noch einige einzelne Fälle besonders bemerklich machen. Wenn zwei der drei Richtungen höheren Contakts zusammenfallen, so fällt mit denselben auch eine der drei Krümmungsrichtungen zusammen. Dies folgt sogleich daraus, dass, wenn man die Coefficienten F und G der Gleichung (9) gleich Null setzt, auch in der Gleichung (8) das von t unabhängige Glied ausfällt. Wenn alle drei Richtungen höheren Contakts zusammenfallen, so fallen mit ihnen auch zwei der drei Krümmungsrichtungen zusammen, und die dritte steht auf ihnen senkrecht. Der letztere Theil dieser Behauptung ergiebt sich aus dem Anblick von Gleichung (13), in der, wenn $\omega' - \alpha = \omega'' - \alpha = 0$, nothwendig $\omega''' - \alpha$ gleich sein muss $\frac{\pi}{2}$. Die Fläche hat also im engeren Sinne nur eine einzige Krümmung, und die Richtung derselben ist senkrecht auf den Richtungen höheren Contakts.

Wenn eine der Richtungen höheren Contakts und eine der Krümmungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, so halbieren dieselben sowohl diejenigen Scheitelwinkel, welche von den beiden übrigen Linien höheren Contakts, als auch diejenigen, welche von den beiden übrigen Krümmungsrichtungen gebildet werden. Dies erhellet daraus, dass wenn man in (12) $\frac{1}{t'''} = 0$ und in (10) $\frac{1}{u'''} = 0$ setzt, man aus diesen beiden Gleichungen folgende zieht:

$$t' + t'' = 0, \quad u' + u'' = 0.$$

Wenn die drei Richtungen höheren Contakts lauter gleiche Winkel bilden, so werden dieselben von den drei Krümmungsrichtungen halbiert, so dass diese unter einander ebenfalls gleiche Winkel bilden und auf jenen senkrecht stehen.

Es können zwei der drei Krümmungsrichtungen zusammenfallen. Soll dies in der ersten Axe geschehen, so erhalten wir folgende beide Bedingungsgleichungen:

$$F = 0, \quad 3G = 2E,$$

und hiernach zur Bestimmung der Richtungen höheren Contakts, aus (9):

$$\frac{1}{a^3} + \frac{3}{2}\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\frac{D}{E} = 0.$$

Zwei Wurzeln dieser Gleichung sind nothwendig imaginär, weil der Coefficient von $\frac{1}{a}$ positiv ist. Wenn alle drei Krümmungsrichtungen zusammenfallen, so ist zugleich $D = 0$. Die letzte Gleichung zeigt, dass alsdann die einzige reelle Richtung höheren Contakts auf jenen Krümmungsrichtungen senkrecht ist.

9. Die vorstehenden Entwicklungen können wir ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausdehnen, wo die Fläche in dem gegebenen Punkte mit einer Ebene einen Contakt der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hat, und also der zweite Theil der Gleichung (3) mit denjenigen Gliedern anfängt, die y und x in der n^{ten} Potenz enthalten. Statt der Gleichungen (8) und (9) finden wir alsdann folgende:

$$(14) \qquad Nt^n + (2O - nM)t^{n-1} + \cdots + (nS - 2Q)t - R = 0,$$

$$(15) \qquad Mu^n + Nu^{n-1} + Ou^{n-2} + \cdots + Qu^2 + Ru + S = 0.$$

Diese Gleichungen haben beide, wenn n eine ungerade Zahl ist, wenigstens *eine* reelle Wurzel; es giebt also, wenn eine Fläche in einem ihrer Punkte mit einer Ebene einen Contakt von gerader Ordnung hat, in diesem Punkte wenigstens *eine* Krümmungsrichtung und *eine* Richtung eines Contakts der n^{ten} Ordnung. In demjenigen Falle, wo die Ordnung des Contakts eine ungerade ist, braucht die Fläche in dem gegebenen Punkte nach keiner Richtung hin mit der Tangentialebene einen Contakt höherer Ordnung zu haben; *sie hat aber immer wenigstens zwei Krümmungen.* Um diese letztere Behauptung zu beweisen, wird es hinreichend sein, beispielsweise denjenigen Fall zu betrachten, wo $n = 6$. Die Gleichungen (15) und (14) werden in diesem Falle:

$$(16) \qquad Mu^6 + Nu^5 + Ou^4 + Pu^3 + Qu^2 + Ru + S = 0,$$

$$(17) \qquad \begin{aligned} &Nt^6 + (2O - 6M)t^5 + (3P - 5N)t^4 + 4(Q - O)t^3 \\ &+ (5R - 3P)t^2 + (6S - 2Q)t - R = 0. \end{aligned}$$

Wir können, ohne der Allgemeinheit dieser Gleichungen irgend Abbruch zu thun, annehmen, N sei positiv. Wenn alle Wurzeln der Gleichung (17) imaginär sein sollen, so muss nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen, bei obiger Voraussetzung, R negativ sein; es muss ferner der Coefficient von t^2 positiv sein, und folglich ist, da $R < 0$, auch P nothwendig negativ; endlich muss auch der Coefficient von t^4 positiv sein, und folglich ist, da $P < 0$, auch N nothwendig

negativ: was im Widerspruche mit dem Vorstehenden ist. Wir können also als vollständig bewiesen ansehen, dass jede Fläche in jedem ihrer Punkte wenigstens eine oder zwei Krümmungen hat, jenachdem sie in jenem Punkte mit einer Ebene einen Contakt von gerader oder von ungerader Ordnung hat.

10. Wenn wir die erste Axe so bestimmen, dass sie mit einer Krümmungsrichtung zusammenfällt, so wird eine Wurzel der Gleichung (17) Null, und mithin kommt $R = 0$; und hiernach folgt aus der Gleichung (16), dass die Summe der reciproken Werthe der Wurzeln dieser Gleichung Null ist. Also:

Wenn irgend eine Fläche in irgend einem ihrer Punkte mit einer Ebene einen Contakt der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hat, so ist die Summe der Cotangenten derjenigen Winkel, welche die n Richtungen, nach denen die Fläche (im Allgemeinen) mit der Tangentialebene in jenem Punkte einen Contakt der n^{ten} Ordnung hat, mit einer beliebigen der n Krümmungsrichtungen bilden, gleich Null.

Wenn wir $n = 2$ nehmen, so erhalten wir aus dem vorstehenden Satze, als besonderen Fall, den Euler'schen Satz, dass in den gewöhnlichen Fällen die beiden Krümmungen in beliebigen Punkten einer Fläche auf einander senkrecht stehen.

11. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Krümmung der Fläche in dem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Richtung zu bestimmen, wenn dieselbe nach gewissen Richtungen bekannt ist. Nehmen wir sogleich den allgemeinen Fall, dass die Fläche mit der Tangentialebene in dem gegebenen Punkte einen Contakt der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung habe, so erhalten wir (nach Nr. 4) für die Gleichung der Curve des Durchschnittes der Fläche und einer Normalebene, die mit der Ebene der zx irgend einen Winkel ω bildet:

$$z = y^n(M\sin^n\omega + N\sin^{n-1}\omega\cos\omega + \cdots + R\sin\omega\cos^{n-1}\omega + S\cos^n\omega) + \cdots$$

Bezeichnen wir ferner (nach Nr. 1) den Krümmungsparameter dieser Curve im Anfangspunkte der Coordinaten durch p (bei einem Contakte der ersten Ordnung ist p gleich dem Krümmungshalbmesser), so ergiebt sich:

$$(17^a) \qquad \frac{1}{p}\left(= \frac{d^n z}{dy^n}\right)$$

$$= 2.3....n(M\sin^n\omega + N\sin^{n-1}\omega\cos\omega + \cdots + R\sin\omega\cos^{n-1}\omega + S\cos^n\omega).$$

Wir können diese Gleichung als einer Curve angehörig betrachten, indem wir p und ω als Polarcoordinaten konstruiren. Um zu recht-

winkligen Coordinaten überzugehen, brauchen wir nur $\frac{x}{p}$ für $\cos\omega$, $\frac{y}{p}$ für $\sin\omega$ und $\pm\sqrt{(x^2+y^2)}$ für p zu substituiren. Auf diese Weise kommt:

$$(18)\quad (x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}} \pm 2.3\ldots n(My^n+Ny^{n-1}x+\cdots+Ryx^{n-1}+Sx^n)=0,$$

die Gleichung einer Curve, die im Anfangspunkte der Coordinaten einen conjugirten Punkt hat. Wenn wir also diese Curve in der Tangentialebene konstruiren und von dem Berührungspunkte, dem conjugirten Punkte der Curve, nach einem beliebigen Punkte derselben eine gerade Linie ziehen, so bestimmt die Länge dieser Linie den Parameter p einer Parabel der n^{ten} Ordnung (nach Nr. 1), die mit derjenigen Durchschnittscurve, welche in der durch jene gerade Linie gelegten Normalebene sich befindet, im Anfangspunkte der Coordinaten dieselbe Krümmung hat. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so können wir zum Behuf der eben angezeigten Construktion in der Gleichung (18) beliebig das Zeichen + oder − nehmen. Wenn aber n eine gerade Zahl ist, so steigt diese Gleichung durch Fortschaffung der Wurzelgrösse bis zum $2n^{\text{ten}}$ Grade; alsdann ist der conjugirte Punkt zugleich der Mittelpunkt der Curve.

Die Asymptoten der Curve (18) sind parallel den Richtungen höheren Contakts; die von dem conjugirten Punkte nach der Curve gezogenen Normalen bestimmen die Krümmungsrichtungen der Fläche, die im Allgemeinen zugleich das Maximum oder Minimum der Krümmung der verschiedenen Durchschnittscurven anzeigen.

Da die Gleichung (18) $n+1$ Constanten hat und die bezügliche Curve also durch eben so viele Punkte vollständig bestimmt ist, so braucht man auch nur irgend $n+1$ Krümmungen der Fläche nach gegebenen Richtungen zu kennen, um die Krümmung derselben nach jeder beliebigen Richtung zu bestimmen. Zu dieser Bestimmung ist ebenfalls hinreichend, die n Richtungen höheren Contakts und ausserdem noch die Krümmung nach einer beliebigen Richtung zu kennen.

12. Wir wollen das Vorstehende an zwei Beispielen anschaulich machen. Es seien:

$$(19)\quad \begin{cases} z=\frac{1}{6}(3y^2x-2yx^2)+U, \\ z=\frac{1}{6}(y^3+3y^2x+2x^3)+U, \end{cases}$$

(indem wir in U alle diejenigen Glieder zusammenfassen, in denen y und x in höherem als dem dritten Grade vorkommen), die Gleichungen

Univ. of Arizona Library

zweier gegebenen Flächen. Diese Flächen haben mit der Ebene der xy einen Contakt der zweiten Ordnung. Für dieselben verwandelt sich die Gleichung (18) der vorigen Nummer, wenn wir in derselben das Zeichen + nehmen, in folgende beiden:

$$y^2 + x^2 + 3y^2x - 2yx^2 = 0,$$
$$y^2 + x^2 + y^3 + 3y^2x + 2x^3 = 0.$$

Diese Gleichungen sind (für eine beliebig angenommene Einheit) in Fig. 13 und 14*) construirt, was sehr leicht ist, weil, wenn man in denselben $y = mx$ setzt, für jede beliebige Annahme von m, für x drei Werthe sich ergeben, von denen zwei Null sind. Denken wir uns nun die Ebene der Zeichnung als die Tangentialebene der beiden Flächen, OY und OX als die beiden ursprünglichen Axen der y und x, so stellt die von O nach einem beliebigen Punkte M einer der beiden Curven gezogene gerade Linie OM den Krümmungsparameter derjenigen Curve dar, die aus der bezüglichen Fläche durch eine

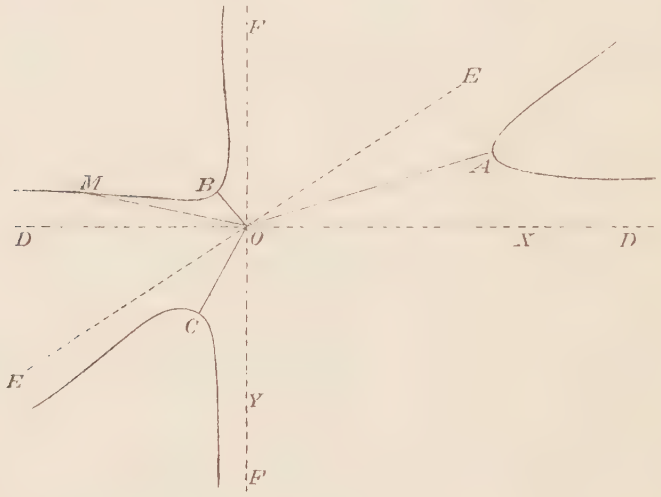

Fig. 13.

Normalebene geschnitten werden kann, welche die Tangentialebene in eben dieser geraden Linie OM schneidet.

Im *ersten* Falle sind (Fig. 13) DD, EE und FF die drei Richtungen des Contaktes der dritten Ordnung zwischen Fläche und Tangentialebene. Im *zweiten* Falle (Fig. 14) giebt es nur *eine* solche Richtung, nämlich DD. Wenn in den Gleichungen (19) U fehlt, so

*) [Die Figurentafel, auf die Plücker oben hingewiesen hat, fehlt im Crelle'schen Journal.]

bestimmen die eben genannten Richtungen gerade Linien, in welchen die Tangentialebene von der bezüglichen Fläche geschnitten wird.

Im *ersten* Falle sind die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die Krümmungsrichtungen mit der ersten Axe bilden, (nach Nr. 5) durch folgende Gleichung gegeben:

$$3t^3 - 4t^2 - 6t + 2 = 0.$$

Die Richtungen dieser Krümmungen sind (Fig. 13) durch die drei geraden Linien OA, OB und OC gegeben und die Parameter derselben durch die Länge dieser Linien. Diese drei Parameter sind Minima. Im *zweiten* Falle erhalten wir statt der letzten Gleichung folgende:

$$t^3 - t^2 = 0,$$

und mithin fallen zwei dieser Krümmungsrichtungen in die erste Axe, (Fig. 14) in OA zusammen, während die dritte in OB fällt. Nach OA ist der Krümmungsparameter der Fläche ein Maximum, nach OB weder ein Maximum noch ein Minimum.

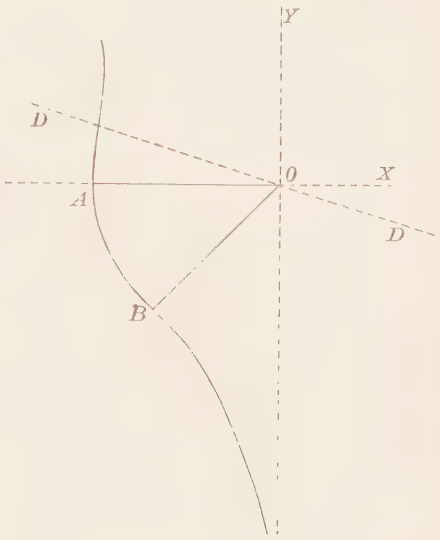

Fig. 14.

13. Wir können auch, indem wir in der Gleichung (17ª) $p = r^m$ setzen, in dieser Gleichung:

$$r^{\frac{1}{m}} = 2.3....n(M\sin^n\omega + N\sin^{n-1}\omega\cos\omega + \cdots + R\sin\omega\cos^{n-1}\omega + S\cos^n\omega)$$

r und ω als Polarcoordinaten betrachten. Wenn wir alsdann, wie in der 11. Nummer, zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, so kommt:

$$(20)\quad (x^2+y^2)^{\frac{n-m}{2}} \pm 2.3....n(My^n + Ny^{n-1}x + \cdots + Ryx^{n-1} + Sx^n) = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung, wie oben die Gleichung (18), in der Tangentialebene konstruiren, so ist allgemein durch die m^{te} Potenz der vom Anfangspunkte der Coordinaten nach irgend einem Punkte der Curve gezogenen geraden Linie der Krümmungsparameter der Fläche nach der bezüglichen Richtung gegeben. Wenn m positiv ist und kleiner als n, so hat die durch (20) dargestellte Curve im Anfangs-

punkte einen conjugirten Punkt. Wenn $m = n$, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$1 = 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, n(My^n + Ny^{n-1}x + \cdots + Ryx^{n-1} + Sx^n).$$

Die Construktion, welche dieser Gleichung entspricht, hat Herr Dupin für den gewöhnlichen Fall $n = 2$ vor längerer Zeit schon gegeben. Wenn m negativ ist, so hat die durch (20) dargestellte Curve im Allgemeinen mehrere Zweige, die sich im Anfangspunkte der Coordinaten schneiden; und die Tangenten der Curve in diesem Punkte bestimmen die Richtungen eines Contaktes der n^{ten} Ordnung.

8.

Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contakt der verschiedenen Ordnungen haben.

(Crelle's Journal, Band 4, S. 349—370. 1829.)

1. Eine gegebene Fläche kann in einem gegebenen Punkte mit einer andern Fläche, die der Art nach, d. h. durch eine Gleichung gegeben ist, in der die Coefficienten beliebig zu bestimmende Grössen sind, einen verschiedenartigen, mehr oder weniger innigen Contakt haben. Je inniger dieser Contakt sein soll, desto mehr Bedingungen müssen befriedigt werden, desto mehr unbestimmte Coefficienten muss die allgemeine Gleichung der osculirenden Fläche haben. Die möglichen Ordnungen des Contaktes pflegt man nach der Zahl dieser Coefficienten zu bestimmen, und nach der gewöhnlichen Entwicklungsweise sind $1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1)$ Coefficienten nothwendig und hinreichend, damit ein Contakt der n^{ten} Ordnung statt habe. Man sieht leicht ein, dass wenn man annimmt, die Gleichung der osculirenden Fläche sei nach steigenden Potenzen der drei Veränderlichen entwickelt, jene unbestimmten Coefficienten nicht zu durchaus willkürlichen Potenzen gehören dürfen. Aber auch mit dieser Beschränkung ist jene Bestimmung nur dann die richtige, wenn der Grad der sich osculirenden Flächen rücksichtlich der Ordnung des Contaktes von einer bestimmten Höhe ist. Denn damit z. B. zwei Flächen dritten und zweiten Grades einen Contakt der 5. Ordnung haben, sind nicht

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

sondern nur

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 15$$

Bedingungsgleichungen zu befriedigen. Ueberdies ist die Bestimmung der möglichen Ordnungen des Contaktes nach der Zahl der Coefficienten der osculirenden Fläche eine durchaus indirekte.

Es scheint mir am natürlichsten und am leichtesten, die Diskussion

des Contaktes zweier Flächen in einem gegebenen Punkte anzuknüpfen an die Theorie des Contaktes der beiden Durchschnittscurven der beiden Flächen mit einer Ebene, die durch den Berührungspunkt geht und die man sich um eine in derselben befindliche, und durch diesen Punkt gehende gerade Linie drehen lässt. Auf diese Weise ergiebt sich zugleich ohne Aufwand von Rechnung die Beantwortung einer Reihe von Fragen, die sich von selbst darbieten und mit denen man sich bisher wenig beschäftigt zu haben scheint. Nach wie vielen Richtungen z. B. müssen zwei Flächen des m^{ten} und m'^{ten} Grades einen Contakt der n^{ten} Ordnung haben, damit ein Contakt derselben Ordnung nach allen Richtungen hin stattfinde? Wenn zwei solche Flächen einen vollständigen Contakt der n^{ten} Ordnung haben, findet alsdann möglicher oder nothwendiger Weise nach gewissen Richtungen ein Contakt der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung statt? Kann dieser Contakt auch von noch höherer Ordnung, der $(n+p)^{\text{ten}}$ sein, und ist er dann nach allen eben bezeichneten Richtungen ein Contakt von dieser höheren Ordnung, oder nur nach einer bestimmten Zahl derselben? In welchen Beziehungen steht die Durchschnittscurve (im Allgemeinen doppelter Krümmung) zu der Ordnung des Contaktes? In welcher Beziehung stehen zu einander, bei den verschiedenen Contaktordnungen, die Durchschnittscurven der beiden Flächen mit der gemeinschaftlichen Tangentialebene? Von welcher Ordnung ist der Contakt, wenn die beiden Flächen sich nach theilweise ebenen Curven schneiden und diese in der Tangentialebene zusammenfallen? Und umgekehrt, von welcher Ordnung muss der Contakt sein, damit die beiden Flächen nach einer oder mehreren zusammenfallenden Ebenen sich berühren? u. s. w.

„Wenn zwei Curven sich osculiren, so vereinigen sich im Osculationspunkte mehrere Durchschnittspunkte.“ Diesen Satz betrachtet man gewöhnlich als eine Folge des Princips der Continuität: ich habe ihn in meinen „*Entwicklungen*“*), um darauf die Theorie der Osculation ebener Curven zu gründen, lediglich als die geometrische Interpretation eines algebraischen Faktums, nämlich der gleichen Wurzeln derjenigen Gleichungen betrachtet, die man erhält, indem man nach einander zwischen den Gleichungen der beiden Curven jede der Veränderlichen eliminirt. Beim Contakte von Flächen kann zwar von einem Zusammenfallen einer bestimmten Anzahl von Durchschnittspunkten unmittelbar nicht mehr die Rede sein; für das Analoge erhalten wir hier aber Folgendes. „Wenn irgend zwei Flächen einen Contakt der n^{ten} Ordnung haben, so vereinigen sich in dem Contaktpunkte $(n+1)$ Zweige

*) [Band I, § 348 nebst Anmerkung, S. 225 ff.]

der Durchschnittscurve der beiden Flächen (Zweige die paarweise genommen imaginär werden können) oder, mit andern Worten, der Contaktpunkt ist ein $(n+1)$facher Punkt dieser Curve." (Wenn wir also durch den Contaktpunkt irgend eine Ebene legen, so wird dieselbe in diesem Punkte von den $(n+1)$ Zweigen der Durchschnittscurve in $(n+1)$ zusammenfallenden Punkten geschnitten. Diese Punkte bilden den Osculationspunkt derjenigen beiden Curven, nach welchen jene Ebene die beiden Flächen schneidet.) Auf diesen Satz könnten wir die Theorie des Contaktes zweier Flächen in einem gegebenen Punkte gründen. Nur würde diese Art zu verfahren mehr Rechnung erfordern, als die oben angedeutete, weil wir nothwendig die Gleichung einer Projektion der Durchschnittscurve der beiden Flächen entwickeln müssten. Wenn (wodurch die Untersuchung aber ungemein eingeschränkt wird) in den Gleichungen der beiden Flächen z als Funktion von y und x:

$$z = \varphi(y, x), \quad z = \psi(y, x)$$

gegeben ist, so erhält man für die Gleichung der Projektion der Durchschnittscurve auf die Ebene der y und x

$$\varphi(y, x) = \psi(y, x).$$

Um auszudrücken, dass diese Curve durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehe, in diesem Punkte einen Doppelpunkt, einen dreifachen, vierfachen etc. Punkt habe, müssen wir, nach der bekannten Theorie, die letzte Gleichung nach steigenden Potenzen von y und x entwickeln, und dann das constante Glied, die Coefficienten der ersten, zweiten, dritten etc. Potenzen der beiden Veränderlichen gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir auf der Stelle die bekannten Bedingungsgleichungen, welche uns die gewöhnliche Theorie des Contaktes zweier Flächen giebt.

In den nachstehenden Entwicklungen habe ich, nach der zuerst bezeichneten Methode, die Theorie des Contaktes einer Fläche zweiter Ordnung mit einer andern Fläche derselben Ordnung und mit einer Fläche dritter Ordnung vollständig behandelt, um mich so, auf dem Wege der Induktion, zu den allgemeinen Gesetzen führen zu lassen, nach welchen überhaupt irgend zwei Flächen, namentlich zwei algebraische von bestimmten Graden, sich osculiren. Was hier noch unvollständig bleiben mag, gedenke ich später an einem andern Orte nachzutragen.

2. Bei der Annahme durchaus beliebiger Coordinatenaxen seien:

$$(1)\quad \begin{cases} Az^2 + 2Bzy + 2Czx + Dy^2 + 2Eyx + Fx^2 \\ \qquad + 2Gz + 2Hy + 2Kx = 0, \\ A'z^2 + 2B'zy + 2C'zx + D'y^2 + 2E'yx + F'x^2 \\ \qquad + 2G'z + 2H'y + 2K'x = 0, \end{cases}$$

die Gleichungen irgend zweier durch den Anfangspunkt gehender Flächen zweiter Ordnung. Alsdann stellen bekanntlich die linearen Theile dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} Gz + Hy + Kx &= 0, \\ G'z + H'y + K'x &= 0, \end{aligned}$$

die Tangentialebenen der beiden Flächen im Anfangspunkte der Coordinaten dar. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist eine beiden Flächen gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir diese Linie zur Axe der x, so ergiebt sich $K = K' = 0$. Wenn die beiden Flächen *dieselbe* Tangentialebene haben, so müssen die beiden letzten Gleichungen identisch sein. Dies erfordert überdies noch $\frac{H}{G} = \frac{H'}{G'}$. Wenn diese gemeinschaftliche Tangentialebene mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, so muss H und H' verschwinden. Diesen Bestimmungen gemäss nehmen die Gleichungen (1) folgende Form an:

$$(2)\quad \begin{cases} Az^2 + 2Bzy + 2Czx + Dy^2 + 2Eyx + Fx^2 + 2Gz = 0, \\ A'z^2 + 2B'zy + 2C'zx + D'y^2 + 2E'yx + F'x^2 + 2G'z = 0. \end{cases}$$

3. Wenn wir die Axe der x in der Tangentialebene um irgend einen Winkel α fortrücken lassen, um alsdann die Durchschnittscurven der beiden gegebenen Flächen mit der neuen Ebene der $z\,x$ zu bestimmen, so brauchen wir nur, wie bekannt, wenn wir den von den Axen der y und x gebildeten Winkel β nennen, $x\sin(\beta - \alpha)$ für x, und $x\sin\alpha$ für y in den letzten beiden Gleichungen zu substituiren und nachher $y = 0$ zu setzen. Auf diese Weise ergeben sich folgende beide Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} az^2 + 2czx + fx^2 + 2gz = 0, \\ a'z^2 + 2c'zx + f'x^2 + 2g'z = 0, \end{cases}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$\begin{gathered} a = A, \quad c = B\sin\alpha + C\sin(\beta - \alpha), \\ f = D\sin^2\alpha + 2E\sin\alpha\sin(\beta - \alpha) + F\sin^2(\beta - \alpha), \quad g = G, \\ a' = A', \quad c' = B'\sin\alpha + C'\sin(\beta - \alpha), \\ f' = D'\sin^2\alpha + 2E'\sin\alpha\sin(\beta - \alpha) + F''\sin^2(\beta - \alpha), \quad g' = G', \end{gathered}$$

setzen. Die beiden durch (3) dargestellten Curven berühren sich immer im Anfangspunkte der Coordinaten, welches auch der Winkel α sein mag. Wenn der Contakt in diesem Punkte ein dreipunktiger sein soll, so wird erfordert, dass

$$\frac{q}{f} = \frac{q'}{f'},$$

und mithin, wenn wir substituiren:

$$G[D' \sin^2\alpha + 2E' \sin\alpha \sin(\beta - \alpha) + F' \sin^2(\beta - \alpha)]$$
$$= G'[D \sin^2\alpha + 2E \sin\alpha \sin(\beta - \alpha) + F \sin^2(\beta - \alpha)].$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir entwickeln, und der Kürze halber für den Ausdruck $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$, der, wenn der Coordinatenwinkel β ein rechter ist, in $\tang\alpha$ übergeht, φ schreiben, folgende quadratische Gleichung:

(4) $$(GD' - G'D)\varphi^2 + 2(GE' - G'E)\varphi + (GF' - G'F) = 0.$$

Also:

Wenn irgend zwei Flächen zweiter Ordnung in demselben Punkte eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben, so gibt es überdies, im Allgemeinen, zwei Richtungen, nach welchen die Flächen dieselbe Krümmung, d. h. einen Contakt von drei Punkten haben.

Die eine dieser Richtungen fällt mit der ersten oder zweiten Axe, oder beide Richtungen fallen mit den beiden Axen zusammen, wenn

$$GF' = G'F \text{ oder } GD' = G'D,$$

oder wenn zugleich

$$GF' = G'F \text{ und } GD' = G'D.$$

4. Die folgende geometrische Beziehung der beiden in Rede stehenden Richtungen ergiebt sich unmittelbar aus der Form der Gleichung (4), in der das zweite Glied ausfällt, wenn $E = E' = 0$. Wenn man nämlich irgend eine den beiden Flächen begegnende, der Tangentialebene parallele Ebene legt, so haben die beiden Durchschnittscurven in dieser Ebene, wie überhaupt je zwei in derselben Ebene befindliche Linien zweiter Ordnung, ein gemeinschaftliches System zugeordneter Durchmesser. Wenn man alsdann durch den Berührungspunkt beider Flächen diesen beiden Durchmessern zwei gerade Linien parallel zieht, so bilden diese mit denjenigen beiden geraden Linien, nach welchen die beiden gegebenen Flächen dieselbe Krümmung haben, ein System von solchen vier geraden Linien, die man „*Harmonicalen*“ nennt.

Wenn eine der beiden sich berührenden Flächen, etwa die erste, eine Kugel ist, oder wenn auch nur der Berührungspunkt ein „*ombilic*“ dieser Fläche ist, so hat man, bei der Voraussetzung rechtwinkliger

Coordinaten, immer $E = 0$, und indem man die Axen der x und y nach den Hauptkrümmungsrichtungen der zweiten Fläche nimmt, verschwindet auch E'. Man erhält also für φ oder tang α zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, so dass die durch α bestimmten Richtungen gemeinschaftlicher Krümmung mit den Hauptkrümmungsrichtungen der zweiten Fläche gleiche Winkel bilden.

Wenn der Berührungspunkt ein *„ombilic"* beider Flächen zugleich ist, so verliert die Gleichung (4) ihre Bedeutung; denn alsdann hat man

$$D = F, \quad D' = F', \quad E = E' = 0,$$

und mithin:

$$f = F, \quad f' = F'.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'} \quad \text{oder} \quad \frac{G}{F} = \frac{G'}{F'}$$

werden also entweder gar nicht befriedigt, oder für jeden beliebigen Werth von α. Dasselbe ergiebt sich auch a priori.

5. Wenn wir die Gleichungen (2) addiren, nachdem wir die zweite derselben mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt haben, so erhalten wir:

$$(A + \mu A')z^2 + 2(B + \mu B')zy + 2(C + \mu C')zx + (D + \mu D')y^2$$
$$+ 2(E + \mu E')yx + (F + \mu F')x^2 + 2(G + \mu G')z = 0$$

für die allgemeine Gleichung aller Flächen zweiter Ordnung, welche mit den beiden gegebenen dieselbe Durchschnittscurve haben. Sollen sich diese Flächen daher *in ebenen Curven schneiden*, und eine derselben in die Ebene der xy fallen, wo sich dieselbe alsdann auf einen Punkt oder ein System von zwei geraden Linien reducirt, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$D + \mu D' = 0, \quad E + \mu E' = 0, \quad F + \mu F' = 0,$$

mithin

$$\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}. \tag{5}$$

Diese Gleichungen enthalten zwei von einander unabhängige Bedingungen, von denen aber nur eine auf die Natur der Flächen sich bezieht. Denn wir können *immer* in den ursprünglichen Gleichungen (2) die Coefficienten von xy beide fortschaffen, indem wir die Richtung der Axen der x und y ändern.

Vermittelst der Gleichungen (5) können wir die Gleichung (4) der dritten Nummer auf jede der beiden nachstehenden zurückführen:

$$D\varphi^2 + 2E\varphi + F = 0,$$
$$D'\varphi^2 + 2E'\varphi + F' = 0;$$

woraus hervorgeht, dass alsdann die in jener Nummer bezeichneten Richtungen gleicher Krümmung diejenigen sind, *nach welchen die Krümmungen beider Flächen unendlich werden.* Die Hauptkrümmungen der beiden Flächen haben dieselben Richtungen, und nach jeder beliebigen Richtung ist das Verhältniss der Krümmungen beider Flächen ein constantes.

6. Die zweite Durchschnittsebene der beiden gegebenen Flächen wird, bei den eben gemachten Voraussetzungen, durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(6)\quad (A+\mu A')z+2(B+\mu B')y+2(C+\mu C')x+(G+\mu G')=0.$$

Soll diese Ebene durch den Berührungspunkt gehen, so ist nothwendig

$$G+\mu G'=0,$$

und also nach der vorigen Nummer:

$$(7)\qquad \frac{D}{D'}=\frac{E}{E'}=\frac{F}{F'}=\frac{G}{G'},$$

wonach die Gleichung (4) der zweiten Nummer für jeden beliebigen Werth von φ befriedigt wird, und umgekehrt: diese Gleichung wird nur dann befriedigt, abgesehen von dem besondern, am Ende der dritten Nummer betrachteten Falle, wenn die in (7) enthaltenen Gleichungen statt haben. Diese Gleichungen enthalten also die Bedingungen einer *dreipunktigen Osculation nach allen Richtungen.* Diese findet nur dann statt, *wenn die gegebenen Flächen sich in demselben Punkte so berühren, dass sie ausserdem noch in einer ebenen Curve sich schneiden und diese Curve durch den Berührungspunkt geht.*

7. Die Gleichungen (3) stellen in dem eben betrachteten Falle zwei Durchschnittscurven dar, die sich immer im Anfangspunkte osculiren, welches auch der Winkel α sein mag. Soll diese Osculation eine *vierpunktige* sein, so erhalten wir, wie bekannt, neben der Bedingungsgleichung

$$\frac{g}{f}=\frac{g'}{f'}$$

noch eine zweite:

$$\frac{c}{f}=\frac{c'}{f'},$$

statt welcher wir auch folgende nehmen können:

$$\frac{g}{c}=\frac{g'}{c'},$$

oder, wenn wir substituiren, folgende:

$$G[B'\sin\alpha+C'\sin(\beta-\alpha)]=G'[B\sin\alpha+C\sin(\beta-\alpha)].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$(GB' - G'B)\varphi + (GC' - G'C) = 0. \tag{8}$$

Also:

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung nach allen Richtungen hin einen dreipunktigen Contakt haben, so findet überdies nach einer Richtung hin ein Contakt von vier Punkten statt.

Die obige Gleichung zeigt, dass diese Richtung eines höheren Contaktes durch die Durchschnittslinie der Durchschnittsebene (6) der beiden gegebenen Flächen mit ihrer gemeinsamen Tangentialebene angezeigt wird; wie dies auch a priori sich leicht einsehen lässt.

8. Wenn die beiden Gleichungen (4) und (8) *zugleich* bestehen sollen, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$(GD' - G'D)(GC' - G'C)^2 + (GF' - G'F)(GB' - G'B)^2 - 2(GE' - G'E)(GC' - G'C)(GB' - G'B) = 0.$$

In diesem Falle ist die Osculation der beiden gegebenen, sich bloss berührenden Flächen, die im Allgemeinen nach dem Satze der dritten Nummer nach zwei Richtungen hin statt hat, nicht nach beiden Richtungen eine *dreipunktige*, sondern nach einer derselben eine *vierpunktige*, und immer eine *reelle*.

9. Für den Fall eines vollständigen Contaktes zweiter Ordnung nimmt die Gleichung (6) nach dem Vorstehenden folgende Form an:

$$(A + \mu A')z + 2(B + \mu B')y + 2(C + \mu C')x = 0.$$

Soll die bezügliche Durchschnittsebene mit der Tangentialebene zusammenfallen, so ist nothwendig und hinreichend, dass

$$B + \mu B' = 0, \quad C + \mu C' = 0.$$

Eine dieser beiden Bedingungsgleichungen wird wieder auf Rechnung der Coordinatenannahme kommen, denn man kann die Richtung der dritten Axe so verändern, dass aus den beiden Gleichungen (2) die Coefficienten von zy oder zx zugleich verschwinden. Der Werth von φ erscheint nach diesen Bedingungsgleichungen unter der nicht reducirbaren Form $\frac{0}{0}$; es findet also, und es findet nur in diesem Falle *nach allen Richtungen hin eine vierpunktige Osculation* der beiden Flächen statt. Wir haben also in diesem Falle folgende Bedingungen:

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}. \tag{9}$$

Es giebt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die mit einer gegebenen in einem gegebenen Punkte einen vollständigen Contakt der dritten Ordnung haben. Eine solche Fläche ist vollkommen be-

stimmt, wenn überdies irgend ein Punkt, durch welchen sie gehen, oder irgend eine Ebene, die sie berühren soll, gegeben ist.

Die vorstehenden Entwicklungen enthalten *die vollständige Theorie des Contaktes zweier Flächen zweiter Ordnung* in einem gegebenen Punkte. Ich könnte an dieselbe unmittelbar eine Reihe interessanter Constructionen knüpfen, dem analog, wie ich es in meinen *„Entwicklungen"* in Beziehung auf Osculation der Linien zweiter Ordnung gethan habe.*) Doch dies liegt nicht in der Absicht gegenwärtigen Aufsatzes. Ich gehe daher sogleich über *zu der vollständigen Theorie der Osculation zweier Flächen zweiter und dritter Ordnung.*

10. Die Gleichungen irgend zweier Flächen dritter und zweiter Ordnung, welche von der Ebene der yx im Anfangspunkte berührt werden, seien, bei derselben Coordinatenbestimmung wie bisher, folgende:

$$(1)\begin{cases} Az^3+Bz^2y+Cz^2x+Dzy^2+Ezyx+Fzx^2+Gy^3+Hy^2x+Jyx^2+Kx^3 \\ \quad +Lz^2+Mzy+Nzx+Oy^2+Pyx+Qx^2+Rz=0, \\ \quad L'z^2+M'zy+N'zx+O'y^2+P'yx+Q'x^2+R'z=0. \end{cases}$$

Wenn wir die Axe der x in der Tangentialebene um irgend einen Winkel α sich drehen lassen, und durch diese neue Axe der x und die Axe der z eine Ebene legen, so müssen wir, um die Gleichungen der Durchschnittscurven der beiden gegebenen Flächen mit dieser Ebene zu finden, in den vorstehenden Gleichungen $x\sin\alpha$ für y und $x\sin(\beta-\alpha)$ für x schreiben und dann $y=0$ setzen. Auf diese Weise kommt:

$$(2)\begin{cases} az^3+bz^2x+czx^2+dx^3+ez^2+fzx+gx^2+hz=0, \\ e'z^2+f'zx+g'x^2+h'z=0, \end{cases}$$

indem wir der Kürze halber

$$a=A,\ b=B\sin\alpha+C\sin(\beta-\alpha),$$
$$c=D\sin^2\alpha+E\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+F\sin^2(\beta-\alpha),$$
$$d=G\sin^3\alpha+H\sin^2\alpha\sin(\beta-\alpha)+J\sin\alpha\sin^2(\beta-\alpha)+K\sin^3(\beta-\alpha),$$
$$e=L,\quad f=M\sin\alpha+N\sin(\beta-\alpha),$$
$$g=O\sin^2\alpha+P\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+Q\sin^2(\beta-\alpha),\quad h=R,$$
$$e'=L',\quad f'=M'\sin\alpha+N'\sin(\beta-\alpha),$$
$$g'=O'\sin^2\alpha+P'\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+Q'\sin^2(\beta-\alpha),\quad h'=R'$$

setzen. Wenn die durch die Gleichungen (2) dargestellten Curven sich dreipunktig osculiren sollen, so hat man folgende Bedingungsgleichung:

---

*) [Vgl besonders §§ 354 ff., S. 233–241.]

$$hg' - h'g = 0,^*)$$

aus der wir, ähnlich wie in der dritten Nummer, folgende erhalten:

$$(3) \quad (RO' - R'O)\varphi^2 + (RP' - R'P)\varphi + (RQ' - R'Q) = 0.$$

Also:

Wenn eine Fläche zweiter und eine Fläche dritter Ordnung in demselben Punkte von derselben Ebene berührt werden, so giebt es im Allgemeinen zwei Richtungen, nach denen zwischen den beiden Flächen ein Contakt von drei Punkten statt hat.

Es hat die Durchschnittscurve der beiden Flächen im Berührungspunkte derselben einen *Doppelpunkt*, einen *Rückkehrpunkt* oder einen *conjugirten Punkt;* und mithin im ersten Falle in diesem Punkte *zwei Tangenten*, die im zweiten Falle *zusammenfallen* und im dritten Falle *imaginär werden*. Diese Tangenten zeigen die Richtungen jener *dreipunktigen* Osculation an. Dasselbe gilt offenbar von je zwei Flächen jedes beliebigen Grades.

11. *Soll nach allen Richtungen hin ein Contakt zweiter Ordnung stattfinden*, so muss die Gleichung (3) für jeden beliebigen Werth von φ befriedigt werden. Dies führt uns zu folgenden drei Bedingungsgleichungen:

$$(4) \qquad RO' = R'O, \quad RP' = R'P, \quad RQ' = R'Q,$$

*) Man erhält nach meinen *„Entwicklungen"* S. 227, Note, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) && hg' - h'g = 0,\\ &(b) && fg' - f'g - h'd = 0,\\ &(c) && g'(g'e - ge') = h'(cg' - df'),\\ &(d) && g'(bg' - de') = f'(cg' - df'). \end{aligned}$$

Die erste dieser vier Gleichungen zeigt eine *dreipunktige* Osculation der Curven (2) im Anfangspunkte der Coordinaten an, die zwei ersten zeigen eine *vierpunktige*, die drei ersten eine *fünfpunktige*, und endlich alle vier zusammen eine *sechspunktige* Osculation an. Wenn man zu den vorstehenden vier Gleichungen noch folgende fünfte hinzufügt:

$$(e) \quad ag'^2 = e'(cg' - df'),$$

so wird dadurch ausgedrückt, dass die Linie dritter Ordnung aus dem Systeme der Linie zweiter Ordnung und irgend einer geraden Linie besteht. Statt der drei letzten Gleichungen (c), (d), (e) können wir folgende drei nehmen:

$$\begin{aligned} &(c') && h'g'(h'g'e - h'e'g - h'^2c + h'f'f - f'^2h) = 0,\\ &(d') && g'^2(h'^2b - h'e'f + f'e'h - f'h'e + f'e'h) = 0,\\ &(e') && g'^2(h'e'e - e'^2h - h'^2a) = 0, \end{aligned}$$

Gleichungen, die wir erhalten, indem wir die jedesmalig vorhergehenden berücksichtigen.

oder

$$\frac{O}{O'} = \frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}.$$

Wir wären zu denselben Bedingungsgleichungen gekommen, wenn wir statt der gegebenen Fläche dritter Ordnung diejenige Fläche in Betracht gezogen hätten, die durch denjenigen Theil ihrer Gleichung dargestellt wird, der die veränderlichen Grössen nur in der ersten und zweiten Potenz enthält. Es ist klar, dass wir überhaupt in allen denjenigen Fällen, wo es sich bloss um einen Contakt zweiter Ordnung zwischen irgend zweien Flächen (algebraischen oder transcendenten) in einem gegebenen Punkte handelt, zwei Flächen zweiter Ordnung nehmen können, deren Gleichungen wir aus den Gleichungen jener Flächen (nöthigenfalls entwickelt) auf die eben angezeigte Weise erhalten.

12. Wenn irgend eine (algebraische oder transcendente) Fläche in irgend einem Punkte von einer Ebene berührt wird, so schneidet diese Ebene die Fläche in einer solchen Curve, die im Berührungspunkte einen *Doppelpunkt*, einen *Rückkehrpunkt* oder einen *conjugirten Punkt* hat. Wenn zwei Flächen von *derselben* Ebene in *demselben* Punkte berührt werden, *so enthält diese Ebene zwei Durchschnittscurven mit demselben Doppelpunkte.* Wenn der Contakt der beiden Flächen ein vollständiger der *zweiten Ordnung* ist, so erhalten wir nach (4) der vorhergehenden Nummer, wenn wir, was in unserer Willkür steht, die Coefficienten von z in den Gleichungen beider Flächen gleich setzen ($R = R'$), auch gleiche Coefficienten von y^2, yx und x^2, *so dass also die Durchschnittscurven der beiden Flächen mit der Tangentialebene in dem gemeinschaftlichen Doppelpunkte dieselben beiden Tangenten haben.* In dem Falle, dass eine osculirende Fläche vom zweiten Grade ist, sind diese Tangenten (die imaginär werden können und alsdann auf einen Punkt sich reduciren) diejenigen beiden geraden Linien selbst, nach welchen die Berührungsebene jene Fläche schneidet. Zugleich ersieht man auf diese Weise, dass, wenn zwei Flächen zweiter Ordnung einen Contakt der zweiten Ordnung haben, die Durchschnittslinien beider Flächen mit der Tangentialebene (ein System von zwei geraden Linien oder eine Ellipse, die auf einen Punkt sich reducirt hat) dieselben sind, und sich also die beiden Flächen nach derselben Ebene berühren und überdies in einer ebenen Curve schneiden. — Umgekehrt ist es nicht hinreichend, dass die beiden Durchschnittscurven in der gemeinschaftlichen Tangentialebene zweier Flächen dieselben beiden Tangenten haben, auch nicht, dass diese beiden Curven durchaus dieselben sind, damit die beiden Flächen einen vollständigen Contakt der zweiten Ordnung haben.

13. Damit der Contakt der beiden Curven (2) ein *vierpunktiger* sei, muss neben der früheren Gleichung auch noch folgende bestehen:

$$fg' - f'g - h'd = 0.$$

Substituiren wir für die in dieser Gleichung vorkommenden Ausdrücke ihre Werthe und dividiren zugleich durch $\sin^3(\beta - \alpha)$, so kommt:

$$(5)\quad \begin{cases} (MO' - M'O - R'G)\varphi^3 + (MP' - M'P + NO' - N'O - R'H)\varphi^2 \\ + (MQ' - M'Q + NP' - N'P - R'J)\varphi + (NQ' - N'Q - R'K) = 0. \end{cases}$$

Also:

Wenn zwei Flächen zweiten und dritten Grades einen vollständigen Contakt der zweiten Ordnung haben, so findet überdies im Allgemeinen nach dreien, und immer wenigstens nach einer Richtung, eine vierpunktige Osculation statt.

Die Durchschnittscurve beider Flächen (doppelter Krümmung) hat im Anfangspunkte der Coordinaten einen *dreifachen* Punkt (diesen Ausdruck in einer ausgedehnteren Bedeutung als gewöhnlich genommen) und also drei Tangenten, von denen zwei imaginär werden können. Nach diesen Tangenten findet jene vierpunktige Osculation statt. Dasselbe gilt offenbar, wenn wir die Fläche dritter Ordnung mit irgend einer beliebigen vertauschen.

14. *Wenn der Contakt nach allen Richtungen hin ein vierpunktiger sein soll,* so ergeben sich folgende vier Bedingungsgleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} MO' - M'O = R'G, \\ MP' - M'P + NO' - N'O = R'H, \\ MQ' - M'Q + NP' - N'P = R'J, \\ NQ' - N'Q = R'K. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen, sowie die drei Gleichungen (4), sind alle sieben rücksichtlich der Constanten jeder der beiden Gleichungen (1) linear, und da keine derselben eine Folge der andern ist, so enthalten sie sieben von einander unabhängige Bedingungen. Diese sieben Bedingungen können im Allgemeinen nicht erfüllt werden, wenn man die erste Fläche als eine gegebene, die zweite als eine zu bestimmende und demgemäss die Constanten ihrer Gleichung als unbestimmte Coefficienten betrachtet. Da die Gleichungen (4) und (6) kein von diesen Constanten unabhängiges Glied enthalten, so kann von einer absoluten Bestimmung derselben nicht die Rede sein; wenn wir aber eine derselben, etwa R', beliebig annehmen, so geben fünf von jenen sieben Gleichungen die Werthe von M', N', O' P' und Q'. Der Coefficient L' kommt in diesen Gleichungen gar nicht vor; wenn daher die

durch fünf jener Gleichungen bestimmten Werthe auch die beiden übrigen der sieben Gleichungen befriedigen, *wodurch zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten der gegebenen Fläche dritter Ordnung angezeigt werden*[1]), so giebt es unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die mit der gegebenen Fläche in dem gegebenen Punkte einen vollständigen Contakt der dritten Ordnung haben. Die Gleichungen aller dieser Flächen stimmen, wenn wir einem Coefficienten, dem von z z. B., denselben beliebigen Werth beilegen, auch in allen übrigen Coefficienten, ausgenommen in dem von z^2, überein. Dasselbe ergiebt sich auch a priori, weil offenbar alle jene osculirenden Flächen zweiter Ordnung auch unter sich einen Contakt der dritten Ordnung haben.

15. Wenn die beiden gegebenen Flächen einen vollständigen Contakt dritter Ordnung haben, so haben sie nach gewissen Richtungen auch einen *Contakt vierter Ordnung.* Wenn wir die Durchschnittscurven nach einer solchen Richtung wiederum durch die Gleichungen (2) darstellen, so erhalten wir zu den beiden früheren Bedingungsgleichungen noch folgende:

$$h'g'(h'g'e - h'e'g - h'^2c + h'f'f - f'^2h) = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung wird zuvörderst befriedigt, wenn wir den in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck gleich Null setzen. Dies führt uns, wenn wir substituiren und entwickeln, zu folgender Gleichung:

$$\left.\begin{array}{c}(R'O'L - R'L'O - R'^2D + R'M'M - M'^2R)\varphi^2\\ +(R'P'L - R'L'P \quad R'^2E + R'M'N + R'N'M - 2M'N'R)\varphi\\ +(R'Q'L - R'L'Q - R'^2F + R'N'N - N'^2R) = 0.\end{array}\right\} \tag{8}$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf φ vom zweiten Grade ist, *so giebt es hiernach im Allgemeinen zwei Richtungen, nach welchen der Contakt der beiden Flächen ein fünfpunktiger ist.* Diese Richtungen werden durch zwei Tangenten an die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen angezeigt.

Die Gleichung (7) wird ebenfalls befriedigt, wenn man $g' = 0$ setzt. Dies führt zu folgender Gleichung:

$$O'\varphi^2 + P'\varphi + Q' = 0,$$

die nach der 11. Nummer mit folgender identisch ist:

$$O\varphi^2 + P\varphi + Q = 0.$$

Die Bedeutung hiervon wird sich später in der 22. Nummer ergeben.

16. *Wenn der Contakt nach allen Richtungen hin ein fünfpunktiger sein soll,* so ergeben sich folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$(9)\begin{cases} R'O'L - R'L'O - R'^2D + R'M'M - M'^2R = 0, \\ R'P'L - R'L'P - R'^2E + R'M'N + R'N'M - 2M'N'R = 0, \\ R'Q'L - R'L'Q - R'^2F + R'N'N - N'^2R = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Fläche zweiter Ordnung als eine gegebene betrachten, so können wir die Fläche dritter Ordnung immer auf solche Weise bestimmen, dass die Gleichungen (4), (6) und (9) alle zehn befriedigt werden. Diese Gleichungen sind alle in Beziehung auf die Constanten der Gleichung der Fläche dritter Ordnung linear.

17. Sollen in dem Falle eines vollständigen Contakts der vierten Ordnung die durch (2) dargestellten Durchschnittscurven einen *sechspunktigen* Contakt haben, so muss auch noch folgende Gleichung befriedigt werden:

$$(10) \qquad g'^2(h'^2b - h'e'f + f'e'h - f'h'e + f'e'h) = 0.$$

Abstrahiren wir von dem quadratischen Faktor g'^2, so wird diese Gleichung nur dann befriedigt, wenn der in der Klammer befindliche Faktor verschwindet. Wenn wir substituiren und entwickeln, so kommt:

$$(11)\begin{cases} (R'^2B - L'R'M + L'M'R - R'M'L + L'M'R)\varphi \\ + (R'^2C - L'R'N + L'N'R - R'N'L + L'N'R) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung giebt uns, da sie in Beziehung auf φ nur vom ersten Grade ist, *eine einzige Richtung eines sechspunktigen Contaktes.* Diese Richtung ist durch eine Tangente an die Durchschnittscurve der beiden Flächen angezeigt.

18. *Soll der Contakt nach allen Richtungen hin ein sechspunktiger sein,* so erhalten wir folgende zwei neue, in Beziehung auf die Coefficienten der Gleichung der Fläche dritter Ordnung ebenfalls lineare Bedingungsgleichungen:

$$(12)\begin{cases} R'^2B - L'R'M + L'M'R - R'M'L + L'M'R = 0, \\ R'^2C - L'R'N + L'N'R - R'N'L + L'N'R = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten hiernach im Ganzen zwölf Bedingungsgleichungen.

19. Um endlich noch auszudrücken, dass die erste der durch (2) dargestellten Durchschnittscurven aus dem Systeme der anderen und einer geraden Linie bestehe, erhalten wir folgende neue Bedingungsgleichung:

$$g'^2(h'e'e - e'^2h - h'^2a) = 0.$$

Wenn wir von dem Faktor g'^2 abstrahiren, so erhalten wir, indem wir substituiren:

$$(13) \qquad R'L'L - L'^2R - R'^2A = 0,$$

eine Gleichung, die vom Winkel α unabhängig ist. Wird daher diese Gleichung befriedigt, *so besteht die osculirende Fläche dritter Ordnung aus dem Systeme der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und irgend einer Ebene.*

20. Da die geometrischen Beziehungen, um die es uns hier hauptsächlich zu thun ist, von jeder Coordinatenannahme unabhängig sind, so können wir die Discussion sehr erleichtern, wenn wir für die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung, *die wir als eine gegebene betrachten*, folgende nehmen:

$$\alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + z = 0, \tag{14}$$

welche, bei gehöriger Bestimmung von α, β und γ, jede beliebige Fläche dieser Ordnung darstellt. Die Gleichung der Fläche dritter Ordnung ist, indem wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Coefficienten von z gleich Eins setzen, folgende:

$$\begin{cases} Az^3 + Bz^2y + Cz^2x + Dzy^2 + Ezyx + Fzx^2 + Gy^3 + Hy^2x \\ +Jyx^2 + Kx^3 + Lz^2 + Mzy + Nzx + Oy^2 + Pyx + Qx^2 + z = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Alsdann erhält man

1) aus den Gleichungen (4) folgende Bedingungsgleichungen für einen vollständigen Contakt von drei Punkten:

$$O = \beta, \quad P = 0, \quad Q = \gamma; \tag{16}$$

2) aus den Gleichungen (6) für einen vollständigen Contakt von vier Punkten, neben den vorstehenden Bedingungsgleichungen noch folgende:

$$M\beta = G, \quad N\beta = H, \quad M\gamma = J, \quad N\gamma = K. \tag{17}$$

Der allgemeinen Gleichung der osculirenden Fläche dritter Ordnung können wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (16) und (17) folgende Form geben:

$$\begin{cases} z^2(Az + By + Cx + L) + z(Dy^2 + Exy + Fx^2) \\ \quad + (\beta y^2 + \gamma x^2 + z)(My + Nx + 1) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Wenn wir in dieser Gleichung für den Ausdruck $(\beta y^2 + \gamma x^2 + z)$ den Werth $(-\alpha z^2)$, den uns die Gleichung (15) giebt, schreiben, so kommt:

$$\begin{cases} z\{Az^2 + (B - M\alpha)zy + (C - N\alpha)zx + (L - \alpha)z \\ \quad + Dy^2 + Exy + Fx^2\} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Die Form dieser Gleichung giebt uns folgenden Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung sich nach allen Richtungen hin vierpunktig osculiren, so berühren sich die beiden Flächen im Osculationspunkte nach einer ebenen Curve (zweiter Ordnung) und

schneiden sich überdies auf einer zweiten Fläche zweiter Ordnung, die mit jenen beiden Flächen im Osculationspunkte dieselbe Tangentialebene hat.

Hiernach könnten wir die Discussion des Contaktes höherer Ordnung zweier Flächen zweiten und dritten Grades auf die Theorie des Contaktes zweier Flächen zweiter Ordnung zurückführen.

Die Durchschnitte der Tangentialebene mit der Fläche zweiter und dritter Ordnung haben folgende Gleichungen:

$$\beta y^2 + \gamma x^2 = 0,$$
$$(My + Nx + 1)(\beta y^2 + \gamma x^2) = 0.$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt ebenfalls, dass die beiden Flächen sich in einer Ebene berühren. Es besteht nämlich der Durchschnitt der Tangentialebene mit der Fläche dritter Ordnung, wenn β und γ von entgegengesetztem Zeichen sind, aus drei geraden Linien, von denen zwei in dem Osculationspunkte sich schneiden, und dieselben Linien sind, nach welchen die Fläche zweiter Ordnung von der Tangentialebene geschnitten wird, und von denen die dritte durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$My + Nx + 1 = 0. \tag{20}$$

Die beiden erstgenannten geraden Linien fallen ganz zusammen, wenn β oder γ Null sind, wonach zugleich die Fläche zweiter Ordnung ein Cylinder wird. Wenn endlich β und γ von gleichem Zeichen sind, so besteht jener Durchschnitt aus einem conjugirten Punkte (nämlich einer verschwindenden Ellipse) und einer geraden Linie, die wiederum durch die Gleichung (20) dargestellt wird.

Die Form der Gleichung (20) zeigt, dass die bezügliche gerade Linie nie durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Osculationspunkt gehen kann; was auch a priori sich ergiebt, wenn man erwägt, dass alsdann die Fläche dritter Ordnung mit der Tangentialebene einen Contakt zweiter Ordnung hat, den eine Fläche zweiter Ordnung nie haben kann.

Aus diesen letzten Entwickelungen ergiebt sich auch sogleich die geometrische Deutung der beiden Bedingungsgleichungen, „dass eine Fläche dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte mit einer Fläche zweiter Ordnung einen vollständigen Contakt von vier Punkten habe", auf welche wir in der 14. Nummer geführt worden sind. Es ist nemlich offenbar zu diesem Ende erforderlich, *dass die Tangentialebene in dem gegebenen Punkte die gegebene Fläche nach dreien geraden Linien schneide*, von denen zwei zusammenfallen und auf einen Punkt sich reduciren können. (In dem Falle dreier geraden Linien wird die Fläche

von der Tangentialebene in drei verschiedenen Punkten, nämlich in den Winkelpunkten des von jenen Linien gebildeten Dreiecks berührt; wenn zwei Linien imaginär werden, findet nur ein Berührungspunkt statt; wenn endlich diese beiden Linien in eine einzige Linie zusammenfallen, so findet nach dieser ganzen Linie eine einfache Berührung und in einem Punkte derselben, dem Durchschnitte mit der dritten Linie, ein Contakt der zweiten Ordnung statt.)

3) Für einen vollständigen Contakt der vierten Ordnung erhalten wir, neben den Bedingungsgleichungen (16) und (17), aus den Gleichungen (9) noch folgende drei:

$$\beta(L-\alpha)=D,\quad E=0,\quad \gamma(L-\alpha)=F, \tag{21}$$

wonach sich die Gleichung der osculirenden Fläche (18) in folgende verwandelt:

$$\begin{cases} z^2(Az+By+Cx+L)+z(\beta y^2+\gamma x^2)(L-\alpha) \\ \quad +(\beta y^2+\gamma x^2+z)(My+Nx+1)=0. \end{cases} \tag{22}$$

Substituiren wir endlich in diese Gleichung

$$\begin{aligned} -(\alpha z^2+z)\quad &\text{für}\quad (\beta y^2+\gamma x^2), \\ -\alpha z^2\quad\ \ &\text{für}\quad (\beta y^2+\gamma x^2+z), \end{aligned}$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$z^2\{[A-(L-\alpha)\alpha]z+(B-M\alpha)y+(C-N\alpha)x\}=0. \tag{23}$$

Aus der Form dieser Gleichung ziehen wir folgenden Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung einen vollständigen Contakt der vierten Ordnung haben, so berühren sie sich nach zwei Ebenen und schneiden sich überdies nach einer ebenen Curve, die durch den Berührungspunkt der Flächen geht.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichung (23) von β und γ durchaus unabhängig ist.

4) Für einen vollständigen Contakt der fünften Ordnung ergeben sich neben den Gleichungen (16), (17) und (21) aus (12) noch folgende beide:

$$B=M\alpha,\quad C=N\alpha,$$

wonach sich die Gleichung der osculirenden Fläche (22) in

$$\begin{cases} z^2(Az+M\alpha y+N\alpha x+L)+z(\beta y^2+\gamma x^2)(L-\alpha) \\ \quad +(\beta y^2+\gamma x^2+z)(My+Nx+1)=0 \end{cases} \tag{24}$$

und die Gleichung (23) in

$$z^3=0$$

verwandelt. Also:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung sich nach allen Richtungen hin sechspunktig osculiren, so berühren sie sich nach drei Ebenen und haben daher sonst keinen Punkt mehr mit einander gemein.

5) Die Gleichung (13) geht in vorliegendem Falle in folgende über:

$$\alpha(L - \alpha) = A.$$

Wenn auch diese Bedingungsgleichung befriedigt wird, so besteht die Fläche dritter Ordnung aus dem Systeme der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und irgend einer Ebene. Wirklich stellt auch in diesem Falle die Gleichung:

$$[A - (L - \alpha)\alpha]z + (B - M\alpha)y + (C - N\alpha)x = 0$$

keine bestimmte Durchschnittsebene mehr dar, und die Gleichung (24) verwandelt sich in folgende:

$$(\alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + z)[(L - \alpha)z + My + Nx + 1] = 0.$$

21. Aus dem Bisherigen ergiebt sich folgende Bestimmung für die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen, damit zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte nach allen Richtungen hin einen Contakt der verschiedenen Ordnungen haben.

		Zahl der Bedingungsgleichungen
Einpunktiger	Contakt	1,
zweipunktiger	„	$1 + 2 = 3$,
dreipunktiger	„	$1 + 2 + 3 = 6$,
vierpunktiger	„	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$,
fünfpunktiger	„	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 = 13$,
sechspunktiger	„	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 15$,
unendlichpunktiger	„	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$.

Wenn wir eine Fläche irgend einer n^{ten} Ordnung statt der Fläche dritter Ordnung nehmen, so kann der Contakt bis zu einem $2n$-punktigen steigen, wo sich alsdann die beiden Flächen in n zusammenfallenden Ebenen berühren. Für einen $(n + 1 - m)$-punktigen Contakt erhalten wir alsdann

$$1 + 2 + 3 \cdots + (n + 1 - m) = \frac{(n + 2 - m)(n + 1 - m)}{1 \cdot 2}$$

solcher Gleichungen.

22. Wenn der Grad der osculirenden Fläche höher ist als die Ordnung des Contaktes, so erhalten wir, wenn dieser Contakt ein

n-punktiger sein soll, $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Bedingungsgleichungen zu befriedigen. Alsdann giebt es überdies n Richtungen, nach welchen der Contakt ein $(n+1)$-punktiger ist. Die Zahl dieser Richtungen reducirt sich für die höheren Contaktordnungen, wenn die sich osculirenden Flächen von gegebenen Graden sind. Wir haben solcher Richtungen für zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung, bei einem ein-, zwei-, drei-, vier- und fünfpunktigen Contakt, *eine*, *zwei*, *drei*, *zwei* und *eine* nachgewiesen. Um indess hierbei nichts zu übersehen, müssen wir auch auf den Faktor g' Rücksicht nehmen, den wir in der 15.—17. Nummer vernachlässigt haben. Nach der 15. Nummer erhalten wir bei einem vollständigen vierpunktigen Contakt, indem wir $g' = 0$ setzen, zwei Werthe für φ, welche die Richtungen derjenigen beiden geraden Linien bezeichnen, nach welchen die Fläche zweiter Ordnung von der Tangentialebene geschnitten wird. Diese beiden Linien liegen nach der 20. Nummer bei dieser Ordnung des Contaktes auch ganz in der Fläche dritter Ordnung. Legt man also durch eine derselben irgend eine Ebene, so sind die Durchschnitte der beiden Flächen mit dieser Ebene einerseits das System dieser geraden Linie und einer Linie zweiter Ordnung, und andererseits das System derselben geraden Linie und einer zweiten. Man kann also den Contakt dieser beiden Durchschnitte als einen unendlichpunktigen betrachten. Hieraus ist ersichtlich, wie die vier Richtungen eines fünfpunktigen Contaktes, die bei einem vollständigen vierpunktigen Contakte im Allgemeinen statt haben, sich in dem vorliegenden Falle auf *zwei* reduciren. Ebenso zeigt uns der quadratische Faktor g'^2 in der 10. Gleichung der 17. Nummer, wie die fünf Richtungen eines sechspunktigen Contaktes, die im Allgemeinen bei einem vollständigen Contakte stattfinden, sich in unserm Falle auf *eine* Richtung reduciren.

23[2]). Wenn zwei Flächen einen vollständigen n-punktigen Contakt haben, so sind in dem allgemeinen Falle durch eine, nicht in Faktoren zerlegbare Gleichung des n^{ten} Grades diejenigen n Richtungen gegeben, nach denen der Contakt ein $(n+1)$-punktiger ist. Dieser Contakt geht in einen $(n+2)$-punktigen über, wenn zugleich mit dieser Gleichung eine ähnliche Gleichung des $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades besteht, wodurch eine Bedingungsgleichung gegeben ist; er geht in einen $(n+3)$-punktigen über, wenn mit diesen beiden Gleichungen eine dritte Gleichung des $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades besteht, wodurch zwei Bedingungsgleichungen gegeben sind u. s. w. Der Natur der Elimination nach giebt es alsdann nach *allen* jenen n Richtungen statt des n-punktigen Contaktes einen $(n+1)$-punktigen, einen $(n+2)$-punktigen u. s. w. Also:

Wenn (im Allgemeinen) zwei Flächen einen vollständigen Contakt von n Punkten haben, so giebt es n Richtungen eines $(n+1)$-punktigen Contaktes, der aber auch ein höherer sein kann. Soll dieser Contakt um p Ordnungen steigen, so erhalten wir p Bedingungsgleichungen zu befriedigen: alsdann steigt der Contakt aber nothwendig nach allen jenen n Richtungen zu einem $(n+p)$-punktigen.[2])

Dieser Satz erleidet bedeutende Modificationen, wenn die beiden Flächen von bestimmtem Grade sind. Bei zwei sich osculirenden Flächen zweiter und dritter Ordnung ergeben sich, wenn wir uns auf die Entwickelungen der 10.—18. Nummer beziehen, folgende verschiedene Fälle.

I. Bei einem Contakte erster Ordnung giebt es
   1) zwei Richtungen eines Contaktes zweiter Ordnung;
   2) zwei Richtungen eines Contaktes dritter Ordnung, wenn die Gleichungen (3) und (5) zugleich bestehen;
   3) zwei Richtungen eines Contaktes vierter Ordnung, wenn (3), (5) und (8) zugleich bestehen;
   4) eine Richtung eines Contaktes vierter und eine Richtung eines Contaktes fünfter Ordnung, wenn (3), (5), (8) und (11) zugleich befriedigt werden;
   5) gar keinen höheren Contakt, oder, wenn wir lieber wollen, die Ordnung des höheren Contaktes wird unendlich, wenn neben (3) und (5) die Gleichung $g' = 0$ besteht.

II. Bei einem Contakte zweiter Ordnung giebt es:
   1) drei Richtungen eines Contaktes dritter Ordnung;
   2) eine Richtung eines Contaktes dritter Ordnung, und zwei Richtungen eines Contaktes vierter Ordnung, wenn (5) und (8) zugleich bestehen;
   3) eine Richtung eines Contaktes dritter, eine Richtung eines Contaktes vierter und eine Richtung eines Contaktes fünfter Ordnung, wenn (5), (8) und (11) zugleich befriedigt werden;
   4) eine einzige Richtung eines Contaktes dritter Ordnung, wenn neben (5) auch die Gleichung $g' = 0$ besteht.

III. Bei einem Contakte dritter Ordnung giebt es
   1) zwei Richtungen eines Contaktes vierter Ordnung;
   2) eine Richtung eines Contaktes vierter und eine Richtung eines Contaktes fünfter Ordnung, wenn (8) und (11) zugleich bestehen;
   3) keinen höheren Contakt, wenn zugleich die beiden Gleichungen (8) und $g' = 0$ befriedigt werden.

IV. Bei einem Contakte vierter Ordnung giebt es
   1) eine Richtung eines Contaktes fünfter Ordnung;

2) keinen höheren Contakt, wenn die Gleichung $g' = 0$ neben (11) besteht.

Ich breche hier diese Entwickelungen ab. In einem nächsten Aufsatze, der dieselben gewissermassen ergänzen wird, gedenke ich mich mit der Theorie der Osculation zwischen Flächen und Linien doppelter Krümmung zu beschäftigen. Diese Theorie ist der Theorie der Osculation ebener Curven ganz analog; denn in beiden Fällen haben wir es mit dem Zusammenfallen von Durchschnittspunkten zu thun. Bleiben wir z. B. bei Flächen zweiter Ordnung und solchen Curven stehen, die der Durchschnitt zweier solcher Flächen sind, so haben wir, da drei Flächen zweiter Ordnung im Allgemeinen sich in acht Punkten schneiden, auch acht verschiedene Arten des Contaktes nachzuweisen.

9.

Ueber ein neues Coordinatensystem.

(Crelle's Journal, Band 5, S. 1—36. 1829.)

Jeder besonderen Art die Lage eines Punktes in Beziehung auf Punkte oder Linien, die als der Lage nach bekannt angesehen werden, zu bestimmen, entspricht ein Coordinatensystem. Die Gleichung einer Curve, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, ist als die algebraische Aussage einer dieselbe charakterisirenden Eigenschaft, aus der sich alle übrigen Eigenschaften derselben herleiten lassen, anzusehen. Was die Leichtigkeit dieser Herleitung betrifft, so kommt offenbar sehr viel auf die Wahl derjenigen Eigenschaft, welche an die Spitze der Untersuchung gestellt wird, und mithin auf die Wahl des Coordinatensystems an. Das gewöhnliche Coordinatensystem ist offenbar dasjenige, welches im Allgemeinen die grösste Leichtigkeit darbietet. Der eine grosse Theil der Geometrie, der von Grössenbestimmungen unabhängig ist (*géométrie de situation*) fliesst in diesem Systeme, eben weil er keine absolute Grössenbestimmung fordert, ohne alle Entwickelungen unmittelbar aus der algebraischen Constitution der Gleichungen und einer allgemeinen Verbindung derselben. In diesem grossen Felde der Untersuchung gewährt dasjenige Coordinatensystem, mit welchem wir uns in dem Folgenden beschäftigen werden, im Allgemeinen dieselben Vortheile, und hat überdies noch vor dem gewöhnlichen Coordinatensystem einige besondere Vorzüge. Hierher gehört unter anderm auch, dass wenn wir die drei Punkte, die ich *Coordinatenpunkte* genannt habe, auf dem Umfange der Curve irgend einer Ordnung annehmen, aus der allgemeinen Gleichung derselben sogleich *drei* Constanten ausfallen, während wir auf entsprechende Weise in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme nur das constante Glied fortschaffen können. Hierhin rechne ich ferner, dass für die Curven aller Ordnungen sich Gleichungen ergeben, die in Beziehung auf drei Veränderliche (p, q, r) *homogen* sind, wonach die geometrische Interpretation des Theorems *über die homogenen Functionen*

unmittelbar die Gleichung der Tangente und osculirender Curven für jeden gegebenen Punkt der Curve liefert, u. s. w.

Die allgemeine analytische Methode, und die Methode, die Herr Poncelet in seinem „*Traité des propriétés projectives*“ entwickelt hat, beruhen auf der einen Seite auf ganz wesentlich verschiedenen Ideen, und stimmen doch auf der andern Seite so sehr in den Resultaten überein, dass man, freilich sonderbar genug, die erste Methode als eine Periphrase, als ein Plagiat der zweiten hie und da betrachtet zu haben scheint, statt dass man sich ruhig die Frage beantworten sollte, ob nicht ein nothwendiger Grund dieser Uebereinstimmung vorhanden und wo derselbe zu suchen sei. Auch ich bin von dieser Uebereinstimmung mehrmals überrascht worden: einige Beispiele hiervon bietet auch das Folgende dar. So erscheint es mir z. B. bemerkenswerth, dass wir in dem neuen Coordinatensystem ebenfalls auf jenen Satz hingeleitet werden, der in der Poncelet'schen Methode eine grosse Rolle spielt, „dass nämlich alle Punkte einer Ebene, die unendlich weit entfernt sind, in gerader Linie liegen“, und wir überdies diese unendlich weit entfernte gerade Linie durch eine Gleichung zwischen endlichen Grössen darstellen können. Ebenso stossen wir in diesem System auf den andern Poncelet'schen Satz, „dass zwei concentrische Kreise in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contakt haben“.

Ich habe bei den folgenden Entwickelungen nur die Absicht gehabt, an Beispielen zu zeigen, dass die neue Methode einerseits zum Beweise vorgelegter einzelner Sätze und zur Darstellung allgemeiner Theorieen sich sehr geschmeidig zeigt, und dass sie andrerseits Resultate *finden* lehrt, wenn man sie aus allgemeinen analytischen Gesichtspunkten betrachtet. Mein Hauptaugenmerk war nur auf die Methode, aber keineswegs darauf gerichtet, neue Sätze zu geben. Der am Ende dieses Aufsatzes aufgestellte Satz, den ich früher für den einfachsten Fall, dass nur zwei Punkte gegeben sind, bemerkte, ergab sich in dem neuen Coordinatensysteme unmittelbar für drei gegebene Punkte, wonach es natürlich war, seine ganze Allgemeinheit zu vermuthen; und der Beweis des allgemeinen Satzes scheint sich in dem neuen System unvergleichbar viel leichter zu ergeben als in dem gewöhnlichen.

Mit Rücksicht auf das neue Coordinatensystem habe ich die analytische Theorie der Reciprocität (*théorie des polaires réciproques*) und deren sozusagen unbegrenzte Erweiterung mehr angedeutet als ausgeführt.

Der grösste Vortheil, der sich aus dem neuen Coordinatensysteme, besonders wenn wir demselben die gegen Ende dieses Aufsatzes an-

gezeigte Allgemeinheit geben, ziehen lässt, betrifft, wie mir scheint, die mathematischen Entwickelungen der *Mechanik*. Doch hierauf konnte ich natürlich hier gar keine Rücksicht nehmen.

Anfangs war es meine Absicht, mich auch auf die Construction des Raumes auszudehnen. Hier sind die analytischen Erörterungen den nächstfolgenden ganz analog, wenn wir statt des *Coordinatendreiecks* ein *Coordinatentetraëder* nehmen. Doch hat dieser Aufsatz ohnedies schon einen so grossen Umfang gewonnen, dass ich hierauf verzichten muss.

1. Es seien (Fig. 15) OO', OO'' und $O'O''$ drei gerade Linien, die irgend ein beliebiges Dreieck bilden, und p, q und r die Abstände irgend eines beliebigen Punktes M von diesen drei geraden Linien. Wenn wir alsdann unsere Construction auf irgend ein gewöhnliches System geradliniger Coordinaten YAX beziehen, so sind bekanntlich die obigen Abstände p, q und r durch Ausdrücke gegeben, die in Beziehung auf die Coordinaten des Punktes M linear sind. Auch die Vorzeichen von p, q und r sind alsdann für eine bestimmte Lage des Punktes M vollkommen bestimmt, und diese Zeichen ändern sich, wenn der Punkt M von einer Seite der bezüglichen Linien OO', OO'' und $O'O''$ auf die andere Seite hinüberrückt. Wir nehmen (vergl. meine *analyt. geomet. Entwicklungen No. 31*) für einen innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegenden Punkt M:

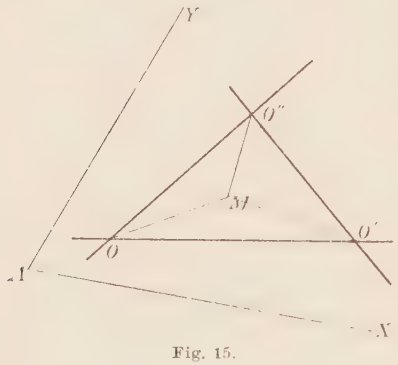

Fig. 15.

$$p \text{ positiv}, \quad q \text{ negativ}, \quad r \text{ negativ}.$$

Nach diesen Bemerkungen stellt jede Gleichung zwischen p, q und r, die in Beziehung auf diese Grössen von irgend einem m^{ten} Grade ist, eine Linie der m^{ten} Ordnung dar, deren auf ein gewöhnliches Coordinatensystem bezogene Gleichung wir leicht erhalten können. Wir werden uns in dem Folgenden nur auf solche Gleichungen beschränken, die in Beziehung auf p, q und r *homogen* sind, also auf Gleichungen von folgender Form:

$$(1) \quad Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-1}r + Dp^{m-2}q^2 + Ep^{m-2}qr + \cdots + Yqr^{m-1} + Zr^m = 0.$$

2. Wenn wir

$$\frac{q}{p} = \varphi, \quad \frac{r}{p} = \psi$$

setzen, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung (1) in folgende:

$$(2) \quad A + B\varphi + C\psi + D\varphi^2 + E\varphi\psi + \cdots + Y\varphi\psi^{m-1} + Z\psi^m = 0,$$

mithin in eine vollständige Gleichung des m^{ten} Grades zwischen φ und ψ. Für irgend einen beliebig angenommenen Punkt M erhalten wir für φ und ψ bestimmte und einzige Werthe. Auch das Zeichen dieser Grössen ist alsdann ein bestimmtes; für den Punkt M z. B., der innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegt, sind φ und ψ beide negativ.

Da die Gleichung (2) eine vollständige des m^{ten} Grades ist, und also ebenso viele von einander unabhängige Constanten enthält, als die allgemeine Gleichung desselben Grades zwischen gewöhnlichen Coordinaten, so kann diese Gleichung, indem wir φ und ψ als veränderliche Grössen und die Coefficienten A, B, C u. s. w. als beliebig zu bestimmende Constanten betrachten, *alle möglichen Linien der m^{ten} Ordnung darstellen.*

Statt φ und ψ können wir auch

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{p}{q} = \mu, \quad \frac{1}{\psi} = \frac{p}{r} = \nu$$

als die beiden veränderlichen Grössen betrachten. Alsdann erhalten wir eine Gleichung, die ebenso allgemein ist als die Gleichung (2) und ebenfalls alle möglichen Linien m^{ter} Ordnung darstellen kann. Diese Gleichung in μ und ν steigt im Allgemeinen zum $2m^{\text{ten}}$ Grade, kann aber in bestimmten Fällen, wie wir später sehen werden, auch unter den m^{ten} Grad hinabsinken.

4. Wir können also φ und ψ oder auch μ und ν als *Coordinaten* ansehen, und demnach wollen wir O, O' und O'' den ersten, zweiten und dritten *Coordinatenpunkt*, OO', OO'' und $O'O''$ die erste, zweite und dritte *Coordinatenlinie*, und endlich die Winkel $O''OO'$, $OO'O''$ und $OO''O'$ oder α, α' und α'' den ersten, zweiten und dritten *Coordinatenwinkel* nennen. In dem Folgenden werden wir dieselbe Bezeichnung beibehalten.

Nichts verhindert uns, zwei der drei Coordinatenlinien *parallel* anzunehmen. Alsdann liegt ein Coordinatenpunkt unendlich weit und ein Coordinatenwinkel ist Null.

5. Der Werth von φ und μ ist derselbe für alle Punkte einer und derselben durch O gehenden geraden Linie, und ebenso ist ψ und ν constant für alle Punkte einer durch O' gehenden geraden Linie. Es sind demnach

$$\varphi = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.},$$

Gleichungen einer durch O, und

$$\psi = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.},$$

Gleichungen einer durch O' gehenden geraden Linie. *Während wir also in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme geometrische Oerter durch den Durchschnitt zweier, den Coordinatenaxen paralleler gerader Linien construiren, construiren wir in dem neuen Coordinatensysteme geometrische Oerter durch den Durchschnitt zweier, durch zwei feste Punkte O und O' gehenden geraden Linien.*

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den dritten Coordinatenpunkt geht, hat folgende Form:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \text{const.}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \text{const.}$$

6. Irgend zwei gerade Linien, die durch folgende beiden Gleichungen

$$\varphi = c, \quad \varphi = -c,$$

oder auch durch folgende:

$$\mu = c', \quad \mu = -c',$$

indem wir durch c und c' constante Grössen bezeichnen, dargestellt werden, bilden mit den beiden Coordinatenlinien OO' und OO'' ein System von solchen vier geraden Linien, die man „*Harmonicalen*“ nennt.

7. Von solchen zwei geraden Linien, die durch folgende beiden Gleichungen:

$$\varphi = c, \quad \mu\left(= \frac{1}{\varphi}\right) = c,$$

in welchen wir durch c dieselbe beliebige Constante bezeichnen, dargestellt werden, bildet die eine mit OO' denselben Winkel als die andere mit OO''; von zwei geraden Linien

$$\psi = c', \quad \nu\left(= \frac{1}{\psi}\right) = c',$$

bildet eine denselben Winkel mit $O'O$, als die andere mit $O'O''$, und endlich von den beiden geraden Linien

$$\frac{\varphi}{\psi} = c'', \quad \frac{\mu}{\nu} = c'',$$

bildet eine mit $O''O$ denselben Winkel als die andere mit $O''O'$.

8. Die Gleichung einer geraden Linie, die durch O'' und den Durchschnitt der beiden Linien

$$\varphi = c, \quad \psi = c'$$

geht, ist folgende:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{c}{c'}.$$

Ebenso ist die Gleichung einer geraden Linie, die durch O'' und den Durchschnitt der beiden Linien

$$\mu = c, \quad \nu = c'$$

geht, folgende:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{c}{c'}.$$

Nach der vorigen Nummer liegt hierin der Beweis von folgendem bekannten Satze:

Wenn man von irgend einem Punkte M in der Ebene eines Dreiecks nach den Winkelpunkten desselben O, O' und O'' drei gerade Linien zieht, die mit den Seiten OO'', $O'O$ und $O''O'$ Winkel bilden, welche gleich β, β' und β'' sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche durch dieselben Winkelpunkte gehen, und dieselben Winkel β, β' und β'' mit den Seiten OO', $O'O''$ und $O''O$ machen, durch einen und denselben Punkt N.

Dieser Satz schliesst als besondern Fall den Satz ein, dass diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, sich in demselben Punkte schneiden. In diesem Falle fallen die beiden Punkte M und N zusammen und sind der Mittelpunkt eines, die drei Seiten des Dreiecks berührenden Kreises. Im Allgemeinen sind M und N die beiden Brennpunkte einer in das Dreieck beschriebenen Linie zweiter Ordnung.

9. *Die allgemeine Gleichung der geraden Linie* ist folgende:

$$p + aq + br = 0,$$

mit der die nachstehenden beiden Gleichungen identisch sind:

$$1 + a\varphi + b\psi = 0,$$
$$\mu\nu + a\nu + b\mu = 0.$$

Für diejenigen beiden Punkte Q und R (Fig. 16), in welchen diese gerade Linie die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ schneidet, erhalten wir folgende:

$$\left(\varphi = 0, \ \psi = -\frac{1}{b}\right) \text{ und}$$

$$\left(\varphi = -\frac{1}{a}, \ \psi = 0\right),$$

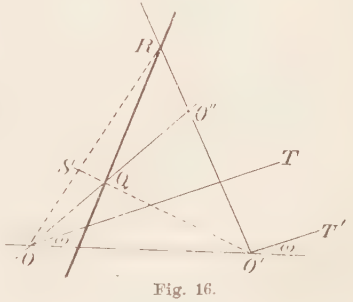

Fig. 16.

und mithin ergiebt sich für S, den Durchschnitt von OR und $O'Q$:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} = -a, \ \nu = \frac{1}{\psi} = -b,$$

wodurch die beiden Constanten der obigen Gleichung bestimmt sind.

10. Wenn zwei lineare Gleichungen von folgender Form:

$$mp + n(aq + br) = 0,$$
$$m'p + n'(aq + br) = 0,$$

wobei m, m', n und n' vier willkürliche Coefficienten bezeichnen, gegeben sind, so erhalten wir durch eine einfache Verbindung dieser beiden Gleichungen folgende dritte:

$$p = 0.$$

Wir sehen hieraus, dass, wenn wir m und n als unbestimmte Coefficienten betrachten, alle einzelnen durch

$$mp + n(aq + br) = 0$$

dargestellten geraden Linien sich in einem festen Punkte von OO' schneiden. Auf ähnliche Weise schneiden sich alle durch die beiden Gleichungen

$$mq + n(p + br) = 0 \text{ und}$$
$$mr + n(p + aq) = 0$$

dargestellten Linien in je einem festen Punkte von OO'' und $O'O''$.

11. Für zwei parallele gerade Linien OT und $O'T'$, die durch O und O' gehen und mit OO' irgend einen Winkel ω bilden, erhalten wir sogleich folgende beide Gleichungen:

$$p \sin(\alpha - \omega) + q \sin \omega = 0,$$
$$p \sin(\alpha' + \omega) - r \sin \omega = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben:

$$\cot \omega = -\frac{q - p \cos \alpha}{p \sin \alpha},$$
$$\cot \omega = \frac{r - p \cos \alpha'}{p \sin \alpha'}.$$

Setzen wir diese beiden Werte für $\cot \omega$ gleich, entwickeln und berücksichtigen, dass

$$\sin \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha = \sin(\alpha + \alpha') = \sin \alpha'',$$

so kommt:

(3) $$p \sin \alpha'' - q \sin \alpha' - r \sin \alpha = 0,$$

oder:

(4) $$\varphi \sin \alpha' + \psi \sin \alpha = \sin \alpha''.$$

Wir wären gerade zu derselben Gleichung gekommen, wenn wir statt OT und $O'T'$ zwei andere durch O und O' gehende Parallelen genommen hätten, die mit OO' statt ω irgend einen andern Winkel bilden. Es stellen also die beiden letzten Gleichungen nur solche

Punkte dar, die unendlich weit entfernt sind. Die lineare Form dieser Gleichung zeigt, *dass alle unendlich weit entfernten Punkte einer und derselben Ebene als in gerader Linie liegend zu betrachten sind.**)

12. Nach der letzten Nummer ist offenbar, dass wir durch Verbindung der Gleichungen irgend zweier parallelen geraden Linien zu den Gleichungen (3) und (4) kommen können. Wenn also

$$Ap = Bq + Cr$$

die Gleichung irgend einer gegebenen geraden Linie ist, so stellt, indem wir durch m irgend einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen, folgende Gleichung:

$$(mA + \sin\alpha'')p = (mB + \sin\alpha')q + (mC + \sin\alpha)r$$

alle möglichen geraden Linien dar, die der gegebenen parallel sind.

Für die allgemeinen Gleichungen aller den drei Coordinatenlinien OO', OO'' und $O'O''$ parallelen geraden Linien erhalten wir hiernach, indem m immer noch einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet:

$$\begin{aligned} mp &= q\sin\alpha' + r\sin\alpha, \\ mq &= p\sin\alpha'' - r\sin\alpha, \\ mr &= p\sin\alpha'' - q\sin\alpha'. \end{aligned}$$

Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung.

13. Die allgemeine Gleichung der Linien dieser Ordnung sei folgende:

$$(1) \qquad Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0,$$

mit der nach unserer Bezeichnung folgende identisch sind:

*) Denselben Satz leitet Herr Poncelet in seinem *Traité des propriétés projectives* aus der Theorie der Projection her.

„Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement comme distribués sur une ligne droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan.“ (No. 107.)

Mir scheint es sehr bemerkenswerth, dass dieser Satz sich in unserm neuen Coordinatensysteme direct ergiebt und wir zugleich durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen und bestimmten Constanten jene (ideale) gerade Linie, die alle unendlich weit entfernten Punkte der Ebene enthält, darstellen können. Hr. Poncelet zieht aus jenem Satze wichtige Folgerungen: wir kommen unmittelbar zu denselben Folgerungen auf einem Wege, der gegen jeden Einwurf gesichert ist, indem wir auf die lineare Form der letzten Gleichung des Textes Rücksicht nehmen. Wir werden noch im Laufe dieses Aufsatzes hierauf zurückzukommen Veranlassung finden.

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0, \tag{2}$$

$$A\mu^2\nu^2 + 2B\mu\nu^2 + 2C\mu^2\nu + D\nu^2 + 2E\mu\nu + F\mu^2 = 0. \tag{3}$$

Wenn wir die Voraussetzung machen, dass die Curve durch den Punkt O gehe, so muss die Gleichung (1) befriedigt werden, wenn man zugleich $p = 0$ und $q = 0$ setzt, woraus ersichtlich ist, dass alsdann $F = 0$. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass $D = 0$, wenn die Curve durch den Punkt O', und dass $A = 0$, wenn sie durch den Punkt O'' geht. In dem Falle also, dass die Curve durch alle drei Punkte O, O' und O'' zugleich geht, erhalten wir statt (1), (2) und (3) nun folgende Gleichungen:

$$Bpq + Cpr + Eqr = 0, \tag{4}$$

$$B\varphi + C\psi + E\varphi\psi = 0, \tag{5}$$

$$B\nu + C\mu + E = 0. \tag{6}$$

Die letzte dieser drei Gleichungen ist dadurch, dass wir alle Glieder durch $\mu\nu$ dividirt haben, *linear* geworden. Wir können also jede Linie zweiter Ordnung durch eine Gleichung vom ersten Grade ausdrücken, wenn wir die drei Coordinatenpunkte auf dem Umfange derselben annehmen. Hiernach ergiebt sich auf die leichteste Weise die Discussion der Eigenschaften solcher Linien zweiter Ordnung, die durch dieselben drei Punkte gehen. Zwei solcher Linien können sich, was die lineare Form ihrer Gleichungen zeigt, nur noch in einem einzigen Punkte schneiden.

Da die Gleichung (6) dieselbe Form hat als die Gleichung der geraden Linie in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, so ist offenbar, dass jedem Satze über die Durchschnitte von geraden Linien ein Satz über die vierten Durchschnitte von Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben drei Punkten schneiden, entspricht, und aus jeder analytischen Beweisführung eines jener Sätze ergiebt sich unmittelbar der Beweis des analogen Satzes, wenn wir den Constanten in der linearen Gleichung diejenige Bedeutung geben, welche sie in der Gleichung (6) haben.

14. Indem wir

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

für die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung nehmen und dieselbe differentiiren, kommt:

$$(B + D\varphi + E\psi)\,d\varphi + (C + E\varphi + F\psi)\,d\psi = 0. \tag{7}$$

Setzen wir nach einander $d\varphi = 0$ und $d\psi = 0$, so giebt diese Gleichung:

(8) $$C + E\varphi + F\psi = 0,$$

(9) $$B + D\varphi + E\psi = 0.$$

Die Gleichung $d\varphi = d\frac{q}{p} = 0$ giebt aber:

$$\frac{p}{q} = \frac{dp}{dq} = \frac{p + dp}{q + dq},$$

und ebenso giebt die Gleichung $d\psi = d\frac{r}{p} = 0$:

$$\frac{p}{r} = \frac{dp}{dr} = \frac{p + dp}{r + dr}.$$

Die vorletzte Gleichung zeigt, dass, wenn wir von einem Punkte der Curve, der zugleich auf der geraden Linie (8) liegt, zu einem consecutiven Punkte der Curve fortgehen, die beiden Punkte mit dem Punkte O in gerader Linie liegen, oder mit andern Worten, dass die Tangenten in den Durchschnitten der geraden Linie (8) mit der Curve durch den Punkt O gehen, und also diese gerade Linie die Polare des Punktes O ist. Ebenso ist (9) die Polare des Punktes O', und für die Gleichung der Polaren des Punktes O'' erhalten wir ohne weitere Rechnung folgende:

(10) $$A + B\varphi + C\psi = 0.$$

Wir erhalten die Gleichungen (8), (9) und (10) sogleich aus der Gleichung:

$$Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0;$$

denn bezeichnen wir den ersten Theil dieser Gleichung der Kürze halber durch u, so sind jene drei Gleichungen keine andern als:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial p} = 0.$$

Indem wir die Durchschnitte der durch die Gleichungen (8), (9) und (10) dargestellten geraden Linien mit den Coordinatenlinien betrachten, ergiebt sich eine einfache *Bestimmung der Constanten in der allgemeinen Gleichung.*

15. Den Gleichungen (4) und (6) der 13. Nummer können wir folgende Form geben:

$$\alpha pq + \beta pr = \alpha\beta qr,$$
$$\alpha\nu + \beta\mu = \alpha\beta,$$

und wir erhalten alsdann, indem wir differentiiren, für die Polaren der Coordinatenpunkte O, O' und O'', oder, was in diesem Falle dasselbe heisst, für die Tangenten in diesen drei Punkten folgende Gleichungen:

$$\mu = \alpha, \quad \nu = \beta, \quad \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha}{\beta};$$

so dass also (Fig. 17) für den Punkt P'': $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$;
„ „ „ P': $\mu = \alpha$, $\nu = -\beta$;
„ „ „ P: $\mu = -\alpha$, $\nu = \beta$.

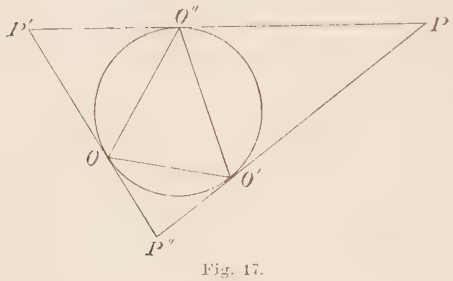

Fig. 17.

Hieraus ist zugleich ersichtlich, dass die drei geraden Linien OP, $O'P'$ und $O''P''$ durch folgende drei Gleichungen dargestellt werden:

$$\mu = -\alpha, \quad \nu = -\beta, \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta},$$

und also, wie bekannt, durch einen und denselben Punkt Q gehen, dessen Coordinaten $\mu = -\alpha$ und $\nu = -\beta$ sind.

16. Um bei der Annahme eines beliebigen Coordinatendreiecks die Gleichungen derjenigen drei geraden Linien $O''\omega''$, $O'\omega'$ und $O\omega$ zu erhalten, welche die Punkte O'', O' und O mit den Polen ω'', ω' und ω der gegenüberstehenden Coordinatenlinien OO', OO'' und $O'O''$ verbinden, brauchen wir nur *erstens* die Gleichung (8) mit B und (9) mit C, *zweitens* (8) mit B und (10) mit E, *drittens* (9) mit C und (10) mit E zu multipliciren und dann abzuziehen. Auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned}(BE - CD)\varphi + (BF - CE)\psi &= 0,\\ (BC - EA) \quad + (BF - CE)\psi &= 0,\\ (BC - EA) \quad - (BE - CD)\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Wenn wir irgend zwei dieser drei Gleichungen von einander abziehen oder zu einander addiren, so erhalten wir die dritte. Also:

Wenn in der Ebene irgend einer Linie zweiter Ordnung zwei Dreiecke sich befinden, von denen die Winkelpunkte des einen die Pole der Seiten des andern sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Winkelpunkte der beiden Dreiecke verbinden, durch einen und denselben Punkt, und also schneiden sich auch (nach dem Princip der Reciprocität) *die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Punkten, die in einer geraden Linie liegen, der Polaren jenes Durchschnittspunktes.*

Diese beiden Sätze können wir noch auf folgende Weise vervollständigen:

Diejenigen sechs übrigen geraden Linien, welche die drei Winkelpunkte des einen Dreiecks mit den drei Winkelpunkten des andern Dreiecks verbinden, berühren eine und dieselbe Linie zweiter Ordnung, und die sechs übrigen Durchschnitte der drei Seiten des einen und der drei Seiten

*des andern Dreiecks liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung.**) *Diese beiden Linien zweiter Ordnung sind courbes polaires réciproques in Beziehung auf die gegebene.*

17. *Tangententheorie.* Wir wollen wiederum folgende Gleichung:

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

zu Grunde legen. Ist alsdann durch irgend einen Punkt (ψ', φ') eine Tangente an die Curve gelegt, und bezeichnen wir den Berührungspunkt durch (ψ'', φ''), so ist die Gleichung der Tangente:

$$\psi - \psi'' = \frac{\psi' - \psi''}{\varphi' - \varphi''}(\varphi - \varphi'').$$

Diese Gleichung muss befriedigt werden, wenn wir für die veränderlichen Grössen ψ und φ die Coordinaten des auf der Curve genommenen consecutiven Punktes $(\psi'' + d\psi'', \varphi'' + d\varphi'')$ nehmen. Auf diese Weise kommt:

$$d\psi'' = \frac{\psi' - \psi''}{\varphi' - \varphi''} d\varphi''.$$

Wenn wir die Differentialausdrücke vermittelst folgender Gleichung (7):

$$(B + D\varphi + E\psi)d\varphi + (C + E\varphi + F\psi)d\psi = 0$$

fortschaffen und zugleich auf folgende Gleichung:

$$A + 2B\varphi'' + 2C\psi'' + D\varphi''^2 + 2E\varphi''\psi'' + F\psi''^2 = 0$$

Rücksicht nehmen, so erhalten wir endlich folgende, in Beziehung auf ψ'', φ'' und ψ', φ' symmetrische Gleichung:

(11) $(C + E\varphi' + F\psi')\psi'' + (B + D\varphi' + E\psi')\varphi'' + C\psi' + B\varphi' + A = 0,$

welche, wenn wir φ' und ψ' als veränderlich betrachten, die Tangente im Punkte (ψ'', φ'') darstellt, und wenn wir ψ'' und φ'' als veränderlich betrachten, die Polare des Punktes (ψ', φ').

Die Form der letzten Gleichung stimmt ganz mit der Form der entsprechenden Gleichung in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme überein. Dies ergiebt sich leicht *a priori*. In dem Verlaufe dieses Aufsatzes werden wir noch eine elegantere Tangententheorie entwickeln.

---

*) Man hat nemlich folgende beiden Sätze, von denen einer aus dem andern nach dem Principe der Reciprocität folgt:

Wenn von den neun Durchschnitten zweier Systeme von drei geraden Linien drei in gerader Linie liegen, so liegen die übrigen sechs auf dem Umfange einer und derselben Linie zweiter Ordnung. (Entwicklungen S. 266.)

Wenn man zwei Systeme von drei Punkten durch neun gerade Linien verbindet, und drei dieser Linien durch denselben Punkt gehen, so berühren die übrigen sechs eine und dieselbe Linie zweiter Ordnung.

18. Wenn der Punkt (ψ', φ') auf $O'O''$ liegt, so ist $\psi' = 0$, und je weiter er sich auf dieser Linie entfernt, desto mehr nähert sich φ' dem Werthe $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$. Hiernach erhalten wir aus (11):

$$(12) \qquad \begin{aligned}(C\sin\alpha' + E\sin\alpha'')\psi + (B\sin\alpha' + D\sin\alpha'')\varphi \\ + (A\sin\alpha' + B\sin\alpha'') = 0,\end{aligned}$$

für die Gleichung desjenigen Durchmessers, der alle mit $O'O''$ parallelen Chorden halbirt. Ebenso erhalten wir

$$(13) \qquad \begin{aligned}(C\sin\alpha + F\sin\alpha'')\psi + (B\sin\alpha + E\sin\alpha'')\varphi \\ + (A\sin\alpha + C\sin\alpha'') = 0,\end{aligned}$$

$$(14) \qquad \begin{aligned}(E\sin\alpha - F\sin\alpha')\psi + (D\sin\alpha - E\sin\alpha')\varphi \\ + (B\sin\alpha - C\sin\alpha') = 0\end{aligned}$$

für die Gleichungen derjenigen beiden Durchmesser, die alle mit OO'' und OO' parallelen Chorden halbiren.

Aus der Zusammenstellung irgend zweier der letzten drei Gleichungen erhalten wir die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve. Wenn dieser Punkt mit dem Punkt O'' zusammenfallen soll, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$\frac{C}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha'} = -\frac{A}{\sin\alpha''}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, wenn O und O' der Mittelpunkt der Curve sein sollen:

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{E}{\sin\alpha'} = -\frac{C}{\sin\alpha''},$$

$$\frac{E}{\sin\alpha} = \frac{D}{\sin\alpha'} = -\frac{B}{\sin\alpha''}.$$

Nach der 12. Nummer ist es leicht auszudrücken, dass zwei der drei Coordinatenlinien zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind. So erhalten wir z. B. für den Fall, dass $O''O$ und $O''O'$ zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{A\sin\alpha + C\sin\alpha''}{B\sin\alpha + E\sin\alpha''} = -\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$$

und wenn wir entwickeln,

$$A\sin\alpha\sin\alpha' + B\sin\alpha\sin\alpha'' + C\sin\alpha'\sin\alpha'' + E\sin^2\alpha'' = 0.$$

Nach der eben angezogenen 12. Nummer können wir auch ausdrücken, dass irgend zwei der drei Durchmesser (12), (13), (14) parallel sind, und also zu der Bedingungsgleichung kommen, die stattfinden muss, wenn die allgemeine Gleichung eine Parabel darstellen soll.

19. Sei wiederum:

$$Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0 \tag{15}$$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung. Soll die Curve die Coordinatenlinie OO' berühren, so muss diese Gleichung, wenn wir $p = 0$ setzen, für $\frac{q}{r}$ zwei gleiche Werthe geben. Dies führt zu folgender Bedingungsgleichung:

$$E^2 = DF.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ berührt werden sollen, folgende Bedingungsgleichungen:

$$C^2 = AF, \quad B^2 = AD.$$

Wenn alle drei Coordinatenlinien von der Curve berührt werden und wir $A = 1$ setzen, wodurch der Allgemeinheit kein Abbruch geschieht, so können wir der Gleichung (15), indem wir zugleich durch p^2 dividiren, folgende Form geben:

$$1 + 2B\varphi + 2C\psi + B^2\varphi^2 - 2BC\varphi\psi + C^2\psi^2 = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf B, C und φ, ψ symmetrisch. Wir müssen das vorletzte Glied derselben mit dem Zeichen — nehmen, weil wir, wenn wir das entgegengesetzte Zeichen nehmen, der Gleichung folgende Form geben können:

$$(1 + B\varphi + C\psi)^2 = 0.$$

Alsdann erhalten wir also statt der Curve (16) ein System zweier zusammenfallender gerader Linien, was ganz der Anlage der letzten Entwickelungen gemäss ist.

Wenn wir nacheinander in der Gleichung der Curve $p = 0$, $q = 0$ und $r = 0$ setzen, so kommt:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{B}{C}, \quad \psi = -\frac{1}{C}, \quad \varphi = -\frac{1}{B}$$

für die Gleichungen derjenigen drei geraden Linien, welche die drei Coordinatenpunkte O'', O' und O mit den Berührungen auf den gegenüberstehenden Seiten verbinden. Hiernach erhalten wir eine einfache Constantenbestimmung der Gleichung (16).

20. Wenn die durch die Gleichung

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

dargestellte Curve eine Hyperbel ist und wir auf einem Zweig derselben uns einen Punkt immer weiter fortgerückt denken, so nähern sich die Werthe von φ und ψ immer mehr einer bestimmten Grenze, ohne im Allgemeinen unendlich oder Null zu werden. Diese Grenzwerthe bestimmen zwei durch O und O' gehende gerade Linien, die, je weiter jener

Punkt sich entfernt, sich dem Parallelismus mit der Asymptote jenes Hyperbelzweiges immer mehr nähern. Hiernach ergiebt sich, wenn wir den Winkel, welchen jene Asymptote mit OO' bildet, ω nennen, für jene Grenzwerthe:

$$(17) \qquad \varphi = -\frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin\omega}, \quad \psi = \frac{\sin(\alpha' + \omega)}{\sin\omega}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung der Curve, so kommt:

$$(17') \quad A\sin^2\omega - 2B\sin\omega\sin(\alpha - \omega) + 2C\sin\omega\sin(\alpha' + \omega) + D\sin^2(\alpha - \omega) - 2E\sin(\alpha - \omega)\sin(\alpha' + \omega) + F\sin^2(\alpha' + \omega) = 0.$$

Wenn wir entwickeln, so erhalten wir eine in Beziehung auf $\tang\omega$ quadratische Gleichung. Die Wurzeln dieser Gleichung bestimmen die *Richtungen der beiden Asymptoten* der Hyperbel, oder wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleich sind, die Richtung der Durchmesser der Parabel. Werden die Wurzeln imaginär, so stellt die vorstehende Gleichung eine Ellipse dar. Wir gehen in die Entwickelung dieser verschiedenen Beziehungen, die bei gehöriger Annahme des Coordinatendreiecks sich sehr vereinfacht, nicht weiter ein.

Wenn die letzte Gleichung (17') für $\tang\omega$ gleiche und entgegengesetzte Werthe giebt, so ist OO' parallel einer Axe der Curve. Für diesen Fall erhalten wir, wenn wir überdies annehmen, dass die Curve durch die drei Coordinatenpunkte geht, und also $A = D = F = 0$ setzen:

$$B\sin\alpha - C\sin\alpha' + E\sin(\alpha - \alpha') = 0.$$

21. Wenn die Coordinatenlinie $O'O''$ einer Asymptote parallel ist, so erhalten wir für die Grenzwerthe (17):

$$\psi = 0, \quad \varphi = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'} = \varphi',$$

und hiernach folgende in Beziehung auf A, B und D lineare Bedingungsgleichung:

$$A + 2B\varphi' + D\varphi'^2 = 0.$$

Soll $O'O''$ überdies selbst Asymptote sein, so muss die letzte Gleichung, aufgelöst in Beziehung auf φ', gleiche Wurzeln geben, wonach:

$$\frac{B}{A} = -\frac{1}{\varphi'} = -\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''}, \quad \frac{D}{A} = \frac{1}{\varphi'^2} = \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\alpha''}.$$

Auf ähnliche Weise kommt, wenn OO'' der andern Asymptote parallel ist und wir $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha} = \psi'$ setzen:

$$A + 2C\psi + F\psi'^2 = 0$$

und wenn OO'' selbst Asymptote sein soll:

$$\frac{C}{A} = -\frac{1}{\psi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''}, \quad \frac{F}{A} = \frac{1}{\psi'^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha''}.$$

Hiernach erhalten wir, wenn wir zugleich $A = 1$ setzen, für die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten OO'' und $O'O''$ sind:

$$1 - 2\frac{\varphi}{\varphi'} - 2\frac{\psi}{\psi'} + \frac{\varphi^2}{\varphi'^2} + 2E\varphi\psi + \frac{\psi^2}{\psi'^2} = 0;$$

oder:

$$\sin^2\alpha' - 2\varphi\sin\alpha'\sin\alpha'' - 2\psi\sin\alpha\sin\alpha'' + \varphi^2\sin^2\alpha' + 2E\varphi\psi + \psi^2\sin^2\alpha = 0.$$

In diesen beiden Gleichungen ist E der einzige unbestimmte Coefficient, und wir erhalten alle möglichen Hyperbeln, deren Asymptotensystem durch die Gleichung:

$$\varphi\psi = 0$$

dargestellt wird, indem wir E alle möglichen Werthe beilegen. Durch eine einfache Verbindung zweier solcher Gleichungen oder durch Verbindung einer solchen Gleichung und der Gleichung des Asymptotensystems kommen wir zu folgender Gleichung:

$$(\sin\alpha'' - \varphi\sin\alpha' - \psi\sin\alpha)^2 = 0,$$

d. h. zu der Gleichung des Systems zweier zusammenfallender unendlich weit entfernter gerader Linien.

Mit derselben Gleichung lassen sich auch die Gleichungen zweier ähnlicher und concentrischer Ellipsen verbinden, für deren allgemeine Gleichung wir bei gehöriger Coordinatenbestimmung die folgende, in welcher M einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, nehmen können:

$$\sin^2\alpha'' - 2\varphi\sin\alpha'\sin\alpha'' - 2\psi\sin\alpha\sin\alpha'' + M\varphi^2\sin^2\alpha' + 2\varphi\psi\sin\alpha\sin\alpha' + M\psi^2\sin^2\alpha = 0\,^{1}).$$

Und somit können wir mit H. Poncelet (*Traité des propriétés projectives* No. 130) sagen, dass zwei ähnliche concentrische Linien zweiter Ordnung *in unendlicher Entfernung einen doppelten Contakt haben*, der reell oder ideal ist, je nachdem die beiden Curven Hyperbeln oder Ellipsen sind, und zugleich haben wir die Gleichung der unendlich weit entfernten Berührungschorde. In der analytischen Behandlungsweise der Linien zweiter Ordnung ist dieser Satz von keiner besondern Wichtigkeit, weil wir alle allgemeinen Beziehungen sich doppelt berührender Linien dieser Ordnung unmittelbar erhalten, indem wir die Gleichungen zweier derselben durch allgemeine Symbole bezeichnen, und berücksichtigen, dass solche zwei Gleichungen sich immer zu einer Gleichung, deren erster Theil das vollständige Quadrat eines linearen

Ausdruckes ist, verbinden lassen. Der Satz gewinnt aber in der Methode des H. Poncelet eine besondere Bedeutung, weil derselbe vermittelst dieses Satzes die allgemeinen Beziehungen zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Ordnung zu einander aus den Eigenschaften eines Systems zweier concentrischer Kreise herleitet.

22. *Theorie der Osculation.* Wenn die durch:

$$p^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0$$

dargestellte Curve die Coordinatenlinie OO'' im Punkte O berühren soll, so muss, wenn wir $q = 0$ setzen, die Gleichung

$$p^2 + 2Cpr + Fr^2 = 0$$

für p zwei gleiche und verschwindende Werthe geben, so dass also

$$C = 0, \quad F = 0.$$

Die Gleichungen zweier solcher Curven, die OO'' im Punkte O berühren, seien hiernach folgende:

$$p^2 + 2Bpq + Dq^2 + 2Eqr = 0,$$
$$p^2 + 2B'pq + D'q^2 + 2E'qr = 0.$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, und vernachlässigen den gemeinschaftlichen Faktor q, so kommt

$$2(B - B')p + (D - D')q + 2(E - E')r = 0$$

für die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde beider Curven. Soll diese Chorde durch den Punkt O gehen, und sollen also die beiden Curven eine *dreipunktige Osculation* haben, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$E = E'.$$

Soll in diesem Falle der Durchschnittspunkt beider Curven in die Coordinatenlinie OO' fallen, so erhalten wir neben der letzten Bedingungsgleichung noch folgende:

$$D = D'.$$

Für eine *vierpunktige Osculation*, wo die gemeinschaftliche Chorde mit der gemeinschaftlichen Tangente, der Coordinatenlinie OO'', zusammenfällt, erhält man endlich folgende beiden Bedingungsgleichungen:

$$E = E', \quad B = B'.$$

23. Für die Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung, die OO'' zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, erhalten wir (21), indem wir $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha} = \psi'$ setzen, Gleichungen von folgender Form:

$$p^2 + 2Bpq - 2\frac{1}{\psi'}pr + Dq^2 + 2Eqr + \frac{1}{\psi'^2}r^2 = 0,$$

$$p^2 + 2B'pq - 2\frac{1}{\psi'}pr + D'q^2 + 2E'qr + \frac{1}{\psi'^2}r^2 = 0.$$

Wenn wir abziehen und den gemeinschaftlichen Faktor q vernachlässigen, so kommt:

(18) $$2(B - B')p + (D - D')q + 2(E - E')r = 0,$$

für die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche die zwei übrigen Durchschnitte der beiden Curven verbindet. Diese Chorde fällt mit der Asymptote OO'' zusammen und die beiden Curven haben in *unendlicher Entfernung einen vierpunktigen* Contakt, wenn

$$B = B', \quad E = E'.$$

Soll dieser Contakt bloss ein *dreipunktiger* sein, so ist die durch (18) dargestellte gerade Linie der Asymptote nur parallel, und es muss also diese Gleichung befriedigt werden, wenn wir zugleich

$$q = 0 \text{ und } \frac{r}{p} = \psi' = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha}$$

setzen, wonach wir folgende Bedingungsgleichung erhalten:

$$\frac{B - B'}{E - E'} = -\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha}.$$

24. Alle möglichen Curven, welche die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ in denselben vier Punkten schneiden, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$p^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0,$$

indem wir B, C, D und F als ein für alle Mal gegeben betrachten und E nach einander alle möglichen Werthe beilegen. Ebenso stellt dieselbe Gleichung alle möglichen Curven zweiter Ordnung dar, welche OO'' und OO' und dann $O'O''$ und $O'O$ in denselben vier Punkten schneiden, wenn wir einmal bloss B, das andere Mal bloss C als unbestimmten Coefficienten betrachten.

25. Eine Linie zweiter Ordnung, welche die beiden Coordinatenlinien $O''O$ und $O''O'$ in den Punkten O und O' berührt, hat folgende einfache Form:

$$p^2 + 2Eqr = 0.$$

26. Folgende Gleichung:

$$p^2 + Dq^2 + Fr^2 = 0$$

stellt eine Linie zweiter Ordnung dar, *in Beziehung auf welche jede der drei Coordinatenlinien die Polare des gegenüberstehenden Coordinatenpunktes ist* (14). Sind D und F beide positiv, so ist die Curve imaginär; sind

D und F beide negativ und gleich, und nehmen wir überdies an, der Coordinatenwinkel bei O'' sei ein rechter, so stellt die Gleichung

$$p^2 + D(q^2 + r^2) = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, deren einer Brennpunkt O'' und deren Brennpunktspolare (Directrix) OO' ist; und diese Linie ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $(-D) > 1$, $(-D) = 1$, $(-D) < 1$.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich unmittelbar mehrere bekannte Sätze.

27. Wenn die Gleichung

$$p^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung darstellen soll, von welcher die Coordinatenlinien OO' und $O'O''$ berührt werden, so erhalten wir folgende beiden Bedingungsgleichungen:

$$E^2 = DF, \quad B^2 = D,$$

und mithin:

$$\frac{E}{B} = \pm\sqrt{F}.$$

Wenn dieselbe Curve überdies OO'' in zwei festen Punkten schneiden soll, so ist C und F constant. Da F constant ist, so ist es auch $\frac{E}{B}$, und mithin schneidet die Polare von O', die durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$B + D\varphi + E\psi = 0,$$

die Coordinatenlinie OO'' in einem von zwei festen Punkten. In diesen beiden Punkten und in den Punkten O und O'' wird OO'' harmonisch getheilt. Hiernach erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung durch dieselben beiden Punkte gehen und dieselben beiden geraden Linien berühren, so gehen die Berührungschorden durch einen von zwei festen Punkten der gemeinschaftlichen Chorde aller Curven.

28. Wenn

$$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

irgend eine Linie zweiter Ordnung darstellt, so stellt

$$D\varphi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0$$

das System derjenigen beiden geraden Linien dar, die vom Punkte O'' nach den Durchschnitten der Curve mit OO' gezogen werden können, mithin stellt die Gleichung:

(19) $$A + 2B\varphi + 2C\psi = 0$$

diejenige gerade Linie dar, welche durch die beiden übrigen Durchschnitte jenes Liniensystems und der Curve geht.

Die durch (19) dargestellte gerade Linie und die Polare des Punktes O'':

$$A + B\varphi + C\psi = 0$$

schneiden sich nach der zehnten Nummer auf der Coordinatenlinie OO'. Wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dass das Coordinatendreieck ein durchaus beliebiges ist, so liegt hierin *die allgemeine Theorie der Pole und Polaren.*

29. Für die Gleichungen derjenigen beiden geraden Linien, die zu den beiden Punkten O' und O in derselben Beziehung stehen, als die gerade Linie (19) zu dem Punkte O'' steht, erhalten wir

$$2B + D\varphi + 2E\psi = 0,$$
$$2C + 2E\varphi + F\psi = 0.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen und die Gleichung (19) mit den drei Gleichungen (8), (9) und (10) vergleichen, so sehen wir, auch ohne die Beweisart der 16. Nummer zu wiederholen, dass die drei geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Winkelpunkte des von den drei erstgenannten geraden Linien gebildeten Dreiecks und des Coordinatendreiecks verbinden, durch einen und denselben Punkt gehen, und also auch die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke sich in solchen drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen. Wenn wir den besondern Fall betrachten, dass die drei Coordinatenpunkte auf der Linie zweiter Ordnung liegen, so erhalten wir den Satz vom umschriebenen Dreieck (No. 15).

30. Wenn wir der Kürze wegen durch

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0 \tag{20}$$

die Gleichungen irgend dreier Linien zweiter Ordnung (homogene Gleichungen des zweiten Grades zwischen p, q und r) bezeichnen, die durch zwei feste Punkte gehen, und wir durch diese beiden Punkte die Coordinatenlinie OO' legen, so können wir die Coefficienten von q^2, qr und r^2 in den drei Gleichungen gleich nehmen, so dass

$$A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0$$

drei Gleichungen darstellen, die linear sind und von denen zwei die dritte bedingen. Hierin liegt der Beweis des bekannten, an Corollarien reichen Satzes:

Wenn drei Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche Chorde haben, so gehen die zweiten gemeinschaftlichen Chorden je zweier derselben durch einen constanten Punkt.

Wenn wir durchaus keine besondere Coordinatenbestimmung machen und die gemeinschaftliche Chorde der drei Curven (20) durch die Gleichung $c = 0$, die drei zweiten Chorden durch die Gleichungen $a'' = 0$, $a' = 0$, $a = 0$ und endlich durch m, m' und m'' unbestimmte Coefficienten bezeichnen, so kommt offenbar (ähnlich wie Analyt. geom. Entw. No. 383):

$$\begin{aligned} A - m'' A' &= ca'' = 0, \\ A - m' A'' &= ca' = 0, \\ A' - m A'' &= ca = 0, \end{aligned}$$

und die Form dieser drei Gleichungen zeigt, dass die drei zweiten Chorden durch denselben Punkt gehen. Hierin liegt also ein anderer Beweis des vorstehenden Satzes, und überdies, wenn wir als besondern Fall

$$c = p \sin \alpha'' - q \sin \alpha' - r \sin \alpha$$

setzen, die *Theorie der Chordalen (axes radicaux)* ähnlicher und ähnlich liegender Linien zweiter Ordnung.

31. Wir wollen beispielsweise in Beziehung auf einige der in dem Vorstehenden vorkommenden Gleichungen einen allgemeinen Satz über die Variation der Constanten, den ich bei einer andern Gelegenheit gegeben habe, construiren, und werden auf diese Weise zu verschiedenartigen speciellen Sätzen kommen.*)

Wir haben in der 15. Nummer für die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, die durch die Coordinatenpunkte geht, folgende gefunden (Fig. 18):

(1) $$\frac{\nu}{\beta} + \frac{\mu}{\alpha} = 1.$$

*) Der im Texte erwähnte Satz ist folgender. Es sei:

(a) $$\varphi(y, x, b, a) = 0$$

irgend eine algebraische oder transcendente Gleichung zwischen zweien veränderlichen Grössen y und x und beliebigen Constanten, von denen wir zwei durch b und a bezeichnet haben. Diese Gleichung stellt, wenn y und x auf irgend ein Coordinatensystem bezogen werden, eine Curve dar; bezeichnen wir irgend einen Punkt dieser Curve durch (y', x') und betrachten die beiden Constanten als Coordinaten und veränderlich, so stellt die Gleichung:

(b) $$\varphi(y', x', y, x) = 0$$

eine neue Curve dar, die sich ändert, wenn der Punkt (y', x') auf der gegebenen Curve fortrückt, aber dabei nicht aufhört, *durch den festen Punkt* $(y = b, x = a)$ *zu gehen.* Wenn die Gleichung (a) eine Constante nur im Quadrate enthält, so geht die Curve (b) durch zwei feste Punkte; sie geht durch vier feste Punkte, wenn jene Gleichung nur die Quadrate der beiden Constanten enthält. Nichts verhindert uns in der ursprünglichen Gleichung b und a Null zu setzen.

Bezeichnen wir irgend einen Punkt M dieser Curve durch (ν', μ'), so ist

$$\frac{\nu'}{\beta} + \frac{\mu'}{\alpha} = 1;$$

betrachten wir ferner in dieser Gleichung β und α als veränderlich und setzen $\beta = \nu$, $\alpha = \mu$, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\nu'\mu + \mu'\nu = \mu\nu, \tag{2}$$

die eine gerade Linie darstellt, welche, wie auch der Punkt (ν', μ') auf der Curve (1) fortrücken mag, immer durch den festen Punkt $(\nu = \beta, \mu = \alpha)$ oder durch P'', den Durchschnitt der beiden Tangenten in den Coordinatenpunkten O und O' geht.

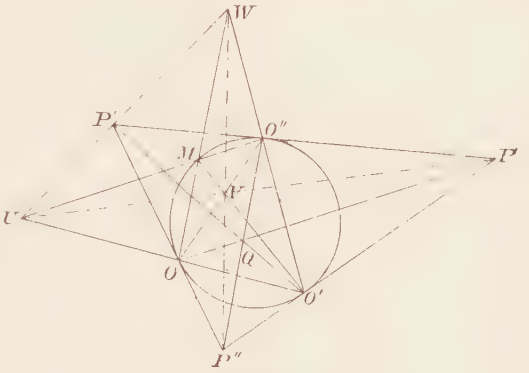

Fig. 18.

Die Construktion der geraden Linie (2), die durch die beiden Punkte (ν', ∞) oder V, und (∞, μ') oder W geht, giebt folgenden bekannten Satz:

Wenn man in eine Linie zweiter Ordnung über einer und derselben Chorde als Basis mehrere Dreiecke beschreibt, so geht diejenige gerade Linie, welche die Durchschnitte der Schenkel je zweier solcher Dreiecke verbindet, durch einen festen Punkt, den Pol der gemeinschaftlichen Basis aller Dreiecke.

Wir erhalten andere Constructionen desselben Satzes, wenn wir nicht β und α, sondern $(-\beta)$ und α oder β und $(-\alpha)$ für die veränderlichen Grössen nehmen und statt (2) die Gleichungen

$$-\nu'\mu + \mu'\nu = \mu\nu, \quad \nu'\mu - \mu'\nu = \mu\nu$$

construiren, welche solche gerade Linien darstellen, die durch die beiden festen Punkte $(\nu = -\beta, \mu = \alpha)$ oder P', und $(\nu = \beta, \mu = -\alpha)$ oder P gehen. Wir erhalten aber einen andern Satz, wenn wir $(-\beta)$ und $(-\alpha)$ für die beiden veränderlichen Grössen nehmen und also folgende Gleichung:

$$\nu'\mu + \mu'\nu + \mu\nu = 0,$$

oder:

$$p + \mu' q + \nu' r = 0 \tag{3}$$

construiren. Die durch diese Gleichungen dargestellte gerade Linie geht durch den festen Punkt $(\nu = -\beta, \mu = -\alpha)$ d. h. durch Q, den

Kreuzungspunkt derjenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpunkte des umschriebenen Dreiecks $PP'P''$ mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten O, O' und O'' verbinden.

Wenn wir von irgend einem Punkte (ν', μ') gerade Linien nach den Winkelpunkten des Coordinatendreiecks ziehen, so bestimmen die Durchschnitte derselben mit den Seiten dieses Dreiecks ein neues Dreieck UVW. Die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke schneiden sich in solchen drei Punkten, die in gerader Linie liegen, und diese gerade Linie wird durch (3) dargestellt. *Wenn der Punkt* (ν', μ') *auf irgend einer durch die Winkelpunkte des Dreiecks* $OO'O''$ *gehenden Linie zweiter Ordnung fortrückt, so dreht sich diese gerade Linie um einen festen Punkt.* (Dieser Satz ist von Herrn Steiner in einem früheren Hefte dieses Journals*) zur Beweisführung vorgelegt worden. Ich bemerke beiläufig, dass bei dem analogen Satze im Raum an die Stelle der beliebigen, dem Dreieck umschriebenen Linie zweiter Ordnung irgend eine Fläche dritter Ordnung tritt, in welcher die sechs Kanten eines Tetraeders liegen.)

32. Wenn wir in der Gleichung (1) der vorigen Nummer nicht β und α, sondern $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\alpha}$ als veränderliche Grössen construiren, so erhalten wir nach derselben Verfahrungsweise nun nicht mehr gerade Linien, die durch denselben Punkt gehen, sondern Linien zweiter Ordnung, die, ausser in den drei Coordinatenpunkten, sich noch in einem vierten festen Punkte schneiden. Die Bestimmung dieser Curven hat keine Schwierigkeit.

33. Wir können auch von der Gleichung (2):

$$\nu'\mu + \mu'\nu = \mu\nu,$$

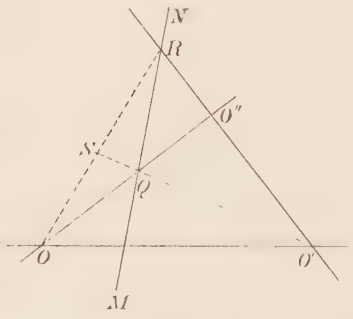

Fig. 19.

als der Gleichung einer gegebenen geraden Linie ausgehen, und indem wir $(\pm\nu')$ und $(\pm\mu')$ als veränderlich betrachten und irgend einen Punkt dieser Linie durch (β, α) bezeichnen, zu der Gleichung einer Linie zweiter Ordnung:

$$\pm\frac{\nu}{\beta} \pm \frac{\mu}{\alpha} = 1$$

zurückgehen. Alle Linien dieser Ordnung, die wir auf diese Weise erhalten, indem der Punkt (β, α) auf der gegebenen geraden Linie fortrückt, gehen durch den festen Punkt $(\pm\nu', \pm\mu')$. Wenn (Fig. 19)

*) [Vgl. Crelle's Journal, Band 3, S. 211, Lehrsatz 22.]

MN die gegebene gerade Linie ist, und die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ in den beiden Punkten Q und R schneidet, so ist S, der Durchschnitt von OR und $O'Q$, der feste Punkt (ν', μ'). Also:

Alle Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben drei Punkte gehen und in diesen drei Punkten die Seiten eines veränderlichen Dreiecks berühren, in welchem einer der drei Winkelpunkte oder der Kreuzungspunkt der von diesen Winkelpunkten nach den gegenüberliegenden Berührungen gezogenen geraden Linien auf einer gegebenen geraden Linie fortrückt, gehen durch noch einen vierten festen Punkt.

Wenn *ein* Winkelpunkt auf einer geraden Linie fortrückt, so rücken offenbar auch die beiden übrigen Winkelpunkte und der Kreuzungspunkt auf geraden Linien fort, und wenn der Kreuzungspunkt auf gerader Linie fortrückt, so thut es auch jeder Winkelpunkt.

Nach der Theorie der Reciprocität *(des polaires réciproques)* erhalten wir aus dem Vorstehenden folgenden Satz:

Wenn man in ein gegebenes Dreieck beliebig viele Linien zweiter Ordnung beschreibt, so entsprechen jeder derselben drei Berührungschorden, welche die drei Dreieckseiten in solchen drei Punkten schneiden, die in derselben geraden Linie liegen. Wenn irgend eine jener drei Berührungschorden durch einen festen Punkt geht, so thun es auch die beiden andern und jene letztgenannte gerade Linie: *alsdann berühren alle Curven ausser den Dreieckseiten noch eine constante vierte gerade Linie.*

34. Für die Gleichung einer die drei Coordinatenlinien berührenden Linie zweiter Ordnung erhalten wir nach der 19. Nummer folgende:

$$(1) \qquad 1 - 2A\varphi - 2B\psi + A^2\varphi^2 - 2AB\varphi\psi + B^2\psi^2 = 0,$$

wenn der Kreuzungspunkt der drei von den Coordinatenpunkten nach den gegenüberstehenden Berührungen gezogenen geraden Linien der Punkt $\left(\psi = \frac{1}{B},\ \varphi = \frac{1}{A}\right)$ ist. Bezeichnen wir irgend einen Punkt der Curve durch (ψ', φ'), so stellt die Gleichung:

$$(2) \qquad 1 - 2\varphi'\varphi - 2\psi'\psi + \varphi'^2\varphi^2 - 2\varphi'\psi'\varphi\psi + \psi'^2\psi^2 = 0$$

neue, die drei Coordinatenlinien berührende Linien zweiter Ordnung dar, die alle durch den festen Punkt $(\psi = B,\ \varphi = A)$ gehen und für welche der veränderliche Kreuzungspunkt $\left(\psi = \frac{1}{\psi'},\ \varphi = \frac{1}{\varphi'}\right)$ ist.

Die Beziehung der Curve (1) zu jeder Curve (2) ist eine gegenseitige. Der Kreuzungspunkt der einen hat zu Coordinaten die reciproken Werthe der Coordinaten eines Punktes der andern. Sind daher irgend zwei Punkte der Curve (1) gegeben, so erhalten wir zwei Curven (2);

diese beiden Curven schneiden sich im Allgemeinen in vier Punkten, und die reciproken Coordinatenwerthe dieser vier Punkte bestimmen die vier Kreuzungspunkte derjenigen vier Linien zweiter Ordnung, welche im Allgemeinen die drei Coordinatenlinien berühren und durch die beiden gegebenen Punkte gehen. Die hierdurch angezeigte Construction einer Linie zweiter Ordnung, *die drei gegebene gerade Linien berührt und durch zwei gegebene Punkte geht*, lässt sich nach bekannten Sätzen auf elementarem Wege ausführen. —

35. Wenn wir durch die Gleichung:

$$F(\psi, \varphi) = 0 \tag{1}$$

irgend eine algebraische oder transcendente Curve darstellen, so erhalten wir die Gleichung einer zweiten Curve, wenn wir für ψ und φ ihre reciproken Werthe nehmen:

$$F\left(\frac{1}{\psi}, \frac{1}{\varphi}\right) = F(\nu, \mu) = 0. \tag{2}$$

Die Beziehung der beiden Gleichungen zu einander ist eine gegenseitige. Im Allgemeinen ist, wenn die eine derselben algebraisch und von irgend einem m^{ten} Grade ist, die andere vom $2m^{\text{ten}}$ Grade. Beide Curven sind durch gleichviele Punkte bestimmt. Wenn eine derselben gegeben ist, so können wir so viele Punkte der andern construiren, als wir wollen. Wenn (1) irgend eine gerade Linie darstellt, so stellt (2) eine durch die drei Coordinatenpunkte gehende Linie zweiter Ordnung dar. Wenn daher ausser diesen drei Coordinatenpunkten noch irgend *zwei* Punkte dieser Linie gegeben sind, so können wir zwei Punkte jener geraden Linie und dann wiederum so viele Punkte der Linie zweiter Ordnung construiren, als wir wollen. (No. 7.) Wenn (1) eine durch einen Coordinatenpunkt gehende gerade Linie darstellt, so stellt (2) eine zweite solche gerade Linie dar. Wenn (1) eine durch zwei Coordinatenpunkte gehende gerade Linie zweiter Ordnung darstellt, so stellt (2) ebenfalls eine solche Linie zweiter Ordnung dar, und diese beiden Linien können auch identisch dieselben sein.

Durch drei Tangenten und einen der beiden Brennpunkte ist eine Linie zweiter Ordnung vollkommen bestimmt. Lässt man diese Linie sich so ändern, dass der eine Brennpunkt die Curve (1) beschreibt, so beschreibt der andere Brennpunkt die Curve (2). (No. 8). In dem Falle der *Parabel* liegt ein Brennpunkt unendlich weit; wir können also für (1) nach der 11. Nummer folgende Gleichung nehmen:

$$\varphi \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} + \psi \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = 1,$$

und erhalten alsdann für (2):

$$\mu \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} + \nu \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = 1;$$

eine Gleichung, in der wir ohne Mühe die Gleichung des um das Coordinatendreieck beschriebenen Kreises erkennen.

Theorie der Reciprocität.*)

36. Die Theorie der Reciprocität**) ist unstreitig eine der schönsten und bedeutendsten Erweiterungen der Geometrie in neuester Zeit. In die Ehre ihrer ersten Erfindung theilen sich die Herren Gergonne und Poncelet. Ich meinerseits bin später auf einem sehr verschiedenen, rein analytischen Wege und ohne eine *conique directrice* zu Hülfe zu nehmen, zu demselben Ziele gekommen und habe, was immer der unschätzbare Vortheil der analytischen Methode ist, gleich von Anfang an der Sache eine viel allgemeinere Seite abgewonnen. Eine Entwickelung der analytischen Theorie der Reciprocität habe ich bereits im August 1828 an den verdienstvollen Redakteur der *Annalen* nach Montpellier eingesandt***): ich kann hier nur ein paar Andeutungen geben, die in speciellerer Beziehung zu dem neuen Coordinatensysteme stehen.

37. Es sei:

$$b\psi + a\varphi = 1$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Wir wollen den leicht zu construirenden Punkt ($\psi = b$, $\varphi = a$) den Pol dieser Linie nennen. Es sei ferner (ψ', φ') irgend ein Punkt der geraden Linie; alsdann stellt:

$$\psi'\psi + \varphi'\varphi = 1$$

irgend eine gerade Linie dar, die durch den Punkt (b, a) geht, und

*) Um kein neues Wort einzuführen, werde ich diesen Ausdruck als die Uebertragung des Poncelet'schen *„théorie des polaires réciproques“* gebrauchen.

**) Aus der im Texte entwickelten analytischen Theorie der Reciprocität springt sogleich in die Augen, dass sich jeder Satz, der sich auf gerade Linien bezieht, und zur *„géométrie de situation“* gehört, unmittelbar auf alle solche algebraische oder transcendente Curven, deren Gleichungen, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, in Beziehung auf zwei ihrer Constanten *linear* sind, übertragen und also *unendlich* vervielfältigen lässt. Da unsere Entwickelungen auf der Variation der Constanten beruhen, so erscheint, wie ich schon anderswo angedeutet habe, wenn wir noch einen Schritt weiter gehen, die Reciprocität insbesondere auch mit der Theorie der Abwickelung (*théorie des développées et développantes*) unter *einem* allgemeinen Gesichtspunkte.

***) [Der bezügliche Aufsatz ist nicht gedruckt worden; vgl. die Vorrede zum zweiten Bande der „analytisch-geometrischen Entwickelungen“ S. VII.]

deren Pol, der obigen Definition gemäss, der Punkt (ψ', φ') ist. Also:

Der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch einen gegebenen Punkt gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol jener Punkt ist.

Auf diesen Satz lässt sich unmittelbar die ganze Theorie der *polaires réciproques* gründen. Wir verweilen nicht hierbei, weil, ausser der Definition und der Construction des Poles, hier alles sich gerade so verhält, wie bei dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, und wollen nur ein Beispiel von der Verallgemeinerung dieser Theorie geben.

38. Es sei:

$$\frac{\psi}{b} + \frac{\varphi}{a} = 1 \tag{1}$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Wir wollen den Punkt $(\psi = b,\ \varphi = a)$ den Pol der geraden Linie nennen. Es sei ferner:

$$\frac{B}{\psi} + \frac{A}{\varphi} = 1$$

die Gleichung irgend einer durch die drei Coordinatenpunkte gehenden Linie zweiter Ordnung. Wir wollen den Punkt $(\psi = B,\ \varphi = A)$ den Pol dieser Linie zweiter Ordnung nennen. Bezeichnet nun (ψ', φ') irgend einen Punkt der geraden Linie (1), so stellt

$$\frac{\psi'}{\psi} + \frac{\varphi'}{\varphi} = 1 \tag{2}$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die durch den Punkt (b, a) d. h. durch den Pol von (1) geht, und deren Pol gegenseitig der auf (1) liegende Punkt (ψ', φ') ist. Also:

Der geometrische Ort für die Pole aller Linien zweiter Ordnung, die ausser durch die drei Coordinatenpunkte noch durch einen vierten festen Punkt gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol dieser vierte feste Punkt ist, und gegenseitig, der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch denselben festen Punkt gehen, ist eine Linie zweiter Ordnung, deren Pol dieser feste Punkt ist.

Die Pole der Seiten eines gegebenen Sechsecks z. B. bestimmen ein neues Sechseck, dessen Seiten Bogen von Linien zweiter Ordnung sind und die Winkelpunkte des gegebenen Sechsecks zu Polen haben. Wenn sich eine Linie zweiter Ordnung in das gegebene Sechseck beschreiben lässt, so schneiden sich diejenigen Linien zweiter Ordnung, deren Bogen die gegenüberliegenden Seiten des zweiten Sechsecks sind, in solchen drei Punkten, die mit den drei Coordinatenpunkten auf derselben Linie zweiter Ordnung liegen. Wenn sich um das gegebene Sechseck eine Linie zweiter Ordnung beschreiben lässt, so

schneiden sich diejenigen drei Linien zweiter Ordnung, welche durch die drei Coordinatenpunkte und die drei Paare von gegenüberliegenden Winkelpunkten des zweiten Sechsecks gehen, in demselben Punkte u. s. w.

39. Von der Vervielfältigung bekannter Sätze, worin eigentlich die Theorie der Reciprocität besteht, wollen wir nur ein einziges Beispiel geben. Wenn die gegenüberliegenden Winkelpunkte zweier Dreiecke auf drei durch denselben Punkt gehenden geraden Linien liegen, so schneiden sich, wie bekannt, die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Punkten, die in gerader Linie liegen. Diesem Satze entspricht nach der vorigen Nummer folgender:

Drei Linien zweiter Ordnung, welche durch irgend drei feste (Coordinaten-)Punkte gehen, schneiden sich paarweise genommen noch in drei Punkten: legt man durch jeden dieser Durchschnitte, durch die drei Coordinatenpunkte und irgend einen vierten festen Punkt drei neue Linien derselben Ordnung, so schneiden diese die drei gegebenen, ausser in den drei Coordinatenpunkten, noch in drei Punkten, und diese sechs Punkte liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung[2]).

40. Wenn irgend eine Curve gegeben ist, so giebt es eine zweite Curve, welche alle durch drei feste Punkte (Coordinatenpunkte) gehenden Linien zweiter Ordnung, deren Pole auf der ersten Curve liegen, umhüllt und deren Punkte wiederum die Pole der Tangenten der zweiten Curve sind. Der Grad der ersten Curve zeigt an, wie viele Linien zweiter Ordnung sich im Allgemeinen durch die drei Coordinatenpunkte und einen vierten beliebigen Punkt legen lassen, die die zweite Curve berühren; die Zahl der Durchschnittspunkte der zweiten Curve mit einer durch die drei Coordinatenpunkte gehenden Linie zweiter Ordnung zeigt an, wie viele Tangenten sich im Allgemeinen an die erste Curve legen lassen.

Wenn die Gleichung der ersten Curve gegeben ist, so können wir leicht die Gleichung der zweiten Curve finden, und umgekehrt. Wenn etwa eine zweite Curve durch die Gleichung:

$$\psi = F(\varphi) \tag{3}$$

gegeben ist, so erhalten wir die ihr zugehörige erste Curve, wenn wir zwischen der vorstehenden Gleichung (3) und der Gleichung:

$$\frac{B}{\psi} + \frac{A}{\varphi} = 1,$$

und den beiden Differentialgleichungen derselben:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = F'(\varphi), \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{B-\psi}{A-\varphi}$$

ψ, φ und $\frac{d\psi}{d\varphi}$ eliminiren und in der resultirenden Gleichung ψ und φ für B und A schreiben.

Wenn insbesondere die Gleichung (3) eine gerade Linie darstellt und demnach folgende Form hat:

$$b\psi + a\varphi = 1,$$

so erhalten wir für die gesuchte Curve eine Linie zweiter Ordnung. Hieraus ist nach den Bemerkungen zu Anfang dieser Nummer ersichtlich, dass durch vier Punkte sich im Allgemeinen zwei Linien zweiter Ordnung legen lassen, die eine gegebene Gerade berühren. Zugleich ergiebt sich, dass, da zwei Linien zweiter Ordnung sich im Allgemeinen in vier Punkten schneiden, es eben so viele Linien zweiter Ordnung giebt, die durch drei gegebene Punkte gehen und zwei gegebene gerade Linien berühren. Wir müssen hier aus Mangel an Raum abbrechen.

Coordinatenverwandlung.

41. Die Verwandlung der Coordinaten hat in dem neuen Systeme eine viel grössere Ausdehnung, als in dem gewöhnlichen Systeme. Da wir aber von derselben in diesem Aufsatze keinen Gebrauch machen, so beschränken wir uns auch hier nur auf einige Andeutungen.

Die Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf irgend drei Coordinatenpunkte, ist in Beziehung auf ψ und φ vom ersten Grade, und bleibt es, wie wir auch die drei Coordinatenpunkte anders annehmen mögen. Hiernach ist, wenn wir die Coordinaten irgend eines Punktes in dem einen Systeme ψ und φ, und die Coordinaten desselben Punktes in dem andern Systeme Ψ und Φ nennen:

(1) $$\Psi = a + b\psi + c\varphi,$$

(2) $$\Phi = d + e\psi + f\varphi.$$

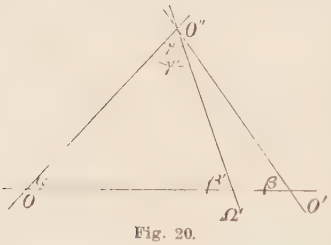

Fig. 20.

a, b, c, d, e und f sind Constanten, die nach der bekannten Methode bestimmt werden müssen. Wir wollen beispielsweise den speciellen Fall nehmen, dass sich bloss (Fig. 20) die eine Coordinatenlinie $O''O'$ um den Punkt O'' bis $O''\Omega'$ dreht, und den Winkel $OO''\Omega'$ durch γ' bezeichnen, während wir den Winkel $OO''O'$, wie gewöhnlich, γ nennen. Bei dieser Annahme ist offenbar

(3) $$\Phi = \varphi,$$

so dass: $d = e = 0$, $f = 1$. Da für den Punkt O'' zugleich Ψ, ψ und φ verschwindet, so ist auch $a = 0$. Dividiren wir die Gleichung (1) durch $\Phi = \varphi$, so kommt also

$$\frac{\Psi}{\Phi} = b\frac{\psi}{\varphi} + c. \tag{4}$$

Für $O''O'$ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = -\frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma}, \quad \frac{\psi}{\varphi} = 0,$$

und für $O''\Omega'$ folgende Gleichungen:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = 0, \quad \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma'};$$

und mithin ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten b und c aus (4) folgende beide Gleichungen:

$$-\frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma} = c,$$

$$0 = b\frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma'} + c.$$

Hiernach erhalten wir:

$$c = \frac{\sin(\gamma' - \gamma)}{\sin\gamma}, \quad b = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma},$$

und endlich:

$$\Psi\sin\gamma = \psi\sin\gamma' + \varphi\sin(\gamma' - \gamma). \tag{5}$$

Allgemeinere Coordinatenbestimmung.

42. Wir haben in dem Bisherigen nur drei gerade Linien als Coordinatenlinien genommen. Wir können deren aber auch beliebig viele nehmen. Die Abstände irgend eines Punktes von solchen festen Coordinatenlinien wollen wir durch $p, q, r, s, t, \ldots$ bezeichnen. Alsdann stellt die Gleichung:

$$F(p, q, r, s, t, \ldots) = 0 \tag{1}$$

irgend eine Curve dar, deren Ordnung durch den Grad dieser Gleichung angezeigt wird. Zwischen irgend dreien der verschiedenen Abstände findet eine lineare Beziehung statt, und einen vierten Abstand können wir hiernach auch ohne constantes Glied durch drei gegebene auf lineare Weise ausdrücken, so dass also, wenn wir durch a, b, c, a', b', c' u. s. w. Constanten bezeichnen, die von der gegenseitigen Lage der Coordinatenlinien abhängen:

$$s = ap + bq + cr$$
$$t = a'p + b'q + c'r$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Wir wollen, wie bisher, auch in dem Folgenden annehmen, die Gleichung (1) sei in Beziehung auf die verschiedenen Abstände $p, q, r, s, t, \ldots$ homogen.

43. Wir wollen der Kürze halber irgend eine homogene Funktion des m^{ten} Grades von $p, q, r, s, t, \ldots$ durch U bezeichnen. Alsdann ist nach dem bekannten Theorem über die homogenen Funktionen:

$$\frac{\partial U}{\partial p} p + \frac{\partial U}{\partial q} q + \frac{\partial U}{\partial r} r + \frac{\partial U}{\partial s} s + \frac{\partial U}{\partial t} t \cdots = mU. \tag{1}$$

Der erste Theil dieser Gleichung gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial U}{\partial p} p + \frac{\partial U}{\partial q} q + \frac{\partial U}{\partial r} r + \frac{\partial U}{\partial s} s + \frac{\partial U}{\partial t} t \cdots = 0 \tag{2}$$

ist also die Gleichung der Curve selbst, die auch durch $U = 0$ dargestellt wird. Beziehen wir aber in dieser letzten Gleichung die partiellen Differentialcoefficienten auf einen gegebenen Punkt der Curve, für welchen $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s = s'$, $t = t'$ u. s. w., und betrachten mithin dieselben als constant, so stellt die letzte Gleichung, die wir der Kürze halber bei dieser Voraussetzung folgendergestalt schreiben wollen:

$$V = 0, \tag{3}$$

eine gerade Linie dar. Diese Gerade geht durch den gegebenen Punkt der Curve, denn die letzte Gleichung wird nach dem oben erwähnten Theorem befriedigt, wenn wir $p = p'$, $q = q' \ldots$ setzen. Noch mehr, differentiiren wir die Gleichung (3) und die Gleichung der gegebenen Curve, so ergiebt sich:

$$dV = dU,$$

wenn wir nach der Differentiation für die veränderlichen Grössen die besondern Werthe $p', q', r', s', t', \ldots\ldots$ substituiren. *Die durch die Gleichung* (3) *dargestellte Linie ist also eine Tangente der Curve in dem gegebenen Punkte.*

Beschränken wir uns auf drei Coordinatenlinien wie in dem Frühern, so erhalten wir hiernach für die Tangente in irgend einem gegebenen Punkte folgende Gleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial p} p + \frac{\partial U}{\partial q} q + \frac{\partial U}{\partial r} r = 0,$$

wobei wir nach der Differentiation in den partiellen Differentialcoefficienten für p, q und r diejenigen Werthe substituiren müssen, die sich auf den gegebenen Berührungspunkt beziehen. Hiernach erhalten wir z. B., wenn die Gleichung der Curve vom zweiten Grade ist, sogleich die allgemeine Gleichung der 17. Nummer.

44. Wir können weiter gehen. Es führt uns das Theorem über die homogenen Funktionen nicht nur zu der eben entwickelten, gewiss sehr zierlichen Tangentenmethode, sondern auch zu der *Theorie des Contaktes höherer Ordnung*. Wir haben nämlich nach diesem Theorem auch:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} p^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} pq + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} q^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial r} pr + 2\frac{\partial^2 U}{\partial q \partial r} qr$$
$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} r^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial s} ps + \cdots = m(m-1)U.$$

Der erste Theil dieser Gleichung, gleich Null gesetzt, ist also die Gleichung der gegebenen Curve. Beziehen wir die partiellen Differentialcoefficienten wiederum auf einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten $p', q', r', s', t', \ldots$ sind, und betrachten mithin dieselben als constant, so stellt, wenn wir bei dieser Voraussetzung den ersten Theil der letzten Gleichung durch W bezeichnen, die Gleichung:

$$W = 0 \tag{4}$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die aus denselben Gründen, wie in der vorigen Nummer die Tangente, durch den gegebenen Punkt geht. Da auch diese Gleichung homogen und überdies vom zweiten Grade ist, so erhalten wir für die Gleichung der Tangente an die bezügliche Curve:

$$\frac{\partial W}{\partial p} p + \frac{\partial W}{\partial q} q + \frac{\partial W}{\partial r} r + \frac{\partial W}{\partial s} s \cdots = 0,$$

wobei wir die partiellen Differentialcoefficienten auf den Berührungspunkt beziehen. Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung (2). Da nämlich auch $\frac{\partial U}{\partial p}$ eine homogene Funktion und vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, so kommt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} p + \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} q + \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial r} r + \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial s} s + \cdots = (m-1)\frac{\partial U}{\partial p}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber nichts anderes als $\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial p}$, so dass also:

$$\frac{\partial W}{\partial p} = 2(m-1)\frac{\partial U}{\partial p}.$$

Auf ganz analoge Weise ist auch:

$$\frac{\partial W}{\partial q} = 2(m-1)\frac{\partial U}{\partial q},$$
$$\frac{\partial W}{\partial r} = 2(m-1)\frac{\partial U}{\partial r},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die gegebene Curve hat also mit der durch die Gleichung (4) dargestellten Linie zweiter Ordnung in dem gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente.

Wenn wir die Gleichung (4) und die Gleichung der gegebenen Curve zweimal differentiiren, so kommt offenbar:

$$d^2 W = 2 d^2 U,$$

wenn wir nach der Differentiation für die veränderlichen Grössen die Coordinaten des Berührungspunktes substituiren. Die durch die Gleichung (4) dargestellte Linie zweiter Ordnung hat also mit der gegebenen Curve in dem auf derselben gegebenen Punkt *einen Contakt zweiter Ordnung.*

45. Es ist leicht einzusehen, dass wir für jeden beliebigen auf der gegebenen Curve gegebenen Punkt unmittelbar nicht nur die Gleichung der Tangente, sondern auch die Gleichungen osculirender Curven erhalten. Wenn der Grad der gegebenen Curve eine ganze Zahl ist, so kommen wir, indem wir den Grad der Osculation immer steigern, endlich zu der Gleichung der gegebenen Curve selbst; wenn hingegen jener Grad ein Bruch ist, so kommen wir auf dem angezeigten Wege zu Gleichungen nach allen Ordnungen osculirender Curven.

Hier würde es uns zu weit führen, wenn wir in ausführliche Entwicklungen über das neue Coordinatensystem eingehen wollten. Um schliesslich noch ein Beispiel der Behandlungsweise zu geben, wähle ich den Beweis eines allgemeinen Satzes.

Charakteristische Eigenschaft der Curven aller Grade.

46. Wenn irgend eine Curve des m^{ten} Grades und irgend ein Punkt gegeben sind, so lassen sich, wie bekannt, im Allgemeinen von dem gegebenen Punkte an die gegebene Curve $m(m-1)$ Tangenten legen und alle $m(m-1)$ Berührungspunkte liegen auf einer Curve des $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades. Diese Curve hat man die *Polarcurve des gegebenen Punktes in Beziehung auf die gegebene Curve genannt (courbe polaire du point par rapport à la courbe directrice proposée).**) Wenn wir diese Benennung beibehalten, so haben wir folgenden Satz:

Wenn irgend eine Curve des m^{ten} Grades und irgend n Punkte, die auch beliebig zusammenfallen können, gegeben sind, und wir construiren die Polarcurve des ersten gegebenen Punktes in Beziehung auf die gegebene

*) Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques Par M. Bobillier. Gerg. Ann. XIX, p. 110.

Curve, construiren in Beziehung auf diese zweite Curve die Polarcurve des zweiten gegebenen Punktes, dann in Beziehung auf diese dritte Curve die Polarcurve des dritten Punktes und so fort, bis wir endlich zu einer Polarcurve des n^{ten} Punktes, die vom $(m-n)^{ten}$ Grade sein wird, gelangen, so ist diese Curve identisch dieselbe, in welcher Ordnung wir auch die gegebenen Punkte mögen auf einander folgen lassen.

Die Polarcurve der $(m-n)^{ten}$ Ordnung können wir also auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ verschiedene Arten construiren und erhalten zuvor n verschiedene Curven der $(m-n+1)^{ten}$ Ordnung, in Beziehung auf welche die Polarcurven der n gegebenen Punkte *dieselbe* Curve sind. Wenn z. B. $m = n+1$, so erhalten wir n Linien zweiter Ordnung, in Beziehung auf welche die Polaren der n gegebenen Punkte dieselbe gerade Linie sind.

Um den vorstehenden Satz zu beweisen, wollen wir der Kürze halber die Gleichung der gegebenen Curve m^{ten} Grades, bezogen auf drei Coordinatenlinien, durch

$$U = 0$$

bezeichnen. Alsdann ist:

$$\frac{\partial U}{\partial p} p + \frac{\partial U}{\partial q} q + \frac{\partial U}{\partial r} r = 0$$

die allgemeine Gleichung der Tangente, wenn wir die partiellen Differentialcoefficienten auf den Berührungspunkt beziehen und p, q und r als veränderlich betrachten. Bezeichnen wir hingegen die Coordinaten irgend eines Punktes durch p', q', r', und betrachten $\frac{\partial U}{\partial p}$, $\frac{\partial U}{\partial q}$, $\frac{\partial U}{\partial r}$ als Funktionen $(m-1)^{ten}$ Grades der veränderlichen Grössen p, q und r, so erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial p} p' + \frac{\partial U}{\partial q} q' + \frac{\partial U}{\partial r} r' = 0, \tag{1}$$

für die Polarcurve des Punktes (r', q', p') in Beziehung auf die gegebene Curve. Nehmen wir nach einander für den Punkt (r', q', p') die drei Coordinatenpunkte $(r', 0, 0)$, $(0, q', 0)$ und $(0, 0, p')$, so verwandelt sich die letzte Gleichung nach einander in folgende drei:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial p} = 0,$$

in die Gleichungen dreier Curven $(m-1)^{ten}$ Grades, der Polarcurven des ersten, zweiten und dritten Coordinatenpunktes. Hiernach erhalten wir ferner für die Polarcurven des zweiten und ersten Coordinatenpunktes in Beziehung auf die erste und zweite dieser drei Curven folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial q} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q \partial r} = 0.$$

Die ersten Theile dieser beiden Gleichungen sind nach den Grundregeln der Differentiation der Gleichungen mit mehreren veränderlichen Grössen identisch dieselben. Hierin liegt der Beweis des obigen Satzes für den Fall, dass $n = 2$. Indem wir je zwei der drei gegebenen Punkte zusammenstellen, erhalten wir also folgende drei Polarcurven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial q} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q\,\partial p} = 0.$$

Für die drei Polarcurven des dritten, zweiten und ersten Coordinatenpunktes in Beziehung auf die erste, zweite und dritte dieser drei Curven erhalten wir ferner nach dem Vorstehenden sogleich:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial r\,\partial q\,\partial p} = 0, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial r\,\partial p\,\partial q} = 0, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial q\,\partial p\,\partial r} = 0,$$

Gleichungen des $(m-3)^{\text{ten}}$ Grades, die alle drei identisch sind. Hierin liegt der Beweis unseres Satzes für den Fall, dass $n = 3$.

Um weiter zu gehen, wollen wir lieber wieder von der allgemeinen Gleichung (1), die wir der Kürze halber $U' = 0$ schreiben, ausgehen. In Beziehung auf die bezügliche Curve erhalten wir alsdann für die Polarcurve irgend eines zweiten Punktes (r'', q'', p'') folgende Gleichung:

$$\frac{\partial U'}{\partial p}\,p'' + \frac{\partial U'}{\partial q}\,q'' + \frac{\partial U'}{\partial r}\,r'' = 0,$$

oder wenn wir entwickeln:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2}\,p'p'' + \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial q}(p'q'' + p''q') + \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial r}(p'r'' + p''r')$$
$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\,q'q'' + \frac{\partial^2 U}{\partial q\,\partial r}(q'r'' + q''r') + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\,r'r'' = 0.$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in Beziehung auf p', q', r' und p'', q'', r''. Bezeichnen wir dieselbe der Kürze halber durch $U'' = 0$, so kommt:

$$\frac{\partial U''}{\partial p}\,p''' + \frac{\partial U''}{\partial q}\,q''' + \frac{\partial U''}{\partial r}\,r''' = 0,$$

für die Gleichung der Polarcurve eines dritten Punktes (r''', q''', p'''). Entwickeln wir die letzte Gleichung, so kommen wir zu einer Gleichung, die in Beziehung auf die Coordinaten der drei Punkte symmetrisch ist, und wenn wir auf diese Weise bis zu n Punkten fortschreiten, so erhalten wir offenbar eine Gleichung des $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades, *die in Beziehung auf die Coordinaten aller n Punkte symmetrisch ist.* Hierin liegt der allgemeine Beweis unseres Satzes.

Dieser Satz lässt sich nach der Theorie der Reciprocität verdoppeln und dann auch auf den Raum übertragen.

10.

Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten.

(Crelle's Journal, Band 5, S. 268—286. 1829.)

1. In neuester Zeit ist die eine grosse Hälfte der Geometrie, die von Grössenbestimmungen unabhängig ist, und die H. Gergonne aus diesem Grunde *Géométrie de situation* genannt hat, mit besonderer Vorliebe ausgebildet worden. Hier ist es, wo die verschiedenen Projectionsmethoden, vereint mit dem *principe de continuité*, auf eine überraschend leichte Art zu einer unzähligen Menge von Resultaten führen. Hier ist aber auch das Feld, wo die Vortheile der allgemeinen analytischen Methode sich am augenscheinlichsten darstellen. Ein Symbol, das die *allgemeine* Gleichung der Linie irgend einer Ordnung bezeichnet, stellt mithin auch alle möglichen einzelnen ebenen Curven dar, die man durch irgend eine Projectionsart einer als gegeben betrachteten Curve dieser Ordnung erhalten kann. Wir brauchen also hier nicht zu projiciren. Die reinen Situationsbeziehungen gegebener Curven oder Flächen zu einander sind durch Gleichungen zwischen den diese Curven oder Flächen vertretenden Symbolen und unbestimmten Coefficienten gegeben: wir brauchen also hier nichts von der Proportionengeometrie (nicht die harmonische Theilung, nicht die Theorie der Transversalen) zu entlehnen, auch nicht in den einfacheren Fällen, die das Projectionsverfahren nachher zu verallgemeinern lehrt. Und endlich die Theorie der idealen Chorden, die Hauptgrundlage des fruchtbaren *principe de continuité*, ist nach meiner Ansicht nichts anderes als eine geometrische Umschreibung der algebraischen Theorie der imaginären Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen man gelangt, wenn man die Coordinaten zwischen den Gleichungen zweier Curven eliminirt; das Princip ist also schon von selbst in der allgemeinen analytischen Behandlung enthalten,

und hat hier nichts Gewagtes, wie in der rein geometrischen Behandlung, für welche mir dasselbe dessen ungeachtet die schönste und eine nothwendige Erweiterung däucht.

Das, was die beiden in Rede stehenden Methoden mit einander gemein haben, und wovon bei den alten Geometern, die mit ängstlicher Gewissenhaftigkeit alles Einzelne zusammenreihen, fast keine Spur vorkommt, sind jene allgemeinen Gesichtspunkte oder Principien, unter denen sie die Sätze zusammenfassen, und dadurch aus einzelnen bewiesenen Sätzen sogleich viele ableiten. Hierhin gehören zunächst die Theorie des Projicirens und das *principe de continuité*, deren Vortheile, nach dem oben Bemerkten, in der Verbindung allgemeiner Symbole vermittelst unbestimmter Coefficienten einschliesslich enthalten sind. Hierhin gehört die Poncelet-Gergonne'sche *Théorie des polaires réciproques (principe de dualité)*, die jeden Satz verdoppeln lehrt und die nur ein specieller Fall des Princips der Variation der Constanten ist, über das ich bereits schon an einem andern Orte einige Andeutungen gegeben habe*), und das ich später mit aller Ausführlichkeit behandeln werde. Hieran reiht sich endlich auch dasjenige neue Princip, von dem am Ende dieses Aufsatzes kurz die Rede sein wird, nach welchem man sogleich alle Sätze der linearen Situationsgeometrie auf die Curven irgend einer beliebigen Ordnung im Allgemeinen und insbesondere auch auf Kreise etc. übertragen kann.

Zuvörderst ist es aber nothwendig zu zeigen, wie solche Sätze, die sich auf den Durchschnitt von geraden Linien beziehen, sich, indem man sie direkt angreift, vermittelst allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten beweisen lassen. Hier muss ich mich auf ein paar Beispiele beschränken, die einen Theil einer grössern Abhandlung bilden. Neue Sätze zu beweisen, liegt hier natürlich nicht in meiner Absicht, wohl aber, nebenher wenigstens durch ein passendes Beispiel zu belegen, wie jeder hierher gehörige Satz, auch der zusammengesetzteste, sich ohne Mühe der Methode schmiegt. Hiernach wendete sich meine Aufmerksamkeit auf eine Gruppe von Sätzen, die im Maihefte des Jahres 1828 der zu Montpellier erscheinenden *Annales de Mathématiques* zum Beweise vorgelegt worden ist und die mir vorzugsweise elegant schien. Diese Auswahl musste mir um so passender scheinen, als seitdem durchaus nichts weiter über diese Gruppe von Sätzen erfolgt ist, und wie ich jetzt glauben muss, auch ihr Urheber dieselben nicht bewiesen hat, da sie zum Theil falsch sind.

*) [Hier ist der in der Anmerkung zu S. 144 ausgesprochene Satz gemeint. Die eingehende Erörterung erschien im Bd. II der *Entwicklungen*, S. 251 ff.]

§ 1.

Beispiele des Gebrauchs allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten.

2. „Wenn die Seiten zweier Dreiecke sich, paarweise genommen, in solchen drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen, so erhält man ausserdem noch sechs Durchschnittspunkte. Wenn man je zwei dieser sechs Punkte durch gerade Linien verbindet, so erhält man fünf und vierzig neue Durchschnittspunkte, von denen (die obigen drei in gerader Linie liegenden mitgerechnet) sechzig mal drei in gerader Linie liegen."

Wir wollen die Seiten der beiden Dreiecke durch die Gleichungen:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0; \quad a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 0,$$

und diejenige gerade Linie, auf welcher die drei Durchschnitte derselben liegen, durch

$$d = 0$$

darstellen. Alsdann sind die Bedingungen des vorstehenden Satzes durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$a + a' = d,^{*}) \quad b + b' = d, \quad c + c' = d,$$

oder auch, da über die gerade Linie d (deren Gleichung: $d = 0$) durchaus keine nähere Bestimmung im Satze vorkommt, durch folgende:

$$a + a' = b + b' = c + c'.$$

Wir erhalten alsdann, als einzelnen Fall des obigen Satzes, folgende drei Punkte:

$$[a, (b, c'; b', c)], \quad [b, (a, c'; a' c)], \quad [c, (a, b'; a', b)],^{**})$$

die in gerader Linie liegen.

*) Wenn wir durch a, a' und d lineare Ausdrücke von der Form $(y + Ax + B)$ bezeichnen, so erhalten wir, wie bekannt, wenn die drei geraden Linien:

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad d = 0$$

durch denselben Punkt gehen sollen, folgende Bedingungsgleichung:

$$\mu a + \mu' a' = d,$$

in welcher μ und μ' zwei Coefficienten bezeichnen. Statt dieser Gleichung können wir offenbar auch die Gleichung des Textes nehmen, wenn wir unter a und a' Ausdrücke von der allgemeineren Form $(Ay + Bx + C)$ verstehen.

**) Wenn (a) und (b) zwei Punkte bezeichnen, so stellen wir diejenige gerade Linie, die durch diese beiden Punkte geht, durch (a, b) dar; wenn a und b zwei gerade Linien bezeichnen, so stellen wir durch (a, b) ihren Durchschnittspunkt dar. Hiernach ist $[(a, b), (c, d)]$, oder, was wir hiermit für identisch nehmen,

Nach unserer Methode greifen wir diesen Satz ganz direkt, oder, wie man sich hier auch ausdrücken kann, *rein synthetisch* an. Wir bilden zunächst die Gleichung für die geraden Linien (b, c') und (b', c), dann für (a, c') und (a', c), dann die Gleichung für die gerade Linie:

$$\{[a, (b, c'; b', c)], \quad [b, (a, c'; a', c)]\},$$

und zeigen endlich, dass diese Linie auch durch den dritten Punkt

$$[c, (a, b'; a', b)]$$

geht. Wir kommen hierzu ungemein leicht auf folgende Weise.

Aus der Bedingungsgleichung:

$$b + b' = c + c'$$

folgt:

$$b - c' = c - b'.$$

Da also die beiden Theile dieser Gleichung identisch sind, stellen

(1) $$b - c' = 0, \quad c - b' = 0,$$

dieselbe gerade Linie dar, und diese Linie geht, wie die Form der ersten dieser beiden Gleichungen (die eine algebraische Folge aus den Gleichungen $b = 0$ und $c' = 0$ ist) zeigt, einerseits durch den Punkt (b, c'), und, wie die Form der zweiten Gleichung zeigt, andrerseits durch den Punkt (b', c); ist also keine andere als die gerade Linie $(b, c'; b', c)$. Diese Linie wird also durch jede der beiden identischen Gleichungen (1) dargestellt.

Ganz auf ähnliche Weise oder auch durch blosse Buchstabenvertauschung erhalten wir für die geraden Linien $(a, c'; a', c)$ und $(a, b'; a', b)$ folgende Gleichungen:

(2) $$a - c' = 0, \quad c - a' = 0;$$

(3) $$a - b' = 0, \quad b - a' = 0.$$

Hiernach sehen wir sogleich, dass die drei geraden Linien $(b, c'; b', c)$, $(a, c'; a', c)$ und $(a, b'; a', b)$:

$$c - b' = 0, \quad a - c' = 0, \quad b - a' = 0,$$

respective von den geraden Linien:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

in solchen drei Punkten geschnitten werden, die in gerader Linie liegen. Denn wenn wir die bezüglichen Gleichungen addiren, so kommt:

$$a + c - b' = 0, \quad a + b - c' = 0, \quad b + c - a' = 0;$$

$[a, b; c, d]$, wenn (a), (b), (c) und (d) Punkte bedeuten, der Durchschnitt der geraden Linien (a, b) und (c, d); wenn aber jene Buchstaben gerade Linien bedeuten, diejenige neue gerade Linie, welche die beiden Punkte (a, b) und (c, d) verbindet.

Gleichungen, deren erste Theile unter sich identisch sind und identisch mit dem ersten Theile folgender Gleichung:

$$a + b + c - d = 0. \tag{4}$$

3. Auf ganz ähnliche Weise können wir den Beweis führen, dass folgende drei Punkte:

$$[a'(b, c'; b', c)], \quad [b'(a, c'; a', c)], \quad [c', (a, b'; a', b)],$$

in gerader Linie liegen, was auch sogleich aus der Symmetrie der Bedingungsgleichungen in Beziehung auf a, b, c und a', b', c' hervorgeht. Und zugleich erhalten wir hiernach auf der Stelle für die Gleichung dieser geraden Linie aus (4) folgende:

$$a' + b' + c' - d = 0. \tag{5}$$

Wenn wir die beiden Gleichungen (4) und (5) addiren, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen:

$$d = 0. \tag{6}$$

Es gehen also die drei geraden Linien (4), (5) und (6), mithin drei von den sechzig im Satze der vorigen Nummer bezeichneten geraden Linien, durch einen und denselben Punkt. In der fünften Nummer werden wir einen zweiten Beweis desselben Satzes geben.

4. Es ist bekannt, dass diejenigen sechs Durchschnitte der Seiten des Dreiecks $a'\,b'\,c'$, die nicht schon in die gerade Linie d fallen, auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, und somit folgt der Satz der zweiten Nummer unmittelbar aus dem Pascal'schen Satze vom eingeschriebenen Sechseck. Mir kam es hier, indem ich den Schluss dieses Aufsatzes im Auge hatte, darauf an, einen solchen Satz zu beweisen, der sich bloss auf den Durchschnitt von geraden Linien bezieht, und den Beweis bloss durch allgemeine Symbole und unbestimmte Coefficienten zu führen.

Der Kürze wegen wollen wir die sechs Punkte (Winkelpunkte des eingeschriebenen Sechsecks):

$$(ba'), \quad (bc'), \quad (cb'), \quad (ca'), \quad (ac'), \quad (ab'),$$

durch:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad (5), \quad (6),$$

bezeichnen, so dass also die geraden Linien:

$$(a), \quad (b), \quad (c), \quad (a'), \quad (b'), \quad (c'),$$

durch:

$$(5, 6), \quad (1, 2), \quad (3, 4), \quad (1, 4), \quad (3, 6), \quad (2, 5),$$

dargestellt werden. Hiernach stellt z. B. die Gleichung (4) diejenige gerade Linie dar, welche durch diejenigen drei Punkte geht, in welchen

die im nachstehenden Schema untereinander gestellten Linien sich schneiden:

$$(7) \qquad \begin{cases} (1,2)\ (2,3)\ (3,4) \\ (4,5)\ (5,6)\ (6,1), \end{cases}$$

denn der Punkt $(1, 2; 4, 5)$ ist kein andrer als $[b, (c, a'; a, c')]$ u. s. w. Indem wir die Aufeinanderfolge der Winkelpunkte des Sechsecks auf alle mögliche Weise ändern, erhalten wir $6.5.4.3.2.1 = 720$ solcher verschiedenen Schemata, von denen aber zwölf und zwölf dieselben drei Punkte bezeichnen, so dass wir nur *sechzig* solcher verschiedenen Linien erhalten. Der Kürze halber wollen wir die diese Linien darstellenden Schemata durch die Aufeinanderfolge der in diesen vorkommenden Ziffern bezeichnen, so dass z. B. das vorstehende Schema (7) durch 123456 bezeichnet wird. Auf diese Weise erhalten wir für jene sechzig geraden Linien, die wir der Kürze halber Pascal'sche nennen wollen, folgende sechzig Symbole, die wir mit Rücksicht auf das Folgende sogleich in zwanzig Gruppen zu drei ordnen.

142536 162435 152634	I,	123456 163254 143652	VI,	162534 142635 152436	XI,	163452 123654 143256	XVI,
132546 162345 152643	II,	123465 153264 143562	VII,	162543 132645 152346	XII,	153462 123564 143265	XVII,
132456 162354 142653	III,	124356 164253 134652	VIII,	162453 132654 142356	XIII,	164352 124653 134256	XVIII,
132465 152364 142563	IV,	124365 154263 134562	IX,	152463 132564 142365	XIV,	154362 124563 134265	XIX,
123546 163245 153642	V,	125364 145263 135462	X,	163542 123645 153246	XV,	145362 125463 135264	XX,

5. „Wenn die Seiten zweier Dreiecke, paarweise genommen, sich in solchen drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Spitzen der beiden Dreiecke verbinden, durch einen und denselben Punkt."

Bei derselben Bezeichnung wie in der zweiten Nummer sind diese drei sich in demselben Punkte schneidenden geraden Linien folgende:

$$(a, b; a', b'), \quad (a, c; a', c'), \quad (b, c; b', c');$$

für deren Gleichungen wir ganz ähnlich wie in der eben genannten Nummer aus den Bedingungsgleichungen:

$$a + a' = b + b' = c + c'$$

folgende erhalten:

(8) $\qquad a - b = 0, \text{ oder } -(a' - b') = 0;$

(9) $\qquad a - c = 0, \quad „ \quad -(a' - c') = 0;$

(10) $\qquad b - c = 0, \quad „ \quad -(b' - c') = 0.$

Ziehen wir die Gleichungen (8) von den Gleichungen (9) ab, so erhalten wir die Gleichungen (10). Es gehen also die drei bezüglichen geraden Linien durch denselben Punkt, und somit ist der vorstehende Satz bewiesen.

6. Wenn wir wieder von dem einschreibbaren Sechseck ausgehen, so sind die drei geraden Linien (8), (9) und (10) keine anderen als diejenigen, denen folgende Schemata entsprechen:

(11) $$\left.\begin{matrix} 2,1 & 1,4 & [4,5] & \quad 3,4 & 4,1 & [1,6] & \quad 1,2 & 2,5 & [5,4] \\ 5,6 & 6,3 & [3,2] & \quad 6,5 & 5,2 & [2,3] & \quad 4,3 & 3,6 & [6,1] \end{matrix}\right\},$$

mithin die zweite, dritte und erste Pascal'sche Linie der XVI. Gruppe. Hiernach finden wir durch Ziffernvertauschung, dass auch die drei Linien jeder der übrigen 19 Gruppen in demselben Punkte sich schneiden.

Dasselbe können wir auch direkt für jede dieser Gruppen auf folgende Weise zeigen. Nehmen wir z. B. die drei Linien der I. Gruppe, denen folgende Schemata entsprechen:

$$\begin{matrix} 1,4 & 4,2 & [2,5] & [1,6] & 6,2 & 2,4 & 1,5 & [5,2] & 2,6 \\ 5,3 & 3,6 & [6,1] & [4,3] & 3,5 & 5,1 & 6,3 & [3,4] & 4,1, \end{matrix}$$

so können wir diese Linien, indem wir von den eingeklammerten Liniensymbolen abstrahiren, durch die bezüglichen Durchschnitte der drei Linien (1, 4), (4, 2) und (2, 6) mit den drei Linien (6, 3), (3, 5) und (5, 1) construiren. Es liegen aber die übrigen drei Durchschnitte dieser beiden Liniensysteme in gerader Linie, denn das Schema:

(12) $$\left.\begin{matrix} 1,4 & 4,2 & 2,6 \\ 6,3 & 3,5 & 5,1 \end{matrix}\right\}$$

entspricht der zweiten Linie der XI. Gruppe und somit ist nach der fünften Nummer das zu Beweisende dargethan. (Wenn wir durch andre Durchschnitte die drei obigen Schemata construirt hätten, so

hätten wir statt (12) zwei solche Schemata erhalten, die den beiden übrigen Linien der XI. Gruppe entsprechen.

Man kann hiernach den allgemeinen Pascal'schen Satz mit dem eben bewiesenen in folgende Aussage zusammenfassen:

Wenn in eine Linie zweiter Ordnung ein beliebiges Sechseck beschrieben ist und man bildet drei Dreiecke, zwei aus den zweimal drei gegenüberliegenden Seiten und das dritte aus den drei Diagonalen desselben, so liegen die neun Spitzen dieser drei Dreiecke auf solchen drei geraden Linien, die sich in demselben Punkte schneiden.

Solcher Durchschnittspunkte erhält man für dieselben sechs auf dem Umfange einer Linie zweiter Ordnung beliebig angenommenen Punkte *zwanzig* verschiedene. Diesen zwanzig Punkten entsprechen die zwanzig Gruppen der vierten Nummer.

7. *Von den zwanzig Durchschnittspunkten dreier und dreier Pascal'scher Linien liegen fünfzehn mal vier in gerader Linie, so dass solcher gerader Linien durch jeden Durchschnittspunkt drei verschiedene gehen.*

So liegen z. B. die vier Punkte, in welchen sich die drei Linien jeder von den folgenden vier Gruppen schneiden, in gerader Linie:

$$\left.\begin{matrix}123456\\163254\\143652\end{matrix}\right\}\ \text{VI},\qquad \left.\begin{matrix}123465\\153264\\143562\end{matrix}\right\}\ \text{VII},\qquad \left.\begin{matrix}124356\\164253\\134652\end{matrix}\right\}\ \text{VIII},\qquad \left.\begin{matrix}124365\\154263\\134562\end{matrix}\right\}\ \text{IX}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir wiederum keinen andern Satz zu Hülfe zu nehmen als den Pascal'schen. Der Kürze wegen wollen wir denjenigen Punkt, in welchem sich drei Pascal'sche Linien schneiden, durch die dieser Liniengruppe beigesetzte römische Ziffer bezeichnen, so dass also z. B. die vier Punkte VI, VII, VIII und IX nach dem Vorstehenden in gerader Linie liegen. Wir wollen ferner die drei durch den Punkt I gehenden Pascal'schen Linien in derjenigen Ordnung, wie sie sich in der ersten Gruppe finden, durch I_1, I_2, I_3 mit den beigefügten Ziffern 1, 2, 3 bezeichnen und dem entsprechend alle übrigen, so dass z. B. die gerade Linie 134652 durch $VIII_3$ bezeichnet wird.

Hiernach liegen auf der Pascal'schen Linie VI_1 die drei Punkte:

(13) $\qquad (1, 2;\ 4, 5),\quad (2, 3;\ 5, 6),\quad (3, 4;\ 6, 1).$

Durch den ersten dieser drei Punkte geht auch die Pascal'sche Linie:

$$134562 \text{ oder } IX_3,$$

durch den zweiten Punkt die Linie:

$$123465 \text{ oder } VII_1,$$

und endlich durch den dritten Punkt:

$$124356 \text{ oder } VIII_1.$$

Wir können also die drei Punkte von (13) auch auf folgende Weise bezeichnen:

$$((1,2),\ IX_3) \quad ((5,6)),\ VII_1), \quad ((3,4),\ VIII_1).$$

Weil diese drei Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen, so liegen die Durchschnitte von

$$\begin{aligned} &(1,2) \text{ mit } VII_1 \text{ und } VIII_1,\\ &(5,6) \text{ „ } IX_3 \text{ „ } VIII_1,\\ &(3,4) \text{ „ } IX_3 \text{ „ } VII_1, \end{aligned}$$

alle sechs auf einer Linie zweiter Ordnung. Nun ist aber sogleich aus unserer Bezeichnung ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} VII_1 \text{ und } VIII_3 \text{ *) so wie } VIII_1 \text{ und } VII_3 &\text{ sich auf } (1,2),\\ IX_3 \text{ „ } VIII_3 \text{ „ „ } VIII_1 \text{ „ } IX_1 \text{ „ „ } &(5,6),\\ IX_3 \text{ „ } VII_3 \text{ „ „ } VII_1 \text{ „ } IX_1 \text{ „ „ } &(3,4) \end{aligned}$$

schneiden, so dass mithin jene sechs auf einer Linie zweiter Ordnung liegenden Punkte sechs der neun Durchschnittspunkte der beiden Liniensysteme:

$$VII_1,\ VIII_1,\ IX_3 \text{ und } VII_3,\ VIII_3,\ IX_1$$

sind. Die drei übrigen Durchschnitte, nämlich:

$$(VII_1,\ VII_3),\ (VIII_1,\ VIII_3),\ (IX_1,\ IX_3),$$

welche keine anderen sind, als die drei Punkte VII, VIII und IX, liegen also in gerader Linie.

Wenn wir die Ziffern 5 und 6 mit einander vertauschen, so verwandelt sich die VIII. Gruppe in die IX., und diese gegenseitig in jene, die VI. Gruppe in die VII., und diese in jene. Es liegen also auch die drei Punkte VI, VIII und IX, und mithin alle vier Punkte VI, VII, VIII und IX in gerader Linie.

8. Es bleibt uns jetzt nur noch zu zeigen übrig, wie die in Rede stehenden zwanzig Punkte sich zu solchen vier, die in gerader Linie

*) VII_1 und $VIII_3$ sind die durch folgende beiden Schemata bezeichneten Linien:

$$\begin{aligned} &1,2,\ 2,3,\ 3,4 \text{ und } 1,3,\ 3,4,\ 4,6\\ &4,6,\ 6,5,\ 5,1 \text{ „ } 6,5,\ 5,2,\ 2,1 \end{aligned}$$

Beide Linien gehen also durch den Punkt ((1, 2), (4, 6)), der, wie seine Bezeichnung anzeigt, auf der geraden Linie (1, 2) liegt.

liegen, zusammenordnen und wie viele solcher Linien existiren, die vier jener Punkte enthalten.

In der combinatorischen Zusammenstellung der in zwanzig Gruppen geordneten sechzig Symbole (vierte Nummer) ist Folgendes beobachtet worden. Sechs Elemente lassen sich auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ verschiedene Arten zu drei combiniren und also auf zehnfache Weise in zweimal drei Elemente theilen. So erhält man z. B. 1, 2, 3 und 4, 5, 6. Schreibt man nun die drei ersten Elemente in die erste, dritte und fünfte Stelle, und die drei andern nach einander in die zweite, vierte und sechste, in die vierte, sechste und zweite und endlich in die sechste, zweite und vierte Stelle, so erhält man die erste Gruppe:

$$\left.\begin{array}{l} 1\,4\,2\,5\,3\,6 \\ 1\,6\,2\,4\,3\,5 \\ 1\,5\,2\,6\,3\,4 \end{array}\right\} \text{I.}$$

Diese Gruppe können wir also durch das Schema $\binom{1\,2\,3}{4\,5\,6}$, mit welchem folgendes $\binom{4\,5\,6}{1\,2\,3}$ gleichbedeutend ist, darstellen. Indem man die drei ersten Elemente, statt in der Aufeinanderfolge 1 2 3, in der Ordnung 2 3 1 oder 3 1 2 und die drei letzten Elemente, statt in der Aufeinanderfolge 4 5 6, in der Ordnung 5 6 4 oder 6 4 5 nimmt, bekommt man keine *neuen* Linien. Man erhält ebenfalls keine *neuen* Linien, wenn man die Permutationen 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2 und zugleich die Permutationen 4 5 6, 5 6 4, 6 4 5 in umgekehrter Ordnung nimmt. Hiernach wird also die I. Gruppe z. B. durch folgende gleichbedeutende Symbole dargestellt:

$$\binom{123}{456}, \quad \binom{231}{456}, \quad \binom{132}{546}.$$

Man erhält aber eine neue Gruppe, wenn man die Permutationen 1 2 3, 2 3 1, 1 3 2 umkehrt und die Permutationen 4 5 6, 5 6 4, 6 4 5 nicht umkehrt. Diese neue Gruppe, die XI., wird z. B. durch folgende gleichbedeutende Symbole dargestellt:

$$\binom{123}{654}, \quad \binom{132}{456}, \quad \binom{321}{456}.$$

Auf diese Weise erhalten wir die obigen $2 . 10 = 20$ verschiedenen Gruppen.

Denjenigen vier Punkten VI, VII, VIII und IX, die, wie wir in der vorigen Nummer bewiesen haben, in gerader Linie liegen, entsprechen also folgende Symbole:

$$\binom{135}{246}, \quad \binom{136}{245}, \quad \binom{145}{236}, \quad \binom{146}{235}.$$

Es giebt also so oft mal vier Punkte, die in gerader Linie liegen, als wir durch Ziffernvertauschung in dem letzten Schema Schemata für neue Gruppen erhalten.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie viel neue Schemata wir auf diese Weise erhalten, in denen die Gruppe $\binom{135}{246}$, also die VI. Gruppe, vorkommt, oder, was dasselbe heisst, mit wieviel mal drei Punkten der Punkt VI in gerader Linie liegt.

Wenn wir das letzte Schema ansehen, so ist klar, dass wir dasselbe unmittelbar hinschreiben können, wenn wir eine Gruppe desselben mit dem ihr in jenem Schema zugehörigen Ziffernsymbol und die Stelle, die diese Gruppe einnimmt, kennen. Ueberdies ist leicht ersichtlich, dass jenes Schema dieselben Gruppen umfasst, welche Stelle wir jenem Ziffernsymbol auch anweisen mögen. Nun wird aber die VI. Gruppe durch folgende 18 verschiedenen Ziffernsymbole:

$$\binom{135}{246}, \quad \binom{351}{246}, \quad \binom{513}{246}, \quad \binom{135}{462}, \quad \binom{351}{462}, \quad \binom{513}{462},$$

$$\binom{135}{624}, \quad \binom{351}{624}, \quad \binom{513}{624}, \quad \binom{531}{642}, \quad \binom{315}{642}, \quad \binom{153}{642},$$

$$\binom{531}{426}, \quad \binom{315}{426}, \quad \binom{153}{426}, \quad \binom{531}{264}, \quad \binom{315}{264}, \quad \binom{153}{264},$$

dargestellt und noch durch eben so viele andere, indem man $\binom{135}{246}$ mit $\binom{246}{135}$ vertauscht u. s. w. Jedem dieser Ziffernsymbole entspricht ein Schema, das wir nach dem eben Bemerkten sogleich bilden können. Unter allen diesen Schematen sind aber nur *drei verschiedene*. Um diese zu bilden, braucht man nur die drei ersten der vorstehenden Symbole zu Grunde zu legen. Man erhält alsdann, indem man denselben die ersten Stellen giebt, die drei ersten Schemata der dieser Nummer am Ende beigefügten Tafel.

Wir sehen hieraus, dass jeder der zwanzig Punkte, in welchem drei Pascal'sche Linien sich schneiden, mit dreimal drei andern auf drei geraden Linien liegt. Wir erhalten also im Ganzen $\frac{20 \cdot 3}{4} = 15$ solcher geraden Linien, auf deren jeder vier von jenen zwanzig Durchschnittspunkten liegen. Hiernach erhalten wir folgende Tafel, in der wir die Klammern fortgelassen haben.

135	136	145	146	VI, VII, VIII, IX.
246	245	236	235	
351	356	341	346	VI, II, V, III.
246	241	256	251	
513	516	543	546	VI, X, IV, I.
246	243	216	213	
365	361	345	341	XII, VII, IV, XV.
241	245	261	265	
615	613	645	643	XX, VII, XI, III.
243	245	213	215	
431	436	451	456	XV, XIII, VIII, I.
256	251	236	231	
534	536	514	516	XIV, II, VIII, XX.
216	214	236	234	
435	431	465	461	XIV, V, XI, IX.
261	265	231	235	
635	634	615	614	XII, XIII, X, IX.
214	215	234	235	
563	564	513	514	XII, XI, XVI, XVIII.
214	213	264	263	
163	165	143	145	XVII, X, V, XVIII.
245	243	265	263	
463	461	453	451	III, XIX, IV, XVIII.
251	253	261	263	
613	614	653	654	XVII, XIX, II, I.
254	253	214	213	
143	146	153	156	XV, XIX, XVI, XX.
256	253	246	243	
345	346	315	316	XIV, XIII, XVI, XVII.
216	215	246	245	

9. Der im Eingange schon erwähnte, in Gergonne's Annalen*) zum Beweise vorgelegte Satz ist wörtlich folgender:

*) Théorèmes sur *l'Hexagrammum mysticum*, proposés à démontrer par M. J. Steiner, de Berlin. Gerg. Ann. Bd. XVIII, p. 339.

Six points, pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque, sont les sommets de *soixante* hexagones inscrits et les points de contact de *soixante* hexagones circonscrits (Carnot, Géométrie de position) lesquels jouissent des propriétés suivantes.

1. Dans chacun des hexagones inscrits, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite D (Pascal), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D.

2. Ces soixante droites D concourent, trois à trois, en un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p.

3. Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq droites δ.

4. Ces cinq droites concourent en un même point ω'.

1. Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point P (Brianchon), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P.

2. Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d, de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d.

3. Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, en un même point ω, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ω.

4. Ces cinq points ω appartiennent à une même droite δ'.

5. Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D.

6. Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d.

7. Les cinq points ω sont les pôles respectifs des cinq droites δ.

8. Enfin, le point ω' est le pôle de la droite δ.

Nach dem Vorhergehenden sind (3) und (4) und mithin (7) und (8) nicht richtig, und von (3) an müssen wir Folgendes substituiren:

3. Ces vingt points appartiennent à quinze droites δ dont chacune en contient quatre, de sorte que par chacun des vingt points passent trois de ces quinze droites.

3. Ces vingt droites concourent en quinze points ω par chacun desquels en passent quatre, de sorte que chacune des vingt droites contient trois de ces quinze points.

4. Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D.

5. Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d.

6. Les quinze points ω sont les pôles respectifs des quinze droites δ.

Der zweite Theil der doppelten Colonnen folgt aus dem ersteren unmittelbar nach der *Théorie des polaires réciproques.*

§ 2.

Neues Princip der Situationsgeometrie.

10. Die in der zweiten und fünften Nummer angewendete Beweisart, die sich auf alle Sätze über den Durchschnitt von geraden Linien ausdehnen lässt, können wir allgemein auf folgende Weise näher bezeichnen. Wir stellen alle gegebenen geraden Linien durch Gleichungen wie folgende dar:

$$a = 0, \quad b = 0, \text{ etc.}$$

Alsdann erhalten wir die Bedingungen, auf welchen ein solcher Satz beruht, durch Gleichungen von folgender Form ausgedrückt:

$$F(a, b, \ldots \mu, \nu, \ldots) = 0, \tag{1}$$

in denen μ, ν .... unbestimmte Coefficienten bedeuten, oder, richtiger ausgedrückt, solche Coefficienten, die wir nicht zu bestimmen brauchen. In den Fällen der beiden angezogenen Nummern konnten wir solche Coefficienten ganz entbehren, und die entsprechenden Gleichungen waren:

$$a + a' = b + b' = c + c'.$$

Alsdann sind also die Beziehungen der gegebenen geraden Linien zu einander vollkommen ausgedrückt, und wir können alle andern geraden Linien, die durch die Durchschnitte der gegebenen bestimmt sind, durch Gleichungen von der Form:

$$\Phi(a, b \ldots . \mu, \nu \ldots) = 0,$$

ausdrücken, in welchen μ, ν .... dieselben oben vorkommenden Coefficienten bedeuten. Wir erhalten also auf diese Weise direkt die Gleichungen derjenigen geraden Linien, auf welche sich die Aussage des Satzes bezieht, welche wir alsdann unmittelbar aus der Form dieser Gleichungen erkennen. Die in der zweiten und vierten Nummer ausgeführten Beispiele machen dies hinlänglich klar. Ein anderes Beispiel hat schon früher Herr Heinen im dritten Hefte des dritten Bandes dieses Journals mitgetheilt.*)

11. Indem wir auf die angezeigte Weise den Beweis für einen Satz über gerade Linien führen, haben wir eine unzählige Menge von Sätzen bewiesen. Denn wenn wir durch a, b, ... nicht mehr lineare Ausdrücke, sondern allgemeine Funktionen desselben beliebigen Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen darstellen, so behalten die Bedingungsgleichungen (1) ihre Bedeutung, sowie auch alle Gleichungen bis zu den Endgleichungen hin. Das Einzige fast, was sich ändert,

*) [Crelle's Journal, a. a. O. S. 298.]

ist die Anzahl der Durchschnitte. Wenn ein solches Beweisschema vorliegt, so können wir dasselbe auf Linien jeder beliebigen Ordnung beziehen. Wir können hiernach, *die Möglichkeit eines solchen Schemas vorausgesetzt*, auch ohne dass ein solches vorliegt, aber allerdings mit einiger Vorsicht, jeden Satz der linearen Situationsgeometrie auf Linien jedes beliebigen Grades übertragen.

12. Machen wir eine Anwendung hiervon auf die in § 1 bewiesenen Sätze, so erhalten wir auf der Stelle folgende.

Wenn auf einer gegebenen Linie m^{ter} Ordnung (d) sich drei Paare von Linien derselben Ordnung, a und a', b und b', c und c' schneiden, so schneiden sich a, b, c und a', b', c' ausserdem noch in sechs Gruppen von m^2 Punkten, die auf einer Linie der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung liegen. Aus der zweiten und dritten Nummer ergeben sich alsdann folgende Sätze. Durch drei mal zwei der sechs Gruppen von m^2 Durchschnittspunkten lassen sich drei neue Linien der m^{ten} Ordnung legen, die wir, ähnlich wie bei Linien erster Ordnung, durch

(2) $\qquad (a, b'; a', b), \quad (a, c'; a', c), \quad (b, c'; b', c)$

bezeichnen können. Diese werden respective von den gegebenen Linien m^{ter} Ordnung

$$c, b, a$$

in dreimal m^2 Punkten geschnitten, die alle auf einer und derselben neuen Linie m^{ter} Ordnung (g) liegen. Dieselben Curven (2) werden respective von den drei übrigen gegebenen

$$c', b', a',$$

ebenfalls in solchen $3m^2$ Punkten geschnitten, die auf einer Curve der m^{ten} Ordnung (h) liegen. Die beiden Curven (g) und (h) schneiden die gegebene (d) in denselben m^2 Punkten.

In der Beweisführung der fünften Nummer ist folgender allgemeine Satz enthalten. Diejenigen drei Curven m^{ter} Ordnung, die durch folgendes Schema dargestellt werden:

(3) $\qquad (a, b; a', b'), \quad (a, c; a', c'), \quad (b, c; b', c'),$

gehen alle drei durch dieselben m^2 Punkte. Solcher Curven, die durch dieselben m^2 Punkte gehen, erhalten wir ausserdem noch dreimal drei, nemlich jedesmal zwei der Curven (2) und eine der Curven (3); was sogleich aus Accentvertauschung sich ergiebt*).

*) Den ganzen Satz der neunten Nummer über sechs Punkte, durch welche sich eine Linie zweiter Ordnung legen lässt, können wir nicht ohne weiteres auf Curven einer beliebigen Ordnung ausdehnen. Denn durch die beiden Durchschnitte von zwei Paaren gerader Linien lässt sich immer eine neue gerade Linie legen; nicht aber im Allgemeinen eine Linie m^{ter} Ordnung durch die $2m^2$

Wenn wir die Gergonne'sche Eintheilung der Curven in Classen adoptiren wollen, so können wir unmittelbar nach der bekannten *Théorie des polaires réciproques* die vorstehenden Sätze verdoppeln.

13. Was wir in der elften Nummer von den Curven jedes beliebigen Grades im Allgemeinen gesagt haben, gilt mit gleichem Rechte auch von allen speciellen Arten der Curven eines beliebigen Grades, die durch die allgemeine Gleichung dieses Grades, in welcher zwischen den Constanten beliebige *lineare* Bedingungsgleichungen stattfinden, oder in welchen insbesondere gewisse Constanten Null oder ein für allemal bestimmt sind, dargestellt werden. Wenn in diesen Fällen

$$a = 0, \quad b = 0$$

zwei solche Curven darstellen, so stellt auch die Gleichung

$$\mu a + \nu b = 0$$

eine Curve derselben Art dar, worauf es hier eigentlich allein ankommt.

Durch diese Betrachtungen gewinnt das in Rede stehende Princip der Situationsgeometrie sehr an Fruchtbarkeit. So können wir z. B. durch $a, b, \ldots$ Ausdrücke von der Form:

$$\mu[(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 - \varrho^2]$$

oder von folgender Form:

$$\beta y^2 + 2\alpha xy - \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon$$

darstellen, mithin (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten) auf Kreise oder auf gleichseitige Hyperbeln alle Sätze über den Durchschnitt von geraden Linien übertragen.

14. Für den Kreis z. B. erhalten wir hiernach aus dem Vorhergehenden folgende Sätze:

Wenn auf einem gegebenen Kreise (oder einer gegebenen geraden Linie) sich sechs Kreise, paarweise genommen, schneiden, so schneiden die zweimal drei Kreise sich überdies noch in sechs Paaren von

Durchschnitte zweier Paare von Linien m^{ter} Ordnung. So lässt sich z. B., wenn wir auch hier die Bezeichnung der vierten Nummer beibehalten, im Allgemeinen keine Linie m^{ter} Ordnung durch die beiden Gruppen von m^2 Durchschnitten (1) und (3) legen. Wir können aber, und dies ist wohl zu bemerken, für den Fall linearer Gleichungen die Gleichung der geraden Linie (1, 3) auf keine bestimmte Weise ausdrücken, wenn wir über die Symbole a, b u. s. w. keine anderen Bestimmungen machen, als in der zweiten Nummer. — Eine Gleichung wie die folgende:

$$\mu a + \mu' a' = \nu b + \nu' b',$$

drückt allein für sich, wenn a, b, a' und b' linear sind, keine Beziehungen zwischen den bezüglichen geraden Linien aus: wohl aber, wenn a, b, a' und b' von höherem Grade sind, Beziehungen zwischen den bezüglichen Linien höherer Ordnung.

Punkten. Durch diese sechs Punktepaare, zu zweien genommen, lassen sich noch drei Kreise legen. Von den neun Kreisen, die wir auf diese Weise, den gegebenen nicht mitgerechnet, erhalten, schneiden sich zweimal drei Paare in zweimal sechs solchen Punkten, die auf zwei neuen Kreisen liegen (No. 2). Diese beiden neuen Kreise haben mit dem gegebenen dieselbe Chorde (No. 3).

Wenn auf einem gegebenen Kreise sich drei Paare von Kreisen schneiden, so lassen sich im Ganzen sechs neue Kreise durch die zweimal zwei Durchschnitte von zweimal zwei derselben legen. Von diesen sechs Kreisen schneiden sich viermal drei in denselben beiden Punkten (No. 5).

Es ist klar, dass wir theilweise auch gerade Linien an die Stelle von Kreisen, wie überhaupt an die Stelle von Linien einer beliebigen Ordnung, deren Asymptoten bezüglich parallel sind, Linien der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung setzen können.

15. Man sieht leicht ein, dass man nach dem in Rede stehenden Princip auf diese Weise eine grosse Menge von Sätzen über die Durchschnitte (reelle oder ideale, oder über Berührungen) von Kreisen erhält, wenn wir nach einander von allen bekannten, namentlich auch von den einfachern Sätzen über die Durchschnitte von geraden Linien ausgehen und alle einzelnen Fälle discutiren. Und dann erhalten wir nach der *Théorie des polaires réciproques* ebenso viele Sätze über solche Linien zweiter Ordnung, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben (confocale Linien zweiter Ordnung, Confocalen).

16. Wir wollen mit einem letzten hierher gehörigen Beispiele schliessen. Folgender Satz ist bekannt.

Wenn zwei feste gerade Linien gegeben sind, und man durch einen festen Punkt P nach beliebigen Richtungen zwei gerade Linien zieht, und die Durchschnitte dieser beiden Linien mit den beiden gegebenen noch durch zwei neue gerade Linien verbindet, so liegt der Durchschnitt Q dieser beiden letztgezogenen geraden Linien immer, wie wir auch die Richtungen der beiden durch den festen Punkt P gehenden geraden Linien bestimmen mögen, auf einer festen geraden Linie, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen geht. Diese Linie bleibt auch dann noch dieselbe, wenn der bisher als fest betrachtete Punkt P auf einer geraden Linie fortrückt, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen Linien geht.*)

*) Wir können diesen Satz nach unserer Methode leicht folgendergestalt beweisen. Seien

$$a = 0, \quad b = 0$$

Die beiden gegebenen Linien und die beiden anderen, welche die Punkte P und Q enthalten, nennt man *Harmonicalen (faisceau harmonique).*

Durch Uebertragung erhalten wir hiernach folgenden Satz:

Wenn zwei feste Kreise gegeben sind, und man legt durch *irgend* zwei Punkte, die mit den Durchschnitten dieser beiden Kreise auf demselben dritten Kreise liegen, *irgend* zwei neue beliebige Kreise, so schneiden diese die beiden festen gegebenen Kreise in solchen viermal zwei Punkten, die sich noch durch zwei Kreise verbinden lassen. Die so bestimmten zwei Kreise schneiden sich in solchen zwei Punkten, die auf dem Umfange eines und desselben Kreises bleiben, wie wir auch durch jene beiden Punkte zwei beliebige Kreise legen, und wie wir auch diese Punkte selbst auf dem Umfange des dritten Kreises annehmen mögen. Dieser so bestimmte vierte feste Kreis geht durch die Durchschnitte der beiden gegebenen.

17. Nach der *Théorie des polaires* réciproques erhalten wir aus dem letzten Satze folgenden:

Wenn drei confocale Linien zweiter Ordnung gegeben sind, welche dieselben beiden geraden Linien berühren, und man beschreibt irgend zwei *beliebige* Confocalen, die beide mit der dritten gegebenen dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, so haben diese beiden Confocalen mit den beiden ersten gegebenen und festen viermal zwei gemeinschaftliche Tangenten, und es giebt noch zwei neue Confocalen, die vier und vier dieser gemeinschaftlichen Tangenten berühren. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten dieser beiden neuen

die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien, und

$$m = 0, \quad n = 0$$

die Gleichungen der beiden andern Linien, die sich in P schneiden, und endlich sei

$$d = 0$$

die Gleichung derjenigen Linie, die den Punkt P mit dem Durchschnitte von (a) und (b) verbindet. Alsdann erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$a + b = m + n = d,$$

und hiernach für die Gleichungen der beiden Linien $[(a, m), (b, n)]$ und $[(b, m), (a, n)]$, die sich in Q schneiden:

$$a - m = n - b = 0, \quad b - m = n - a = 0.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen von einander abziehen, kommt:

$$a - b = 0,$$

eine Gleichung, die unabhängig ist von m und n und eine gerade Linie darstellt, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen Linien a und b geht. Vier Harmonicalen sind demnach durch Gleichungen von folgenden Formen dargestellt:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad a + b = 0, \quad a - b = 0.$$

Confocalen umhüllen eine vierte feste Confocale, die mit den drei gegebenen dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten hat, wenn wir unter den angegebenen Bedingungen für die beiden beliebigen Curven alle möglichen nehmen.

18. Es drängt sich uns hier noch eine Bemerkung auf, die wir nicht ganz unberührt lassen können. Die vier festen Kreise des Satzes der 16. Nummer treten an die Stelle der vier Harmonicalen des an die Spitze dieser Nummer gestellten Satzes. Sie sind durch das System von vier Gleichungen

$$(1) \qquad a = 0, \quad b = 0, \quad a + b = 0, \quad a - b = 0$$

gegeben, deren Beziehung zu einander gerade dieselbe ist wie für den Fall gerader Linien. Neben den vier Harmonicalen stehen nach der *Théorie des polaires réciproques* vier harmonische Theilungspunkte einer geraden Linie: neben jenen vier *Kreis*-Harmonicalen, um mich so auszudrücken, jenen vier harmonischen Theilungspunkten entsprechend, die vier festen Confocalen der 17. Nummer.

Es ist nach dem Princip, das der Gegenstand dieses Paragraphen ist, klar, dass vier Curven einer beliebigen Ordnung, die durch das System der Gleichungen (1) sich ausdrücken lassen, und also auch alle vier durch dieselben m^2 Punkte gehen, den vier linearen Harmonicalen entsprechen, und dass es in jeder Classe (Gergonne) Curven mit m^2 gemeinschaftlichen Tangenten giebt, die den vier harmonischen Theilungspunkten entsprechen. Was für andere Eigenschaften sonst noch solchen Curvensystemen entsprechen, kann uns hier nicht angehen; es liegt uns bloss ob, anzudeuten, wie die Theorie der harmonischen Theilung und der Harmonicalen, dieser Lieblinge der neuern Geometrie, *sich ins Unbegrenzte hin erweitern lässt.*

11.

Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen.

(Crelle's Journal, Band 6, S. 107—146. 1829.)

1. In einem Aufsatze, der in einem früheren Hefte dieses Journals abgedruckt worden ist, habe ich mich mit einem neuen Coordinatensysteme beschäftigt. Die Absicht des vorliegenden Aufsatzes geht weiter. Wir haben es jetzt nicht mehr zu thun bloss mit einer neuen Bestimmungsweise der Lage eines Punktes, wodurch man eben ein neues Coordinatensystem erhält, sondern mit einer gänzlich verschiedenen Art, eine Curve durch eine Gleichung auszudrücken. Man denkt sich nämlich, indem man eine Curve wie gewöhnlich durch eine Gleichung zwischen veränderlichen Grössen darstellt, welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, die Coordinaten eines bestimmten *Punktes* bedeuten, diese Curve als aus einer unendlichen Menge stetig auf einander folgender Punkte bestehend, oder, wenn man lieber will, als durch die Bewegung eines Punktes beschrieben. Man kann aber auch durch nicht minder einfache und bequeme Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bestimmte *gerade Linie* gegeben ist, unendlich viele gerade Linien darstellen, die nach einem Gesetze stetig auf einander folgen, und also eine bestimmte Curve *umhüllen*.

Auf diese neue Art wird eine Curve durch eine Gleichung ebenso vollständig dargestellt wie nach der gewöhnlichen Methode; — denn hier wie dort lassen sich alle Eigenschaften derselben aus *ihrer Gleichung* vollständig ableiten. Man durchschaut leicht, wie hiernach in der Geometrie der Curven die Beweismittel sich verdoppeln; wie jeder Entwickelung, die bisher gemacht worden ist, indem man die gebräuchlichen Gleichungen zu Grunde gelegt, eine andere entspricht, die auf den neuen Gleichungen beruht. Ich übersehe jetzt schon neue Ent-

wickelungen, die mehr als einen Band füllen, und neue Sätze und Constructionen, die von allen Seiten sich darbieten. In dem Folgenden will ich Einzelnes hervorheben.

Man wird bald erkennen, dass die in dem Vorstehenden angedeuteten analytischen Methoden in naher Verbindung stehen mit der Theorie der Reciprocität. (*Théorie des polaires réciproques.*) Es gingen aus denselben diejenigen Entwickelungen hervor, die ich an einem andern Orte angedeutet habe und die jene Theorie in sich enthalten.*)

2. Die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf zwei unter einem beliebigen Winkel sich schneidende Coordinatenaxen ist folgende:

$$Ay + Bx + C = 0, \tag{1}$$

indem wir durch y und x Coordinaten, durch A, B und C drei Constanten bezeichnen. Wenn wir diesen Constanten nach und nach verschiedene Werthe beilegen, so können wir alle möglichen geraden Linien durch die vorstehende Gleichung darstellen. Diese Gleichung stellt auch dann noch unendlich viele geraden Linien dar, die aber, wie bekannt, alle durch denselben Punkt gehen, wenn zwischen den obigen drei Constanten, die wir übrigens als ganz beliebig betrachten, eine Gleichung von folgender Form besteht:

$$aA + bB + cC = 0,$$

in der a, b und c drei beliebige neue Constanten bezeichnen. Wenn wir also A, B und C als veränderlich betrachten und demnach statt derselben u, v und w schreiben, so können wir sagen, *es stelle die Gleichung:*

$$au + bv + cw = 0 \tag{2}$$

einen Punkt dar. Je drei Werthen von u, v und w, die die letzte Gleichung befriedigen, entspricht eine gerade Linie, und jede solche gerade Linie geht durch den in Rede stehenden Punkt. Wir betrachten also hier einen Punkt *als einen geometrischen Ort, in dem unendlich viele gerade Linien sich schneiden*, während man, indem man von der gewöhnlichen Gleichung einer geraden Linie ausgeht, diese *als einen geometrischen Ort von unendlich vielen Punkten* betrachtet.

Wir können eine der drei Veränderlichen u, v oder w beliebig annehmen, und der Kürze halber auch gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus (2) folgende Gleichungen:

*) Ich hoffe später Gelegenheit zu finden, in diesem Journale auf die Theorie der Reciprocität zurückzukommen und unter Anderem auch die Beziehung der von mir angedeuteten Theorie zu der Theorie der Herren Poncelet und Gergonne nachzuweisen. [Hier ist § 31 ff. der neunten Abhandlung gemeint; vgl. S. 144 ff. dieser Ausgabe.]

$$a + bv + cw = 0,$$
$$au + b + cw = 0,$$
$$au + bv + c = 0.$$

3. Wenn statt der Gleichung (2) eine beliebige, in Beziehung auf u, v und w homogene Gleichung gegeben ist, die wir durch

$$F(u, v, w) = 0 \tag{3}$$

bezeichnen wollen, so entspricht je drei Werthen von u, v und w, die die vorstehende Gleichung befriedigen, eine bestimmte gerade Linie. Solcher Linien erhalten wir also unendlich viele, die unmittelbar auf einander folgen und also eine stetige Curve umhüllen. Wir sagen, *diese Curve werde dargestellt durch die Gleichung* (3). Wir sagen ferner, die Curve sei von der *zweiten*, *dritten* etc. *Classe**), wenn ihre Gleichung vom zweiten, dritten etc. Grade ist, so wie man sagt, die Curve sei von der zweiten, dritten etc. Ordnung, wenn die gewöhnliche Gleichung derselben in y und x vom zweiten, dritten etc. Grade ist. Der Analogie nach nennen wir den Punkt: *geometrischen Ort erster Classe*. Die *Oerter zweiter Classe* werden durch folgende allgemeine Gleichung dargestellt:

$$au^2 + buv + cv^2 + duw + evw + fw^2 = 0,$$

und enthalten alle Curven zweiter Ordnung. Die Oerter der dritten und höheren Classen sind im Allgemeinen nicht Oerter dritter und derselben höheren Ordnung.**)

*) Ich gebrauche hier das Wort *Classe* nach Hrn. Gergonne, der einer Curve, an die sich im Allgemeinen von einem gegebenen Punkte aus m Tangenten legen lassen, den Namen einer Curve m^{ter} *Classe* giebt, dem analog, wie man eine Curve, die von einer geraden Linie in m Punkten geschnitten wird, eine Curve m^{ter} *Ordnung* nennt. (Mir scheint es passender, hier das Wort *Ordnung* statt des Wortes *Grad* zu gebrauchen, weil auch eine Curve m^{ter} Classe durch eine Gleichung m^{ten} Grades dargestellt wird.)

**) Ich kann eine Bemerkung, die nahe liegt und vielleicht nicht ganz unerheblich ist, hier nicht unberührt lassen. Wenn ein System von Parallelcoordinaten gegeben ist und man sucht, gleichviel ob nach der Poncelet-Gergonneschen oder der rein analytischen Theorie, die Polarfigur desselben, so erhält man statt der beiden Axen zwei Punkte, statt des Anfangspunktes eine gerade Linie, die diese beiden Punkte verbindet, und statt der Coordinaten Punkte, die auf zwei durch jene beiden Punkte gehenden geraden Linien liegen. Statt eines durch zwei Coordinaten gegebenen Punktes erhält man eine durch zwei Punkte bestimmte gerade Linie; statt unendlich vieler in gerader Linie liegender Punkte, die durch eine lineare Gleichung gegeben ist, einen Punkt, durch den unendlich viele gerade Linien gehen, und dessen lineare Gleichung zu bestimmen die Aufgabe ist. Statt einer Curve, deren Punkte durch eine Gleichung zwischen den gewöhnlichen Coordinaten gegeben sind, erhält man eine Polarcurve, deren Tan-

§ 1.

Discussion der Gleichung des Punktes oder des Ortes erster Classe. (Fig. 21.)

4. Die allgemeine Gleichung des Punktes ist nach dem Vorstehenden folgende:

(1) $$au + bv + cw = 0.$$

Setzen wir $w = 0$, so kommt:

$$au + bv = 0,$$

mithin:

(2) $$\frac{a}{b} = -\frac{v}{u}.$$

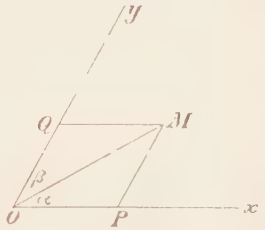

Fig. 21.

Wenn aber $w = 0$ ist, so geht die bezügliche gerade Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und ist also, wenn M der dargestellte Punkt ist, keine andre als OM, mithin ist:

(3) $$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

wenn α und β die beiden Winkel sind, die OM mit der ersten und zweiten Coordinatenaxe bildet.

Setzen wir ferner $u = 0$, so giebt (1):

$$bv + cw = 0,$$

mithin kommt:

$$\frac{c}{b} = -\frac{v}{w};$$

und da der Bedingung $u = 0$ eine mit der zweiten Axe parallele gerade Linie, also MP entspricht, so kommt:

(4) $$\frac{c}{b} = \frac{1}{OP}.$$

genten durch eine Gleichung desselben Grades zu bestimmen alsdann nicht schwer sein wird. Vermittelst der einen Gleichung bestimmt man die Lage von Punkten in Beziehung auf zwei gerade Linien, vermittelst der andern die Lage von geraden Linien in Beziehung auf zwei Punkte.

Wenn wir dann ferner in dem Polarsysteme, um diesen Ausdruck hier zu gebrauchen, die lineare Gleichung eines Punktes zu Hülfe nehmen, gerade so wie wir uns im Texte der Hülfsgleichung (1) bedienen, so erhalten wir in diesem Systeme eine lineare Gleichung für eine gerade Linie, und die Gleichungen der höheren Grade entsprechen hier wiederum Curven derselben höheren Ordnungen.

Wir erhielten also hiernach im Ganzen eine doppelte Bestimmung sowohl von geraden Linien als von Punkten, nemlich einmal in Beziehung auf zwei gegebene gerade Linien, das andre Mal in Beziehung auf zwei Punkte.

Aus (3) und (4) endlich folgt:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{OP} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{OQ}. \tag{5}$$

5. Es stellt die Gleichung

$$w = 0$$

den Anfangspunkt der Coordinaten dar. Die beiden Gleichungen

$$u = 0, \quad v = 0$$

stellen zwei Punkte dar, die auf der zweiten Axe und der ersten Axe unendlich weit liegen. Es stellt die Gleichung

$$au + bv = 0$$

irgend einen Punkt dar, der unendlich weit liegt. Es stellen die beiden Gleichungen:

$$au + cw = 0, \quad bv + cw = 0$$

zwei solche Punkte dar, die irgendwo auf der zweiten Axe und der ersten Axe liegen.

6. Nach der vierten Nummer sind die gewöhnlichen Coordinaten des durch die Gleichung (1) dargestellten Punktes:

$$x = OP = \frac{b}{c}, \quad y = OQ = \frac{a}{c}.$$

7. Wir erhalten die Bestimmung einer geraden Linie, die durch zwei durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} au + bv + cw = U = 0, \\ a'u + b'v + c'w = U' = 0 \end{cases} \tag{6}$$

gegebenen Punkte geht, wenn wir aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von u, v und w, oder vielmehr die Werthe der Quotienten je zweier dieser drei Veränderlichen berechnen.

Es ergiebt sich hiernach für die Gleichung jedes dritten Punktes, der mit den beiden gegebenen in gerader Linie liegt, eine Gleichung von folgender Form:

$$\mu U + \mu' U' = 0,$$

wo μ und μ' unbestimmte Coefficienten bedeuten, für deren einen wir auch Eins nehmen können.

8. Die Entfernung D der beiden Punkte (6) von einander ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{a'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{b'}{c'}\right)^2 = D^2.$$

9. Derjenige Punkt, der in der Mitte zwischen den beiden gegebenen liegt, ist offenbar durch folgende Coordinatenwerthe gegeben:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{b'}{c'}\right) = \frac{1}{2}\frac{bc' + b'c}{cc'},$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{a'}{c'}\right) = \frac{1}{2}\frac{ac' + a'c}{cc'},$$

und hiernach erhalten wir für die Gleichung des Punktes:

$$c'U + cU' = 0.$$

Für den vierten harmonischen Theilungspunkt, der zu den drei durch folgende Gleichungen:

$$U = 0 \quad U' = 0, \quad \mu U + \mu' U' = 0,$$

gegebenen Punkten gehört, ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\mu U - \mu' U' = 0;$$

wobei μ und μ' irgend zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten.

10. Wir wollen den Abstand einer geraden Linie, für welche

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w',$$

von dem durch die Gleichung

$$au + bv + cw = 0$$

gegebenen Punkte bestimmen. Dieser Abstand, den wir P nennen wollen, ist offenbar kein anderer als der Abstand des Punktes (y', x') von der geraden Linie:

$$u'y + v'x + w' = 0,$$

wenn wir

$$x' = \frac{b}{c}, \quad y' = \frac{a}{c}$$

setzen. Wir erhalten also nach bekanntem Ausdrucke:

$$P = \pm \frac{u'y' + v'x' + w'}{\sqrt{(u'^2 + v'^2)}}$$

$$= \pm \frac{au' + bv' + cw'}{c\sqrt{(u'^2 + v'^2)}}.$$

Wenn wir in der letzten Gleichung u', v' und w' als veränderlich betrachten, so stellt diese Gleichung einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$au + bv + cw = 0.$$

§ 2.

Beispiel von der Verbindung linearer Gleichungen.

11. Aus dem folgenden bekannten Satze:

„Wenn man durch die drei Winkelpunkte eines Dreiecks und irgend zwei feste Punkte dreimal zwei gerade Linien zieht, so begegnen diese Linien jeder der drei gegenüberliegenden Seiten

in zwei Punkten; die sechs Punkte, die man auf diese Weise erhält, liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung,“ erhält man nach dem Principe der Reciprocität sogleich nachstehenden Satz:

Wenn jede der drei Seiten eines Dreiecks von irgend zwei festen geraden Linien in zwei Punkten geschnitten wird, und man verbindet diese Durchschnitte mit den gegenüberliegenden Winkelpunkten des Dreiecks durch gerade Linien, so umhüllen die sechs geraden Linien, die man auf diese Weise erhält, dieselbe Linie zweiter Classe, oder bilden, was dasselbe heisst, Sechsecke, deren drei Diagonalen in demselben Punkte sich schneiden.

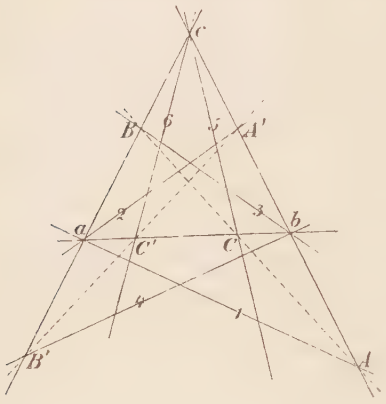

Fig. 22.

Es seien, um den Beweis dieses letzten Satzes direct zu geben (Fig. 22),

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

die Gleichungen der drei Winkelpunkte des gegebenen Dreiecks. Es seien ferner:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$
$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

die Gleichungen der zweimal drei Punkte, die in gerader Linie und auf den jenen drei Winkelpunkten resp. gegenüberstehenden Seiten liegen. Hiernach erhalten wir die Voraussetzungen des obigen Satzes auf folgende Weise vollständig ausgedrückt:

$$C = a - b, \quad C' = a - \mu b,$$
$$B = a - c, \quad B' = a - \nu c,$$
$$A = b - c, \quad A' = \mu b - \nu c.$$

Wir haben hierzu nur zwei unbestimmte Coefficienten μ und ν nöthig. Die sechs geraden Linien, die die Punkte A und a, A' und a u. s. w. verbinden, mithin nach bekannter Bezeichnung folgende:

$$(A, a), \quad (A', a), \quad (B, b), \quad (B', b), \quad (C, c), \quad (C', c),$$

wollen wir der Kürze halber durch:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad (5), \quad (6)$$

bezeichnen. Sechs gerade Linien bestimmen bekanntlich sechzig verschiedene Sechsecke. Wir wollen hier dasjenige betrachten, dessen sechs Winkelpunkte folgende sind:

$$(1, 2),\quad (2, 3),\quad (3, 4),\quad (4, 5),\quad (5, 6),\quad (6, 1),$$

und beweisen, dass die drei geraden Linien, welche die drei Paare gegenüberliegender Winkelpunkte verbinden, mithin folgende drei Linien:

$$[(1, 2)(4, 5)],\quad [(2, 3)(5, 6)],\quad [(3, 4)(6, 1)],$$

in demselben Punkte sich schneiden. Für jene sechs Winkelpunkte ergeben sich auf einfache Weise die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(1, 2)\quad & a = 0,\\
(4, 5)\quad & a - b - \nu c = 0,\\
(2, 3)\quad & \nu a + \mu b - \nu c = 0,\\
(5, 6)\quad & c = 0,\\
(3, 4)\quad & b = 0,\\
(6, 1)\quad & a - \mu b + \mu c = 0.
\end{aligned}$$

Für die Gleichung desjenigen Punktes endlich, in welchem zwei *beliebige* der eben bezeichneten geraden Linien

$$[(1, 2)(4, 5)],\quad [(2, 3)(5, 6)]\quad \text{und}\quad [(3, 4)(6, 1)]$$

sich schneiden, erhält man sogleich:

$$\nu a + \mu b + \mu\nu c = 0.$$

Hierdurch ist also der obige Satz bewiesen.

12. Wenn von jenen sechs geraden Linien drei durch denselben Punkt P (Fig. 23) gehen, so vereinigen sich die übrigen drei in einem zweiten Punkte Q. In der nebenstehenden Figur gehen die drei Linien (2), (3) und (5) durch denselben Punkt, so dass also

$$(2, 3),\quad (2, 5),\quad (3, 5),$$

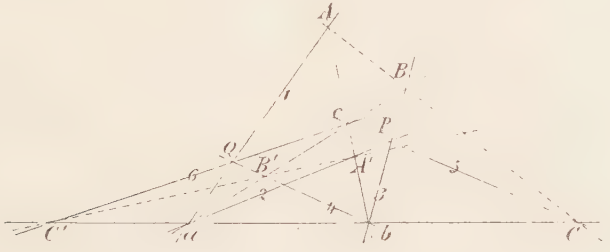

Fig. 23.

für deren Gleichungen wir sogleich folgende erhalten:

$$\begin{aligned}
(2, 3)\quad & \nu a + \mu b - \nu c = 0,\\
(2, 5)\quad & \mu a - \mu b + \nu c = 0,\\
(3, 5)\quad & a - b - c = 0,
\end{aligned}$$

denselben Punkt bezeichnen. Diesem entspricht die Bedingungsgleichung

$$\mu = -\nu,$$

wodurch die vorstehenden Gleichungen identisch werden. Alsdann werden aber auch die Gleichungen der drei Punkte

$$(1, 4), \quad (1, 6), \quad (4, 6),$$

nemlich folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1, 4) \quad & a + \nu b - \nu c = 0, \\ (1, 6) \quad & a - \mu b + \mu c = 0, \\ (4, 6) \quad & a - \mu b - \nu c = 0, \end{aligned}$$

identisch. Die drei geraden Linien (1), (4) und (6) gehen mithin durch denselben Punkt. In diesem Falle erhalten wir also statt einer Curve zweiter Classe ein System von zwei Punkten, so wie auf ähnliche Weise an die Stelle einer Curve zweiter Ordnung ein System von zwei geraden Linien treten kann. Hierauf werden wir bald zurückkommen.

Uebrigens werden auch in dem zuletzt betrachteten Falle durch die sechs geraden Linien (1), (2), (3), (4), (5) und (6) noch sechs verschiedene Sechsecke bestimmt und von diesen ist nach der vorigen Nummer als bewiesen anzusehen, dass in jedem derselben die drei Diagonalen in demselben Punkte sich schneiden. Legen wir nun die Construction so an, dass wir von den zweimal drei in den beiden Punkten P und Q sich schneidenden und als durchaus beliebig zu betrachtenden geraden Linien ausgehen, so erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Wenn durch jeden von zwei festen Punkten drei beliebige gerade Linien gehen, so lassen sich durch die neun Durchschnitte dieser Linien achtzehn gerade Linien legen, die zu drei und drei durch dieselben Punkte gehen.

13. In den Gergonne'schen Annalen (Oct. 1828)*) wird der vorstehende Satz von Hrn. Steiner noch dahin vervollständigt, dass von den sechs Durchschnittspunkten, die man nach diesem Satze erhält, drei und drei in gerader Linie liegen und dann zugleich mit demjenigen Satze, mit welchem er durch die Theorie der Reciprocität verbunden ist, zum Beweise vorgelegt. Dieser Zusatz ergiebt sich ohne Mühe nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, von der wir in dem Vorstehenden ein Beispiel gegeben haben, das hier für unsere Absicht hinreichend ist; oder auch unmittelbar aus den Sätzen über das umschriebene und eingeschriebene Sechseck.

*) [Vgl. Band 19, S. 128.]

§ 3.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe.

(Bruchstück.)

14. Wir wollen für die allgemeine Gleichung dieser Oerter in dem nachstehenden folgende nehmen:

$$(1) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung $w = 0$ setzen, so kommt:

$$(2) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Werthe für $\frac{v}{u}$, die denjenigen Tangenten entsprechen, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Diese Tangenten sind *reell*, *fallen zusammen*, oder sind *imaginär*, je nachdem der Ausdruck

$$B^2 - AC$$

positiv, Null oder negativ ist: also im Allgemeinen, je nachdem der Anfangspunkt der Coordinaten *ausserhalb* der Curve, *auf ihrem Umfange*, oder *innerhalb* der Curve liegt.

15. Wenn wir $v = 0$ setzen, so ergiebt sich aus (1):

$$(3) \qquad Au^2 + 2Duw + Fw^2 = 0.$$

Diese Gleichung giebt die Werthe von $\frac{w}{u}$, also die Ordinaten (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) derjenigen Punkte, in welchen die der ersten Axe parallelen Tangenten in die zweite Axe einschneiden. Diese Tangenten sind *reell*, *fallen zusammen*, oder sind *imaginär*, je nachdem der Ausdruck

$$D^2 - AF$$

positiv, Null oder negativ ist.

Wenn wir $u = 0$ setzen, so erhalten wir aus (1) folgende Gleichung:

$$(4) \qquad Cv^2 + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

und diese Gleichung giebt die Werthe für $\frac{w}{v}$, d. h. die Abscissen (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) derjenigen Punkte, in welchen die der zweiten Axe parallelen Tangenten in die erste Axe einschneiden. Diese Tangenten sind *reell, fallen zusammen*, oder sind *imaginär*, je nachdem der Ausdruck

$$E^2 - CF$$

positiv, Null oder negativ ist.

Jede der beiden Gleichungen:

$$D^2 - AF = 0, \quad E^2 - CF = 0$$

zeigt hiernach im Allgemeinen an, dass die Gleichung (1) einen *Punkt* oder ein *System zweier gerader Linien* darstellt[1]).

16. Wenn

$$A = 0,$$

so giebt die Gleichung (2) für das $\frac{r}{u}$ einer durch den Anfangspunkt gehenden Tangente einen Werth gleich Null. Die Gleichung (3) giebt alsdann für das auf eine der ersten Axe parallele Tangente sich beziehende $\frac{w}{u}$ ebenfalls einen Werth gleich Null. Hieraus erhellet also auf zwiefache Art, dass alsdann die *Curve von der ersten Axe berührt wird.*

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass wenn

$$C = 0,$$

die Curve *von der zweiten Axe berührt wird.*

17. Wenn

$$F = 0,$$

so erhalten wir sowohl für $\frac{w}{u}$ aus (3) als für $\frac{w}{v}$ aus (4) unendliche Werthe. Die Curve hat also nur eine Tangente, die jeder der beiden Coordinatenaxen parallel ist; die zweite Tangente liegt unendlich weit. Die Curve ist im Allgemeinen eine *Parabel.*

Die Gleichung einer auf zwei ihrer Tangenten als Coordinatenaxen bezogenen Parabel hat also folgende einfache und symmetrische Form:

(5) $$Buv + Duw + Evw = 0.$$

18. Wenn

$$B = 0,$$

so giebt die Gleichung (2) für $\frac{r}{u}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, d. h. in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten *halbiren die beiden Axen den von den beiden durch den Anfangspunkt an die Curve gelegten Tangenten gebildeten Winkel.* In dem Falle eines beliebigen Coordinatenwinkels bilden die beiden Axen und jene beiden Tangenten vier *Harmonicalen.*

19. Wenn

$$D = 0,$$

so giebt die Gleichung (3) für $\frac{w}{u}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, es liegen also die beiden der ersten Axe parallelen Tangenten

zu beiden Seiten derselben und gleich weit von ihr entfernt. Der *Mittelpunkt der Curve liegt also auf der ersten Axe.* Wenn

$$E = 0,$$

so liegt nach Gleichung (4) der Mittelpunkt der Curve auf der *zweiten* Axe.

20. Die nachstehende Gleichung:

$$Au^2 + Cv^2 + Fw^2 = 0 \tag{6}$$

stellt nach der vorigen Nummer einen Ort zweiter Classe dar, dessen Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist. Dass auch das mit uv behaftete Glied fehlt, können wir hier nicht unmittelbar nach der 18. Nummer deuten. Man sieht aber leicht aus der Form dieser Gleichung, dass die bezügliche Curve auf zwei ihrer zugeordneten Durchmesser als Coordinatenaxen bezogen ist, und dass die Quadrate der Längen dieser in die zweite und erste Axe fallenden Durchmesser resp. gleich $\left(-\frac{A}{F}\right)$ und $\left(-\frac{C}{F}\right)$ sind. Die Curve ist *imaginär*, wenn A, C und F dasselbe Zeichen haben; eine *Ellipse*, wenn A und C, was das Zeichen betrifft, unter einander übereinstimmen, nicht aber mit F; eine *Hyperbel*, wenn F entweder allein mit A oder allein mit C im Zeichen übereinstimmt. Wenn einer der drei Coefficienten A, C und F gleich Null ist, so stellt die Gleichung (6) das *System von zwei Punkten* dar, die nach der fünften Nummer *unendlich weit* in dem einen Falle, in den andern beiden Fällen beide *auf derselben Coordinatenaxe* liegen. Es können aber in allen diesen Fällen diese beiden Punkte imaginär werden. Die beiden Punkte fallen in den Anfangspunkt der Coordinaten zusammen, wenn zugleich $A = 0$ und $C = 0$; sie fallen zusammen, liegen aber unendlich weit, und zwar auf einer der beiden Coordinatenaxen, wenn zugleich mit $F = 0$ auch $A = 0$ oder $C = 0$.

21. Die nachstehenden Gleichungen:

$$Au^2 + 2Evw = 0, \tag{7}$$

$$Cv^2 + 2Duw = 0 \tag{8}$$

stellen *Parabeln* dar (No. 17). Die erste derselben *berührt die zweite Axe im Anfangspunkte der Coordinaten und hat die andere Axe zu einem ihrer Durchmesser;* die zweite Parabel berührt die *erste Axe* im Anfangspunkte der Coordinaten und hat die *zweite* Axe zu einem ihrer Durchmesser (No. 16, 18, 19).

22. Die nachstehende Gleichung:

$$Fw^2 + 2Buv = 0 \tag{9}$$

stellt, was sogleich aus der 16. und 19. Nummer ersichtlich ist, eine *auf ihre beiden Asymptoten bezogene Hyperbel dar.*

23. Die Gleichung (3) giebt die halbe Summe der Werthe von $\frac{w}{u}$ gleich $\left(-\frac{D}{F}\right)$; ebenso giebt die Gleichung (4) die halbe Summe der Werthe von $\frac{w}{v}$ gleich $\left(-\frac{E}{F}\right)$. Hiernach erhält man für die Coordinaten des Mittelpunktes der durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellten Curve:

$$y = \frac{D}{F}, \quad x = \frac{E}{F}.$$

Die Gleichung dieses Mittelpunktes ist also folgende:

(10) $$Du + Ev + Fw = 0.$$

24. Es sei wiederum (Fig. 24)

(1) $$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0$$

die Gleichung irgend einer Curve zweiter Classe. Wenn wir von dieser Gleichung folgende abziehen:

(11) $$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0,$$

so kommt:

(12) $$w(2Du + 2Ev + Fw) = 0.$$

Die Gleichung (11) stellt zwei Punkte dar, die (nach bestimmten Richtungen hin) unendlich weit liegen. Die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Oerter (1) und (11), also hier insbesondere die Tangenten, die sich von jenen beiden unendlich weit entfernten Punkten an die Curve legen lassen, bilden ein Parallelogramm. Da die Gleichung (12) eine Folge von (1) und (11) ist, so erhalten wir *dasselbe* Parallelogramm, wenn wir von den beiden Punkten (12) aus Tangenten an die Curve legen. Diese beiden letztgenannten Punkte sind also zwei gegenüberstehende Winkelpunkte jenes Parallelogrammes. Die Form der Gleichung (12) zeigt, dass einer derselben der Anfangspunkt der Coordinaten ist, wonach wir jenes Parallelogramm, wenn die Curve gegeben ist, leicht construiren können, und mithin auch den andern Punkt P, dessen Gleichung:

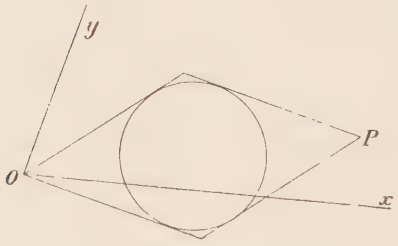

Fig. 24.

(13) $$2Du + 2Ev + Fw = 0,$$

erhalten.

25. Wenn in den Gleichungen zweier oder mehrerer Curven zweiter Classe von der Form der Gleichung (1) die Coefficienten der drei ersten Glieder dieselben sind, so berühren diese Curven dieselben beiden, im Anfangspunkte sich schneidenden (reellen oder imaginären) Tangenten.

Wenn die Coefficienten der drei letzten Glieder dieselben sind, so haben nach der 23. Nummer die bezüglichen Curven denselben Mittelpunkt.

26. Wenn wir die Gleichung

$$Au^2 + 2Duw + Fw^2 = 0 \tag{14}$$

von der Gleichung (1) abziehen, so bleibt:

$$v(2Bu + Cv + 2Ew) = 0. \tag{15}$$

Die Gleichung (14) stellt zwei Punkte (Fig. 25) dar, die auf der zweiten Axe liegen. Wenn man von diesen Punkten aus Tangenten an die Curve legt, so erhält man ein Viereck, in welchem zwei gegenüberstehende Winkelpunkte durch (15) dargestellt werden. Einer dieser beiden Punkte Q liegt aber, wie die Form dieser Gleichung zeigt, unendlich weit auf der ersten Axe; die Gleichung des andern Punktes P ist:

$$2Bu + Cv + 2Ew = 0. \tag{16}$$

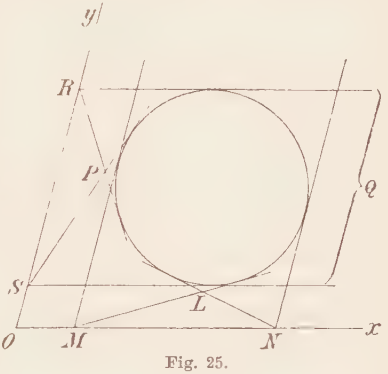

Fig. 25.

Man erhält also, wenn die Curve gegeben ist, die beiden durch (14) gegebenen Punkte R und S, wenn man an die Curve zwei der ersten Axe parallele Tangenten legt. Der Durchschnitt der beiden übrigen durch R und S gehenden Tangenten ist alsdann der Punkt P.

Auf ähnliche Weise stellt die Gleichung:

$$Cv^2 + 2Evw + Fw^2 = 0 \tag{17}$$

die beiden auf der ersten Axe liegenden Punkte M und N dar, und die Gleichung

$$Au + 2Bv + 2Dw = 0 \tag{18}$$

den Punkt L.

27. Wenn in den Gleichungen zweier oder mehrerer Curven zweiter Classe die Coefficienten von u^2, uw und w^2 dieselben sind, so berühren diese Curven zwei feste, der ersten Axe parallele gerade

Linien; sie berühren zwei der zweiten Axe parallele gerade Linien, wenn die Coefficienten von v^2, vw und w^2 dieselben sind.

Wenn in mehreren Gleichungen die Coefficienten von u^2, v^2, uw, vw und w^2 dieselben sind, und mithin nur der Coefficient von uv irgend einen beliebigen Werth hat, so sind die bezüglichen Curven alle demselben Parallelogramme eingeschrieben, dessen Seiten den beiden Coordinatenaxen parallel sind.

28. Wenn in mehreren Gleichungen nur die Coefficienten von vw oder uw verschieden sind, so sind die bezüglichen Curven alle demselben Paralleltrapez eingeschrieben, dessen zwei parallele Seiten der ersten oder zweiten Axe parallel sind, und dessen beide andern Seiten im Anfangspunkte sich schneiden (No. 25, 27).

29. Wenn in mehreren Gleichungen nur die Coefficienten von uv und v^2 oder von u^2 und uv verschieden sind, so haben die bezüglichen Curven denselben Mittelpunkt und berühren dieselben beiden der ersten oder zweiten Axe parallelen geraden Linien, etc. etc.

30. *Theorie der Berührung.* Da die allgemeine Gleichung, die alle Oerter zweiter Classe darstellt, und die wir der Kürze halber durch

$$U = 0 \tag{1}$$

darstellen wollen, in Beziehung auf u, v und w homogen ist, so erhalten wir sogleich für die Gleichung des Berührungspunktes auf einer durch u', v' und w' gegebenen Tangente die folgende:

$$\frac{\partial U}{\partial u}u + \frac{\partial U}{\partial v}v + \frac{\partial U}{\partial w}w = 0, \tag{2}$$

wenn wir nach der Differentiation in den Ausdrücken der drei partiellen Differentialcoefficienten statt der drei veränderlichen Grössen u', v' und w' setzen. Denn nach dem *Theorem über die homogenen Functionen* werden die Gleichungen (1) und (2) identisch, wenn wir u', v' und w' für u, v und w schreiben, so dass also der Punkt (2) auf der gegebenen Tangente liegt. Wenn wir ferner die Gleichungen (1) und (2) vollständig differentiiren und nach der Differentiation wiederum u', v' und w' für die drei Veränderlichen schreiben, so erhalten wir ebenfalls zwei identische Gleichungen. Es schneiden sich also zwei consecutive Tangenten der Curve (1) in dem Punkte (2), der mithin der *Berührungspunkt auf der gegebenen Tangente ist.*

Wenn wir die Gleichung (2) entwickeln, so kommt:

$$\begin{cases} (Au' + Bv' + Dw')u + (Bu' + Cv' + Ew')v \\ \qquad + (Du' + Ev' + Fw')w = 0 \end{cases} \tag{3}$$

für die Gleichung des Berührungspunktes auf der Tangente (u', v', w')

31. Die letzte Gleichung ist in Beziehung auf u, v, w und u', v', w' symmetrisch, sodass wir sie auch folgendergestalt schreiben können:

$$(Au + Bv + Dw)u' + (Bu + Cv + Ew)v' + (Du + Ev + Fw)w' = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir für die drei Veränderlichen drei solche Werthe u'', v'' und w'' nehmen, die sich auf irgend eine durch den Berührungspunkt gehende gerade Linie beziehen. Betrachten wir ferner u', v' und w' als veränderlich und lassen aus diesem Grunde die Accente fort, so stellt die Gleichung:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} (Au'' + Bv'' + Dw'')u + (Bu'' + Cv'' + Ew'')v \\ \qquad + (Du'' + Ev'' + Fw'')w = 0, \end{array} \right.$$

da sie sich mit gleichem Rechte auf die Tangenten in *beiden* Durchschnitten der geraden Linie (u'', v'', w'') mit der Curve bezieht, den Durchschnitt jener beiden Tangenten, den *Pol dieser geraden Linie* dar.

32. Wenn der Pol unendlich weit liegt, so ist jene gerade Linie ein Durchmesser. Der Pol liegt aber unendlich weit, wenn die Gleichung (4) folgende Form annimmt:

$$mu + nv = 0,$$

was nur dann geschieht, wenn

$$Du'' + Ev'' + Fw'' = 0,$$

d. h. wenn die gerade Linie (u'', v'', w'') durch den Mittelpunkt geht, dessen Gleichung nach der 23. Nummer nachstehende ist:

$$(5) \quad Du + Ev + Fw = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial w} = 0.$$

Wenn der Pol auf der ersten Axe liegt, so muss die Gleichung (4) folgende Form:

$$mv + nw = 0$$

annehmen (No. 5), was nur dann geschieht, wenn

$$Au'' + Bv'' + Dw'' = 0.$$

Hiernach stellt also die Gleichung:

$$(6) \quad Au + Bv + Dw = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial u} = 0$$

diejenige des *Poles der ersten Axe* dar.

Ebenso stellt die Gleichung

$$(7) \quad Bu + Cv + Ew = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial v} = 0$$

den *Pol der zweiten Axe* dar.

33. Durch Verbindung der Gleichungen (6) und (7) zu einer neuen linearen Gleichung erhält man die Gleichung jedes beliebigen

Punktes der Polaren des Anfangspunktes. Die Coordinaten dieser Polaren erhält man, indem man aus den beiden eben genannten Gleichungen die Werthe für $\frac{w}{v}$ und $\frac{w}{u}$ berechnet.

Wenn man die Gleichung des Mittelpunktes (5) mit einer der beiden Gleichungen (6) oder (7) zu einer neuen linearen Gleichung verbindet, so erhält man die Gleichung jedes beliebigen Punktes desjenigen Durchmessers, der die der ersten oder zweiten Coordinatenaxe parallelen Chorden halbirt.

34. Es ergeben sich aus dem Vorstehenden einige Sätze zu unmittelbar, als dass ich dieselben hier unerwähnt lassen sollte. Es seien

$$U = 0, \quad U' = 0, \quad U'' = 0$$

die Gleichungen dreier Oerter zweiter Classe. Alsdann sind

$$\frac{\partial U}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial U'}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial U''}{\partial w} = 0$$

die Gleichungen ihrer Mittelpunkte. Wenn jene drei Oerter dieselben vier geraden Linien berühren, so ist, wenn μ und μ' unbestimmte Coefficienten bedeuten:

$$\mu U + \mu' U' + U'' = 0;$$

es ist mithin auch:

$$\mu \frac{\partial U}{\partial w} + \mu' \frac{\partial U'}{\partial w} + \frac{\partial U''}{\partial w} = 0,$$

d. h. die drei Mittelpunkte liegen in gerader Linie. Hiermit ist also folgender bekannte Satz gegeben:

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte (Oerter zweiter Classe), die dieselben vier geraden Linien berühren, liegen in gerader Linie (Newton).

Zu diesen Oertern zweiter Classe gehören auch drei Systeme von zwei Punkten, nämlich die dreimal zwei gegenüberstehenden Winkelpunkte der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vollständigen vierseitigen Figur. Der Mittelpunkt des Systems zweier Punkte ist aber offenbar, was auch sogleich aus dessen Gleichung sich ergiebt, die Mitte zwischen den beiden Punkten des Systems. Wir erhalten hiernach diejenige gerade Linie, welche alle Mittelpunkte enthält, indem wir die drei Mitten der drei Diagonalen der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur durch eine gerade Linie verbinden. Wir sehen hier beiläufig, dass diese drei Mitten derselben geraden Linie angehören.

35. Die Gleichungen der Pole irgend einer geraden Linie (u'', v'', w'') in Beziehung auf dieselben drei in der vorigen Nummer betrachteten Curven sind die folgenden:

$$\frac{\partial U}{\partial u} u'' + \frac{\partial U}{\partial v} v'' + \frac{\partial U}{\partial w} w'' = V = 0,$$

$$\frac{\partial U'}{\partial u} u'' + \frac{\partial U'}{\partial v} v'' + \frac{\partial U'}{\partial w} w'' = V' = 0,$$

$$\frac{\partial U''}{\partial u} u'' + \frac{\partial U''}{\partial v} v'' + \frac{\partial U''}{\partial w} w'' = V'' = 0,$$

und man sieht sogleich, dass unter denselben Voraussetzungen wie bisher auch:

$$\mu V + \mu' V' + V'' = 0,$$

so dass also die drei Pole in gerader Linie liegen. Hiernach ergiebt sich folgender Satz:

Wenn beliebig viele Curven zweiter Classe vier gegebene gerade Linien berühren, so liegen die Pole derselben beliebigen geraden Linie in Beziehung auf alle diese Curven in gerader Linie.

Es ist im Allgemeinen klar, dass alle Oerter, die durch Gleichungen dargestellt werden, in denen als Constanten auf dieselbe beliebige Weise, und überdies blos *linear*, Constanten aus den verschiedenen Gleichungen solcher Oerter zweiter Classe, die demselben Viereck eingeschrieben sind, vorkommen, alle dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben, und also insbesondere, wenn diese Oerter Punkte sind, in gerader Linie liegen.

36. *Theorie der Osculation.* Die Gleichung irgend eines Ortes zweiter Classe, der die zweite Axe im Anfangspunkte der Coordinaten berührt, sei folgende (No. 16, 14):

$$Au^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0.$$

Stellen wir mit dieser Gleichung eine zweite ihr ähnliche:

$$Au^2 + 2D'uw + 2E'vw + F'w^2 = 0$$

zusammen und ziehen ab, so kommt:

$$w[2(D - D')u + 2(E - E')v + (F - F')w] = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein System von zwei Punkten dar. Der Faktor w bezieht sich auf den Anfangspunkt der Coordinaten, durch den zwei in die zweite Axe zusammenfallende gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven gehen. Der andre Faktor, gleich Null gesetzt:

$$(1) \qquad 2(D - D')u + 2(E - E')v + (F - F')w = 0,$$

stellt den Durchschnittspunkt der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten dar, und ist reell, diese Tangenten mögen es sein oder nicht. Wenn dieser Punkt auf der zweiten Axe liegt, so fallen in diese Axe *drei* Tangenten zusammen. Die beiden Curven haben alsdann eine

dreipunktige Osculation. Damit die Gleichung (1) dementsprechend die Form

$$2(D - D')u + (F - F')w = 0 \tag{2}$$

annehme, ergiebt sich die Bedingungsgleichung:

$$E = E'. \tag{3}$$

37. Wenn die Osculation eine *vierpunktige* sein soll, so muss, damit die vierte gemeinschaftliche Tangente mit den drei übrigen zusammenfalle, die Gleichung (2) den Anfangspunkt darstellen und also folgende Form annehmen:

$$w = 0;$$

wonach wir neben der Bedingungsgleichung (3) noch nachstehende erhalten:

$$D = D'. \tag{4}$$

38. Wenn bloss die letzte Bedingungsgleichung (4) zwischen den Gleichungen der beiden sich im Anfangspunkte berührenden Curven besteht, so ist sogleich ersichtlich, dass alsdann die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven sich auf der ersten Axe schneiden.

39. Ich werde in dem folgenden Paragraphen durch Verbindung allgemeiner Symbole vermittelst unbestimmter Coefficienten allgemeine Sätze beweisen und aus denselben viele einzelne Constructionen ableiten. Doch, um ein Beispiel der Behandlungsweise zu geben, will ich schon hier einige einzelne Sätze direct beweisen. Dies wird hinreichend sein, um zu zeigen, dass man hier auf eine ganz ähnliche Weise verfahren kann, wie ich in dem ersten Bande meiner *Entwicklungen* § 8, S. 222 ff. verfahren bin.

Die Gleichung irgend einer gegebenen Curve zweiter Classe, welche die zweite Axe im Anfangspunkte berührt, sei folgende:

$$Au^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0. \tag{5}$$

Das System irgend zweier Punkte, die auf der zweiten Axe liegen, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$Au^2 + 2D'uw + F'w^2 = 0. \tag{6}$$

Die beiden Gleichungen (5) und (6) vereint, dienen zur Bestimmung der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden bezüglichen Oerter, d. h. derjenigen beiden Tangentenpaare, welche man durch die beiden Punkte des Systems an die Curve legen kann. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$w[2(D - D')u + 2Ev + (F - F')w] = 0.$$

Der Faktor w des ersten Theiles dieser Gleichung, der gleich Null gesetzt den Anfangspunkt darstellt, entspricht den beiden in die zweite Axe zusammenfallenden Tangenten. Die beiden andern Tangenten schneiden sich also in demjenigen Punkte, dessen Gleichung folgende ist:

$$2(D - D')u + 2Ev + (F - F')w = 0. \tag{7}$$

40. Die Coefficienten von u und v in dieser Gleichung ändern sich nicht, wenn man statt (5) die Gleichung irgend einer andern Curve nimmt, welche die gegebene im Anfangspunkte vierpunktig osculirt (No. 37). Es stellt also (7) einen solchen Punkt dar, der für alle diese Curven auf einer und derselben durch den gemeinschaftlichen Osculationspunkt gehenden geraden Linie liegt. Also:

Wenn man von irgend zwei festen Punkten der gemeinschaftlichen Tangente im Osculationspunkte mehrerer sich vierpunktig osculirender Curven an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegen die Durchschnitte je zweier solcher Tangenten auf einer festen, durch den Osculationspunkt gehenden geraden Linie.

41. Hiernach erhalten wir eine neue Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Punkte vierpunktig osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Sei OMN (Fig. 26) die gegebene Curve, TS die gegebene gerade Linie, welche der Tangente im Osculationspunkte O im Punkte T begegne. Man lege durch T die zweite Tangente TS' und ziehe eine beliebige dritte Tangente, die den beiden ersten Tangenten in T' und S' begegne. Man ziehe OS', die der gegebenen geraden Linie in S begegne, und endlich $T'S$. Diese gerade Linie ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Fig. 26.

Wenn die beiden Punkte T und T' zusammenfallen, so sind S' und S Punkte der gegebenen und der zu construirenden Curve, die immer noch mit O in gerader Linie liegen.

Wir können hiernach, wenn ein *Punkt* der zu construirenden Curve gegeben ist, *in diesem Punkte die Tangente legen*, und wenn eine *Tangente* gegeben ist, *auf dieser Tangente den Berührungspunkt bestimmen.*

42. Die Coefficienten von v und w bleiben in der Gleichung (7) dieselben, wenn die Gleichung (5) eine *Parabel* darstellt, mithin $F=0$ ist, und wir diese Parabel mit irgend einer andern vertauschen, welche dieselbe im Anfangspunkte dreipunktig osculirt. Der Punkt (7) rückt aber alsdann auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie fort. Also:

Wenn man von irgend zweien festen Punkten der Tangente im Osculationspunkte mehrerer sich osculirender Parabeln noch zwei Tangenten an jede Parabel legt, so liegt der Durchschnitt solcher zwei Tangenten auf einer festen, der gemeinschaftlichen Tangente parallelen geraden Linie.

43. Hiernach können wir folgende Aufgabe construiren.

Eine Parabel (Fig. 27) zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Punkte osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

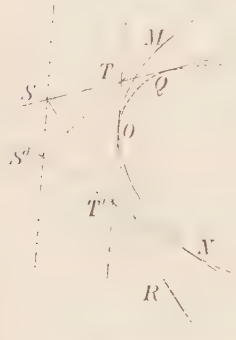

Fig. 27.

Sei MON die gegebene Parabel, die in O osculirt werden soll, SQ die gegebene gerade Linie, die der Tangente in O im Punkte T begegne. Man lege durch T eine zweite Tangente TM an die gegebene Parabel und an dieselbe noch irgend eine beliebige Tangente $S'N$, die der Tangente TM in S' und der Tangente OT in T' begegne. Man ziehe parallel mit OT durch den Punkt S' die gerade Linie $S'S$, die der gegebenen in S begegne, und endlich ST'. Diese Linie ist eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

44. Wenn die beiden Punkte T und T' zusammenfallen, so erhalten wir statt S und S' zwei Berührungspunkte auf den beiden Parabeln. Also:

Wenn man von irgend einem festen Punkte der Tangente im Osculationspunkte mehrerer sich osculirender Parabeln noch eine zweite Tangente an jede derselben legt, so liegen die Berührungspunkte auf einer der gemeinschaftlichen Tangente parallelen geraden Linie.

Hiernach können wir in der letzten Aufgabe auf der gegebenen geraden Linie sogleich den Berührungspunkt finden und auch eine Parabel construiren, die eine gegebene in einem gegebenen Punkte osculirt und überdies *durch einen gegebenen Punkt geht.*

45. Die Coefficienten von u und w bleiben in der Gleichung (7) dieselben, wenn die Gleichung (5) eine Parabel darstellt, wir an die Stelle derselben irgend eine andre Parabel setzen, die mit der gegebenen dieselbe gemeinschaftliche Tangente hat, und parallel mit dieser Tangente

die erste Axe legen. Dies ergiebt sich sogleich aus der 38. Nummer, wenn wir überdies berücksichtigen, dass die vierte gemeinschaftliche Tangente zweier Parabeln unendlich weit liegt. Wenn aber die Coefficienten von u und w dieselben bleiben, so stellt (7) einen Punkt dar, der auf einer der ersten Axe parallelen geraden Linie bleibt. Hiernach ergeben sich leicht die folgenden beiden Sätze:

Wenn mehrere Parabeln zwei gegebene gerade Linien berühren und die erste derselben in einem gegebenen Punkte, so schneiden sich diejenigen beiden Tangenten, die von irgend zwei festen Punkten dieser ersten gegebenen geraden Linie an jede Parabel gelegt werden können, in einem solchen Punkte, der auf einer festen, der zweiten gegebenen geraden Linie parallelen Linie bleibt.

Wenn man von irgend einem festen Punkte der ersten gegebenen geraden Linie noch eine Tangente an jede Parabel legt, so liegen die Berührungspunkte auf allen diesen Tangenten in derselben, der zweiten gegebenen geraden Linie parallelen Linie.

Aus diesen Sätzen ergeben sich wiederum lineare Constructionen, die wir hier übergehen.

46. Wir können die Gleichung (7) auch noch aus einem andern Gesichtspunkte discutiren. Es ändern sich nämlich in dieser Gleichung z. B. die Coefficienten von v und w nicht, wenn man statt (6) eine andere Gleichung von derselben Form nimmt, in der man nur dem Coefficienten D' irgend einen andern Werth beilegt; d. h. wenn man statt der durch (6) dargestellten beiden Punkte irgend zwei andre Punkte der zweiten Axe nimmt, deren Abstände vom Berührungspunkte, in einander multiplicirt, dasselbe Product geben. Der Durchschnitt der beiden Tangenten, die durch solche zwei Punkte sich noch an die gegebene Curve legen lassen, liegt also auf einer festen, der zweiten Axe parallelen geraden Linie. Also auch umgekehrt:

Wenn man von irgend einem Punkte einer gegebenen geraden Linie zwei Tangenten an eine gegebene Curve zweiter Classe legt, so wird das von diesen beiden Tangenten interceptirte Segment einer dritten Tangente, die der gegebenen geraden Linie parallel ist, im Berührungspunkte so getheilt, dass das Produkt der beiden Theile ein constantes ist.

Wenn wir insbesondere annehmen, dass die gegebene gerade Linie unendlich weit liege, so erhalten wir einen bekannten Satz.

47. Den nachstehenden Satz erhalten wir auf eine ganz ähnliche Weise, wie wir den Satz der vorigen Nummer erhalten haben.

Wenn irgend eine Linie zweiter Ordnung gegeben ist und man construirt in einem beliebigen Punkte derselben die Tangente, legt durch denselben Punkt eine beliebige gerade Linie und durch irgend einen Punkt

dieser geraden Linie zwei neue Tangenten an die Curve, so schneiden diese beiden Tangenten die erstgezogene in solchen zwei Punkten, für welche die Summe der reciproken Werthe der Abstände vom Berührungspunkte constant ist.

Wir brechen hier ab, um sogleich zu einer allgemeineren Verbindung der Gleichungen der Oerter zweiter Classe überzugehen, weil hier auf eine ungemein leichte Weise eine Menge von Sätzen und Constructionen sich ergeben.

§ 4.

Verbindung der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe vermittelst unbestimmter Coefficienten.

48. Wenn die beiden Gleichungen

$$A = 0, \quad A' = 0 \tag{1}$$

irgend zwei Oerter zweiter Classe darstellen, so stellt, wenn μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, die Gleichung

$$A + \mu A' = 0 \tag{2}$$

alle möglichen Oerter derselben Classe dar, welche mit den beiden gegebenen dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben. Wenn der erste Theil der Gleichung (2) sich in zwei Faktoren des ersten Grades auflösen lässt, so stellt dieselbe ein *System von zwei Punkten* dar. Ein solches System ist also als ein Ort zweiter Classe anzusehen. (Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass die beiden Punkte auf keine Weise als verschwindende Ellipsen zu betrachten sind.) Wenn aber die in Rede stehende Zerlegung stattfinden soll, so erhalten wir eine Bedingungsgleichung, die in Beziehung auf μ vom dritten Grade ist. Es reducirt sich diese Gleichung nur dann auf den zweiten Grad, wenn schon eine der beiden Gleichungen (1) ein System von zwei Punkten darstellt. Wir erhalten also immer, wenn wir die Gleichungen zweier solcher Oerter zweiter Classe, die Curven sind, gehörig mit einander verbinden, mindestens die Gleichung *eines* Systems von zwei Punkten. Nur dürfen wir nicht übersehen, dass im Allgemeinen solche zwei Punkte auch zusammenfallen und auch imaginär sein können. In diesem letztern Falle erhalten wir eine bestimmte *gerade Linie*, welche durch diese beiden imaginären Punkte geht, statt dieser Punkte; eine gerade Linie, die durch eine Gleichung des zweiten Grades dargestellt wird.*) Man kann aber leicht zeigen, dass immer *eine* resultirende

*) Dies wird deutlicher, wenn wir die Gleichung

$$v^2 + 2avw + bw^2 = 0$$

Gleichung (2) ein System zweier *reellen* Punkte darstellt. Wenn die Bedingungsgleichung in μ *nur reelle Wurzeln hat*, so erhalten wir drei reelle Gleichungen von der Form der Gleichung (2). Alsdann haben die beiden Curven entweder *vier* reelle oder *gar keine* reellen gemeinschaftlichen Tangenten. Im ersten Falle stellen jene drei resultirenden Gleichungen die *dreimal* zwei gegenüberstehenden Winkelpunkte der von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur dar: im zweiten Falle erhalten wir *ein* System von zwei reellen Punkten und ausserdem *zwei* reelle gerade Linien. Wenn die Gleichung in μ *zwei imaginäre* Wurzeln hat, so erhalten wir durch Verbindung der gegebenen Gleichungen nur eine einzige Gleichung eines Systems von zwei Punkten: die beiden andern Systeme existiren gar nicht. Diesem Falle entspricht, dass die beiden gegebenen Curven nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben.

Wenn die Bedingungsgleichung in μ *zwei gleiche* Wurzeln hat, so *berühren sich* die beiden gegebenen Curven. Die drei resultirenden Systeme von zwei Punkten sind in diesem Falle die beiden Durchschnittspunkte der Tangente im Berührungspunkte der Curven mit den beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten derselben (zweimal genommen), und dann das System des Berührungspunktes und des Durchschnittes der letztgenannten beiden Tangenten. Wenn die beiden Curven einen *doppelten Contact* haben, so sind die drei Systeme der Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten als doppelter Punkt betrachtet (zweimal genommen), und dann das System der beiden Berührungspunkte.

Wenn die Bedingungsgleichung in μ *drei gleiche* Wurzeln hat, so haben die beiden Curven einen *dreipunktigen Contact*. Von den drei resultirenden und alsdann identischen Systemen besteht jedes aus dem Osculationspunkte und dem Durchschnittspunkte der Tangente in diesem Punkte mit der noch übrigen einzigen gemeinschaftlichen Tangente. Für den Fall einer *vierpunktigen* Osculation fallen die beiden Punkte der drei identischen Systeme in den Osculationspunkt zusammen.

49. Es tritt uns hier noch folgende Frage entgegen: Giebt es Curven zweiter Classe, die nur zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, oder bestimmter ausgedrückt, von deren vier gemeinschaftlichen Tan-

betrachten, welche zwei auf der ersten Axe liegende Punkte darstellt. Wenn aber

$$a^2 - b < 0,$$

so giebt diese Gleichung für v und w keine andern reellen Werthe als

$$v = 0, \quad w = 0.$$

Es stellt also die vorstehende Gleichung *bloss* die erste Coordinatenaxe dar.

genten zwei unendlich weit liegen, so wie es Curven zweiter Ordnung giebt (ähnliche und ähnlich liegende), von deren vier Durchschnitten zwei unendlich weit liegen? Eine gemeinschaftliche Tangente liegt, wie wir schon früher gesehen haben, unendlich weit, wenn die beiden Curven *Parabeln* sind. Aber zwei gemeinschaftliche Tangenten können *nicht* unendlich weit liegen.

50. Herr Poncelet hat schon bemerkt, dass, wenn zwei Oerter zweiter Classe *denselben Brennpunkt haben*, dieser Brennpunkt als der Durchschnitt zweier gemeinschaftlichen imaginären Tangenten anzusehen ist*).

Wenn die beiden gegebenen Curven *ähnliche, ähnlich liegende* und *concentrische* sind, so ist ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Durchschnitt zweier Paare gemeinschaftlicher imaginärer Tangenten.

Wenn in den vorstehenden Andeutungen irgend etwas dunkel erscheinen sollte, so verweise ich auf die ganz analogen Erörterungen über die Verbindung der Gleichungen von Oertern zweiter Ordnung im ersten Bande meiner *Entwicklungen***).

51. Auf dem bisher Entwickelten beruhen Erörterungen, die denen des letzten Paragraphen der eben angeführten Schrift entsprechen. In dem Folgenden will ich einige Momente hervorheben.

Es seien

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0 \tag{1}$$

die Gleichungen dreier solcher Curven zweiter Classe, welche dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, deren Durchschnittspunkt durch die Gleichung

$$c = 0$$

dargestellt werde. Alsdann erhalten wir durch gehörige Verbindung vermittelst unbestimmter Coefficienten je zweier der drei Gleichungen (1) folgende Ausdrücke:

$$\begin{cases} A - \mu'' A' = c.a'' = 0, \\ A - \mu' A'' = c.a' = 0, \\ A' - \mu A'' = c.a = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$\mu'' A' - \mu' A'' = c(a' - a'') = 0,$$

eine Gleichung, die, was ihre Form zeigt, mit der dritten der Gleichungen (2) identisch sein muss; wonach wir

$$\mu'' a = a' - a''$$

*) [Vgl. Traité des propriétés projectives des figures, § 453.]

**) [Vgl. a. a. O. S. 241.]

erhalten. Es liegen also die drei, durch folgende drei Gleichungen vom ersten Grade dargestellten Punkte

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad a'' = 0$$

in gerader Linie. Hierin ist der nachstehende Satz enthalten:

Wenn irgend drei Oerter zweiter Classe dieselben zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten haben, so liegen die Durchschnitte der noch übrigen dreimal zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten in gerader Linie.

52. Wenn drei Curven eine gegebene gerade Linie in demselben Punkte berühren, so haben je zwei derselben einerseits dieselben zwei zusammenfallenden Durchschnittspunkte und andrerseits zwei zusammenfallende gemeinschaftliche Tangenten. Es gehen also nicht allein, wie bekannt, die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier derselben durch denselben Punkt, sondern es liegen auch die drei Durchschnitte der drei Paare gemeinschaftlicher Tangenten in gerader Linie.

53. Wir wollen mehrere einzelne Fälle des Satzes der 51. Nummer genauer betrachten. Wenn die drei Oerter zweiter Classe *Parabeln* sind, so liegt eine gemeinschaftliche Tangente je zweier derselben unendlich weit, und den Voraussetzungen des obigen Satzes geschieht Genüge, wenn die Parabeln eine einzige gemeinschaftliche Tangente haben. Also:

Wenn irgend drei Parabeln dieselbe gerade Linie berühren, so liegen die Durchschnitte der übrigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten je zweier derselben in gerader Linie.

54. Es ist bekannt, von welchem Vortheile es in der Theorie der Oerter zweiter Ordnung ist, dass man *Systeme von zwei geraden Linien* mit Curven dieser Ordnung zusammenstellt; ein Verfahren, das man auf die Betrachtung der Gleichungen gründen oder auch durch allgemeine, rein geometrische Betrachtungen rechtfertigen kann. In dem Folgenden werden wir gleichen Vortheil daraus ziehen, dass wir, was früher noch nicht geschehen zu sein scheint, mit Curven zweiter Classe, oder, was dasselbe heisst, zweiter Ordnung, *Systeme von zwei Punkten* zusammenstellen; ein Verfahren, gegen welches sich auch nicht der geringste Einwurf machen lässt, sobald wir zu den Gleichungen zurückgehen.

Um die Bedingungen der 51. Nummer zu befriedigen, müssen wir, wenn wir mit zwei Curven A und B (Fig. 28) ein System von zwei Punkten c, c' zusammenstellen wollen, diese beiden Punkte auf zweien gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven annehmen. Ziehen wir alsdann von solchen zwei Punkten noch zwei Tangenten an jede

der beiden Curven, die sich in den beiden Punkten S und S' schneiden, so liegen diese beiden Punkte mit dem Durchschnitte derjenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, auf denen c und c' nicht liegen, mit Φ, in gerader Linie. Also:

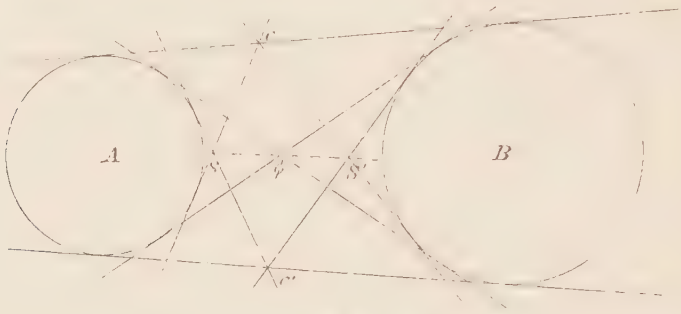

Fig. 28.

Wenn man von irgend zwei Punkten zweier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven zweiter Classe noch vier Tangenten an die beiden Curven legt, so bilden diese Tangenten ein Viereck, dessen eine Diagonale durch einen festen Punkt geht, der unveränderlich derselbe bleibt, wie auch jene beiden Punkte auf den gemeinschaftlichen Tangenten fortrücken mögen.

Wir erhalten eine Modification dieses Satzes, wenn wir für die Punkte c, c' zwei Berührungspunkte auf den beiden Tangenten nehmen.

Für den Fall zweier *Parabeln* erhalten wir eine doppelte Construction; einmal können wir nemlich die beiden Punkte c, c' auf zweien der drei gemeinschaftlichen Tangenten annehmen, alsdann liegen die beiden Constructionspunkte S und S' auf einer sich immer parallel bleibenden geraden Linie. Oder wir können auch einen Punkt c auf einer beliebigen gemeinschaftlichen Tangente und den andern Punkt c' auf der unendlich weit entfernt liegenden vierten gemeinschaftlichen Tangente annehmen, d. h. nach beliebiger Richtung zwei parallele Tangenten an die beiden Parabeln ziehen. Der feste Punkt ist alsdann der Durchschnitt derjenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, auf denen c nicht angenommen worden ist.

55. Nach der vorigen Nummer ergiebt sich, wenn wir zwei gemeinschaftliche Tangenten zweier Curven zweiter Classe kennen, eine leichte Construction des Durchschnittspunktes der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten; und also können wir auch diese Tangenten selbst in dem Falle, dass dieselben reell sind, construiren.

56. Der Satz der 54. Nummer erleidet Modificationen, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven besondere Beziehungen stattfinden.

Wir wollen sogleich zwei sich *dreipunktig osculirende* Curven (Fig. 29) betrachten. Alsdann fallen drei gemeinschaftliche Tangenten in die Tangente des Osculationspunktes zusammen, und es giebt ausserdem nur noch eine einzige gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir also die beiden Punkte c, c' auf der Tangente im Osculationspunkte an, so ist der feste Punkt Φ der Durchschnitt derselben Tangente mit der noch übrigen gemeinschaftlichen Tangente. Also:

Fig. 29.

Wenn man von irgend zwei beliebigen Punkten der Tangente im Osculationspunkte zweier oder mehrerer sich dreipunktig osculirender und überdies dieselbe gerade Linie berührender Kegelschnitte an jeden derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegt der Durchschnitt dieser Tangenten auf derselben geraden Linie, und diese gerade Linie geht durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangente mit der Tangente im Osculationspunkte, und dreht sich um diesen Durchschnitt, wenn die beiden beliebigen Punkte auf der letztgenannten Tangente fortrücken.

Nach diesem Satze können wir einen Kegelschnitt beschreiben, der einen gegebenen *in einem gegebenen Punkte osculirt und überdies zwei gegebene gerade Linien berührt.*

Construction. (Fig. 29.) Es sei O der Punkt, in welchem die gegebene Curve OM osculirt werden soll; die Tangente in diesem Punkte werde von den beiden sich in S schneidenden, gegebenen geraden Linien in den beiden Punkten c und c' geschnitten; von diesen beiden Punkten lege man an die gegebene Curve die beiden Tangenten cS' und $c'S'$, die sich im Punkte S' schneiden. Zieht man endlich SS', so begegnet diese Linie der Tangente in O in demjenigen Punkte Φ, in welchem dieselbe Tangente von der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und gesuchten Curve getroffen wird.

Wenn die eine gegebene gerade Linie die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven ist, so bietet sich unmittelbar eine

ganz einfache Construction beliebig vieler Tangenten der gesuchten Curve dar.

57. Wenn wir annehmen, dass der Punkt c' mit dem Punkte c zusammenfalle, so erhalten wir die Berührungspunkte σ und σ' statt der Punkte S und S'. Also:

Wenn man von irgend einem Punkte der Tangente im Osculationspunkte irgend zweier Kegelschnitte zwei Tangenten an dieselben legt, so liegen die Berührungspunkte auf diesen beiden Tangenten mit dem Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven und jener Tangente im Osculationspunkte in gerader Linie.

Nach diesem Satze können wir in der Aufgabe der vorigen Nummer auf jeder Tangente den Berührungspunkt finden. Wir erhalten z. B. den Berührungspunkt σ auf cS, wenn wir durch Φ und den Berührungspunkt σ' auf der gegebenen Curve die gerade Linie $\Phi\sigma$ legen.

Wir können ferner auch eine Curve beschreiben, die eine gegebene *in einem gegebenen Punkte osculirt* und überdies eine von folgenden Bedingungen erfüllt:

1) *eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte berührt,*
2) *mit der gegebenen Curve eine gegebene gemeinschaftliche Tangente hat und durch irgend einen gegebenen Punkt geht.*

Es sei, um nur den zweiten Fall hervorzuheben, $O\sigma'$ die gegebene Curve, O der Osculationspunkt, Φ derjenige Punkt, in welchem die Tangente in diesem Punkte von der gegebenen gemeinschaftlichen Tangente $T\Phi$ geschnitten wird, und endlich σ der gegebene Punkt. Man ziehe die gerade Linie $\sigma\Phi$, von der die gegebene Curve in σ' und σ_1 geschnitten werde. In diesen beiden Punkten construire man die Tangenten an die gegebene Curve, welche der Tangente in O in zwei Punkten begegnen. Wenn man diese Punkte (von denen c der eine ist) mit dem Punkte σ verbindet, so erhält man zwei Tangenten derjenigen beiden Curven, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen *zwei* Auflösungen; sie hat nur *eine* Auflösung, wenn der gegebene Punkt auf der gegebenen Curve liegt.

58. Wenn man die beiden Punkte c und c' (Fig. 30) auf der Tangente im Osculationspunkte und der gemeinschaftlichen Tangente zweier sich dreipunktig osculirender Curven annimmt, so erhält man statt des Satzes der 56. Nummer folgenden:

Wenn man von zwei Punkten der Tangente im Osculationspunkte und der gemeinschaftlichen Tangente zweier sich dreipunktig osculirender Curven an jede Curve noch zwei Tangenten zieht, so schneiden sich die

zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Punkten, die mit dem Osculationspunkte in gerader Linie liegen.

Hieraus ergiebt sich eine neue Construction der Aufgabe der 56. Nummer, die auch dann ihre Anwendbarkeit behält, wenn der Durchschnitt der Tangente im Osculationspunkte mit der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und der zu construirenden Curve sehr weit liegt. Es sei wiederum OM die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll; Sc und Sc' seien die beiden zu berührenden geraden Linien. Man verbinde den Durchschnitt S dieser beiden geraden Linien mit O, lege von c, dem Durchschnitt einer (beliebigen) dieser beiden Linien mit der Tangente in O, die Tangente cS' an die gegebene Curve, die der OS in S' begegne, und endlich durch S' die zweite Tangente $S'c'$ an dieselbe Curve. Diese Tangente begegnet der gegebenen Sc' in einem Punkte c', welcher ein Punkt der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und der gesuchten Curve ist.

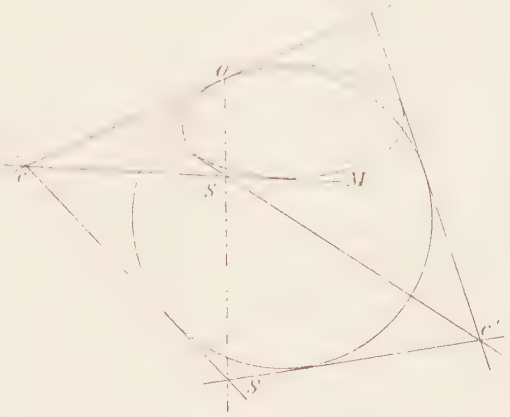

Fig. 30.

Die Modification dieser Construction für den Fall, dass statt der beiden Tangenten eine einzige und auf derselben der Berührungspunkt gegeben ist, ergiebt sich von selbst, und hiernach ergeben sich endlich auch neue Constructionen für die in der 57. Nummer behandelte Aufgabe.

59. Wenn wir annehmen, dass alle Curven *Parabeln* sind, so erhalten wir aus No. 56 und 57 die bereits in der 42., 43. und 44. Nummer unmittelbar bewiesenen Sätze und Constructionen, und aus No. 58 noch einige neue.

Es kann aber auch die gegebene Curve irgend eine beliebige sein und eine *Parabel* verlangt werden. Dies kommt alsdann darauf hinaus, in den vorstehenden Constructionen statt einer gegebenen zu berührenden geraden Linie eine unendlich weit entfernt liegende zu nehmen. Wir wollen zwei Aufgaben hier hervorheben.

Eine Parabel zu beschreiben, die einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Construction: Es sei OM (Fig. 31) die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll; cS die gegebene gerade Linie, die der Tangente im Osculationspunkte in c begegne. Man ziehe die Tangenten cS' und $c'S'$, letztere parallel mit der Tangente im Osculationspunkte, ziehe $S'\Phi$ parallel mit cS, wodurch auf Oc der Punkt Φ bestimmt wird. Legt man durch Φ eine zweite Tangente an die gegebene Curve, so berührt dieselbe auch die zu beschreibende Parabel. Den Berührungspunkt P auf cS erhält man, indem man N, den Berührungspunkt auf cS', mit Φ durch eine gerade Linie verbindet.

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Parabel[2]*) in einem gegebenen Punkte osculirt und überdies durch irgend einen gegebenen Punkt geht.*

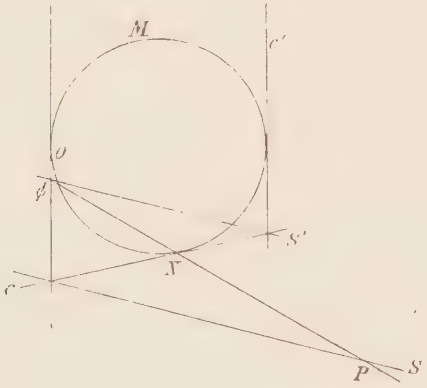

Fig. 31.

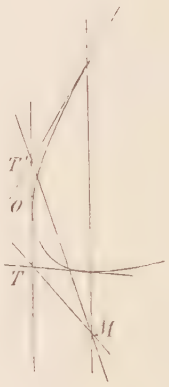

Fig. 32.

Construction: Es sei O (Fig. 32) der Osculationspunkt und M der gegebene Punkt. Man ziehe parallel mit der Tangente in O und durch M eine gerade Linie, die der gegebenen Curve im Allgemeinen in zwei Punkten begegnen wird; man lege in diesen Punkten zwei Tangenten an die gegebene Curve und verbinde diejenigen beiden Punkte, in welchen diese beiden Tangenten die Tangente in O schneiden, durch zwei gerade Linien mit dem Punkte M. Diese beiden geraden Linien TM und $T'M$ berühren alsdann diejenigen beiden Parabeln, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, in dem gegebenen Punkte.

60. Wenn wir ein System von zwei Punkten mit zwei sich *doppelt berührenden Curven* zusammenstellen, so erhalten wir folgende beiden Sätze.

Wenn man von irgend zwei Punkten der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte noch zwei Tan-

genten an jeden derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Punkten, die mit dem Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten in gerader Linie liegen.

Wenn man von irgend zwei Punkten einer der beiden gemeinschaftlichen Tangenten noch zwei Tangenten an jeden derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Punkten, die mit dem Berührungspunkte auf der andern gemeinschaftlichen Tangente in gerader Linie liegen.

Es ergeben sich aus diesen beiden Sätzen und ihren Modificationen eine Reihe von einzelnen Constructionen, die wir übergehen. Wenn die beiden Curven statt des doppelten Contakts einen *vierpunktigen* haben, so erhalten wir die in der 40. und 41. Nummer unmittelbar bewiesenen Sätze und Constructionen. Als letztes Beispiel wollen wir noch folgende Aufgabe nehmen.

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Punkte vierpunktig berührt.

Construction: (Fig. 33.) Man lege in dem gegebenen Punkte O eine Tangente an die gegebene Curve und parallel mit ihr eine zweite

Fig. 33.

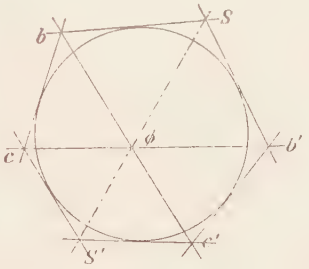

Fig. 34.

Tangente; construire ferner eine dritte Tangente, die der ersten in dem Punkte T, der zweiten in dem Punkte S begegne; ziehe OS und parallel hiermit eine gerade Linie durch T. Diese Linie ist alsdann eine Tangente der verlangten Parabel. Man erhält den Berührungspunkt P auf dieser Tangente, wenn man den Berührungspunkt N auf der obigen dritten Tangente durch eine gerade Linie mit O verbindet.

61. In dieser Nummer wollen wir mit *einer Curve zwei Systeme von zwei Punkten* zusammenstellen. Nach den Voraussetzungen der 51. Nummer müssen die Punkte der beiden Systeme, etwa wie in der 34. Figur, auf zwei Tangenten bc und $b'c'$ angenommen werden. Die drei Punkte, die in gerader Linie liegen, sind alsdann 1) S, der Durch-

schnitt der neuen von b und b' an die Curve gelegten Tangenten bS und $b'S$; 2) S', der Durchschnitt der neuen von c und c' an die Curve gelegten Tangenten cS' und $c'S'$, und endlich 3) Φ, der Durchschnitt von bc' und $b'c$. Der hierin enthaltene Satz ist der bekannte von Brianchon:

Die drei Diagonalen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks gehen durch einen und denselben Punkt.

62. Wir können endlich noch *drei Systeme von zwei Punkten* a und a', b und b', c und c' zusammenstellen, die, etwa wie in der 35. Figur, auf zwei geraden Linien vertheilt liegen. Die drei in gerader Linie liegenden Punkte sind alsdann:

$$(a, b'; a', b), \quad (a, c'; a', c) \quad \text{und} \quad (b, c'; b', c),$$

oder S, S' und S''. Da wir beliebig die Punkte jedes Systems mit einander vertauschen können, erhalten wir sechsmal drei solcher Punkte und hiernach folgenden bekannten Satz:

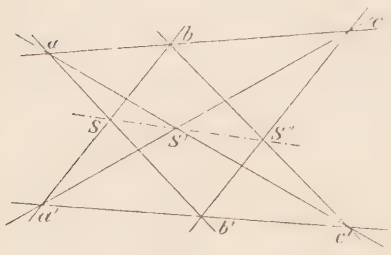

Fig. 35.

Wenn man auf jeder von zwei gegebenen geraden Linien drei Punkte beliebig annimmt und diese Punkte durch neue gerade Linien verbindet, so erhält man sechsmal drei Durchschnitte dieser Linien, welche in gerader Linie liegen.

63. Wir gehen zu einem zweiten Schema über. Es sei

$$A = 0$$

die Gleichung irgend eines Ortes zweiter Classe, der von zwei andern, deren Gleichungen folgende seien:

$$A' = 0, \quad A'' = 0,$$

doppelt berührt wird. Alsdann erhalten wir, bei schicklicher Bestimmung von μ' und μ'', folgende Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} A - \mu' A' = p^2 = 0, \\ A - \mu'' A'' = q^2 = 0, \end{cases}$$

indem wir durch $p = 0$ und $q = 0$ die Gleichungen des Durchschnittspunktes der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und zweiten und des ersten und dritten Ortes darstellen. Wenn wir die letzten beiden Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$(2) \qquad \mu' A' - \mu'' A'' = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p) = 0.$$

Da diese Gleichung ein System von zwei Punkten darstellt, so ist sie identisch mit einer Gleichung von folgender Form:

$$aa' = 0,$$

indem $a = 0$ und $a' = 0$ die Durchschnittspunkte der zu zwei und zwei genommenen gemeinschaftlichen Tangenten des zweiten und dritten Ortes darstellen. Hiernach müssen die Faktoren $(q + p)$ und $(q - p)$ vermittelst gehöriger Coefficienten den Faktoren a und a' des ersten Theiles der letzten Gleichung identisch werden, wonach also die vier durch

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

dargestellten Punkte in gerader Linie liegen. Also:

Wenn ein Ort zweiter Classe zwei andre, und beide doppelt, berührt, so liegen zwei Durchschnitte der vier gemeinschaftlichen Tangenten der letzteren und diejenigen beiden Punkte, in welchen die gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und jedes der beiden andern Oerter sich schneiden, alle vier in gerader Linie.

64. Statt der doppelten Berührung können wir eine *vierpunktige Osculation* nehmen: an die Stelle des Durchschnittspunktes der gemeinschaftlichen Tangenten tritt alsdann der Osculationspunkt.

Wenn wir mit einer Curve ein *System von zwei Punkten* zusammenstellen, so erhellt unmittelbar aus den Gleichungen, dass alsdann die beiden Punkte, wenn von einer doppelten Berührung die Rede ist, auf der Curve angenommen werden müssen. Stellt man *zwei* Systeme von zwei Punkten zusammen, so müssen unter gleicher Voraussetzung alle vier Punkte in gerader Linie liegen. Hiernach ergeben sich mehrere einzelne Sätze. So erhalten wir z. B., wenn wir als ersten Ort eine Curve und für die beiden andern Oerter zwei Punktsysteme nehmen, so dass also eine Curve und auf dem Umfange derselben vier Punkte gegeben sind, folgenden bekannten Satz:

Wenn man in eine Curve zweiter Ordnung ein Viereck beschreibt, dessen Winkelpunkte die Berührungspunkte eines umschriebenen Vierecks sind, so liegen die beiden Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten des erstgenannten und zwei Winkelpunkte des letztgenannten Vierecks in gerader Linie.

65. Wir wollen in dem Folgenden nur noch den einen Fall hervorheben, wo eine gegebene Curve (Fig. 36) von einer andern doppelt berührt wird, und wir überdies auf dem Umfange derselben zwei Punkte beliebig annehmen. Aus diesem Falle wollen wir mehrere Constructionen herleiten, und zwar zuerst die Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene vierpunktig osculirt und überdies durch irgend zwei gegebene Punkte geht.

Es sei OMN eine Curve, die von OPQ vierpunktig in O osculirt wird, und auf deren Umfange die beiden Punkte M und N liegen.

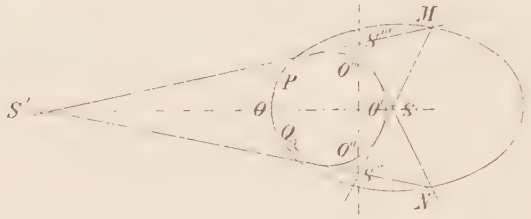

Fig. 36.

Die von M und N an die zweite Curve gelegten Tangenten bilden eine vierseitige Figur, deren zwei Winkelpunkte S und S' mit dem Osculationspunkte O in gerader Linie liegen (No. 63). Hiernach ergiebt sich sogleich folgende Construction der vorstehenden Aufgabe, wenn OPQ die gegebene Curve ist und M und N die beiden gegebenen Punkte sind. Man lege von jedem der beiden Punkte M und N zwei Tangenten an die gegebene Curve. Diese beiden Tangentenpaare schneiden sich in vier Punkten, durch welche sich noch zwei gerade Linien SS' und $S''S'''$ legen lassen. Diese beiden Linien schneiden die gegebene Curve im Allgemeinen in vier Punkten O, O', O'' und O'''; und diese Punkte sind diejenigen, in welchen die gegebene Curve von denjenigen Curven, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten und deren es also im Allgemeinen *vier* giebt, osculirt wird.

Nichts hindert uns, die vorstehende Construction unmittelbar auch auf den Fall zu übertragen, wo ein gegebener Punkt oder auch beide gegebenen Punkte *unendlich weit liegen;* d. h. wo eine Hyperbel verlangt wird, und die Richtung einer oder beider Asymptoten derselben gegeben ist.

66. *Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene zweimal berührt und überdies durch drei gegebene Punkte geht.*

Construction: Indem wir nacheinander die gegebene Curve mit zweimal zwei der drei gegebenen Punkte zusammenstellen, erhalten wir wie vorhin zweimal zwei gerade Linien, die sich in vier Punkten schneiden, und diese Punkte sind offenbar diejenigen, in welchen die gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und jeder der *vier* gesuchten Curven, die im Allgemeinen möglich sind, sich schneiden.

Da drei gegebene Punkte sich auf dreifache Art zu zwei com-

biniren lassen, so erhalten wir (Fig. 37*) dreimal zwei gerade Linien, die nothwendig durch dieselben vier Punkte gehen müssen. Diese vier Punkte sind diejenigen, in welchen sich die drei Diagonalen von solchen umschriebenen Sechsecken schneiden, die durch die sechs von den drei gegebenen Punkten an die Curve gelegten Tangenten bestimmt werden.

Fig. 37.

Wir haben hiernach auf indirectem Wege den Brianchon'schen Satz *vom umschriebenen Sechseck* dargethan und zugleich die geometrische Bedeutung des Durchschnittspunktes der drei Diagonalen nachgewiesen. Es ist nämlich dieser Punkt der Durchschnitt der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und einer andern, welche dieselbe doppelt berührt und ausserdem durch die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Sechsecks geht.

67. Damit das Schema der 63. Nummer vollständig werde, müssen wir in den Gleichungen (1) die Ausdrücke p^2 und q^2, wenigstens einen

*) [Die Figur ist vom Herausgeber hinzugefügt worden. Die sechs Geraden, die das vollständige Viereck bilden, sind a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2.]

derselben, mit dem doppelten Vorzeichen nehmen. Statt der Gleichung (2) erhalten wir alsdann folgende allgemeinere:

$$\mu' A' - \mu'' A'' = \pm (q^2 \pm p^2) = 0.$$

In dem einen bisher unbeachtet gebliebenen Falle, wo in dieser Gleichung p^2 mit dem Zeichen + vorkommt, stellt diese Gleichung nicht mehr zwei Punkte, sondern eine blosse gerade Linie dar. Es sind alsdann die Durchschnitte der (imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven $A' = 0$ und $A'' = 0$ imaginär, liegen aber auf einer reellen geraden Linie (No. 48), die zugleich die beiden Punkte $p = 0$ und $q = 0$ enthält.

68. Wenn wir zu den beiden Oertern zweiter Classe, die einen gegebenen doppelt berühren, noch einen dritten hinzunehmen, so erhalten wir nach demselben Schema, welches in der 385. Nummer meiner *Entwickelungen* ausgeführt worden ist, folgenden Satz:

Wenn ein gegebener Ort zweiter Classe von dreien andern doppelt berührt wird, so sind diejenigen dreimal zwei Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten je zweier dieser drei letztgenannten Oerter, mit denen (nach No. 63) die Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und jeder der drei übrigen in gerader Linie liegen, die sechs Winkelpunkte einer vollständigen vierseitigen Figur.

Diesen Satz ausführlich zu discutiren verbietet hier der Raum. Nur einige besondere Fälle kann ich nicht ganz unberücksichtigt lassen.

69. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort zweiter Classe ein System von zwei Punkten nehmen, und demnach drei Curven erhalten, welche eine gemeinschaftliche reelle oder ideale Chorde haben, so liegen viermal drei Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten dieser drei Curven in gerader Linie. Und endlich auch dann, wenn jene gemeinschaftliche Chorde unendlich weit liegt, d. h. wenn die drei Curven irgend drei ähnliche und ähnlich liegende, insbesondere also Kreise sind, besteht obiger Satz und erhält alsdann folgende Aussage:

Die Durchschnitte der äussern und innern (reellen und imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von irgend drei Kreisen sind solche sechs Punkte, von denen viermal drei in gerader Linie liegen.

Wir begegnen also hier einem von jenen beiden Hauptsätzen, die sich auf Zusammenstellungen von Kreisen beziehen. In solchen Verknüpfungen von scheinbar sehr verschiedenen Sätzen liegt der eigenthümliche Charakter der neuen Geometrie.

70. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort zweiter Classe eine Curve nehmen und für die drei übrigen drei Systeme von zwei Punkten,

die alsdann auf dem Umfange der Curve angenommen werden müssen, so erhalten wir wiederum den Pascal'schen Satz vom *eingeschriebenen Sechseck*, der uns eben so oft und ungesucht begegnet, als er eine grosse Rolle in dieser Art von Untersuchungen spielt.

71. Wenn wir für den ersten Ort ein System von zwei Punkten und für die drei übrigen zwei Curven und ein Punktsystem nehmen, so müssen, den obigen Voraussetzungen gemäss, diese beiden Curven sich in den beiden Punkten des ersten Systems schneiden, und mit denselben Punkten müssen die Punkte des zweiten Systems in gerader Linie liegen. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man von irgend zwei Punkten einer gemeinschaftlichen Chorde zweier Curven zweiter Classe vier Tangenten an jede derselben legt, so erhält man zwei vollständige vierseitige Figuren, von denen jede ausser den beiden Punkten des zweiten Systems noch zweimal zwei gegenüberliegende Winkelpunkte hat. Zweimal zwei Paare dieser gegenüberliegenden Winkelpunkte bilden mit zwei Durchschnitten der vier gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten der beiden Curven die sechs Winkelpunkte zweier neuen vollständigen vierseitigen Figuren.

Wenn die beiden Punkte des zweiten Punktsystems zusammenfallen, so geht der vorstehende Satz in folgenden über:

Wenn man von irgend einem Punkte einer gemeinschaftlichen (wirklichen oder idealen) Chorde zweier Curven zweiter Classe zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diejenigen vier geraden Linien, welche die Berührungspunkte auf der einen Curve mit den Berührungspunkten auf der andern Curve verbinden, in zwei Durchschnittspunkten der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven.

(Nach der Theorie der *Reciprocität* erhält man aus diesem Satze dessen *Umkehrung*; diese findet sich direkt bewiesen: *Entwicklungen*, No. 387.)

72. Nach der bisherigen Bezeichnung stellt die Gleichung

$$A'' + \mu' A' + \mu A = 0 \tag{1}$$

einen Ort zweiter Classe dar. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$A'' + \mu' A' = 0 \quad \text{und} \quad A = 0,$$
$$A'' + \mu A = 0 \quad \text{und} \quad A' = 0$$

setzen. Die beiden Paare der durch die in derselben Zeile befindlichen Gleichungen dargestellten Oerter haben also mit dem durch (1) dargestellten Orte dieselben gemeinschaftlichen Tangenten. Also:

Wenn irgend drei Oerter zweiter Classe gegeben sind, so hat jeder der beiden ersten mit einem beliebigen Orte, der mit dem andern und dem

dritten dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat, vier gemeinschaftliche Tangenten; die acht gemeinschaftlichen Tangenten, die man auf diese Weise erhält, umhüllen denselben Ort zweiter Classe.

73. Aus diesem allgemeinen Satze ergeben sich mehrere zierliche Constructionen. Wir wollen zuerst für die drei gegebenen Oerter drei

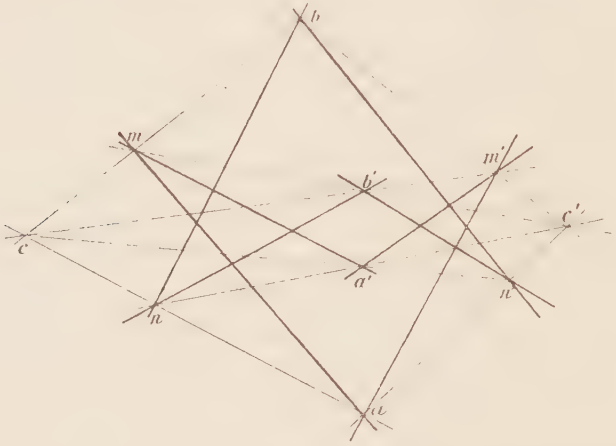

Fig. 38.

Systeme von zwei Punkten nehmen. Es mögen die Punkte a und a', b und b', c und c' (Fig. 38) durch die Gleichungen

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0$$

dargestellt werden. Zieht man alsdann:

cb und $c'b'$, die sich im Punkte m,
cb' „ $c'b$, „ „ „ „ m',
ca „ $c'a'$, „ „ „ „ n,
ca' „ $c'a$, „ „ „ „ n'

schneiden, so können wir die beiden Punktsysteme m und m', n und n' durch die beiden Gleichungen

$$A'' + \mu' A' = 0, \quad A'' + \mu A = 0$$

darstellen. Zieht man endlich am, am', $a'm$, $a'm'$, bn, bn', $b'n$ und $b'n'$, so berühren diese *acht* geraden Linien eine und dieselbe Curve zweiter Classe.

Aus diesem Satze lassen sich mehrere einfache, verschieden modificirte Constructionen folgender Aufgabe herleiten:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die fünf gegebene gerade Linien berührt.

Construction. Es seien am, am', $a'm$, $a'm'$ und bn die fünf gegebenen zu berührenden geraden Linien. Die erste und zweite dieser fünf Linien schneiden sich in a, die dritte und vierte in a', die erste und dritte in m, die zweite und vierte in m'. Auf der fünften geraden Linie nehme man beliebig die beiden Punkte b und n an. Man ziehe:

an und bm, die sich im Punkte c,
$a'n$ „ bm', „ „ „ „ c',
cm' „ $c'm$, „ „ „ „ b',
ca' „ $c'a$, „ „ „ „ n'

schneiden. Zieht man endlich bn', $b'n$ und $b'n'$, so berühren diese drei geraden Linien die verlangte Curve.

Aus derselben Figur ergiebt sich sogleich eine zweite Construction der vorstehenden Aufgabe, wenn man fünf andere gerade Linien als die gegebenen betrachtet.[*]) Es seien nemlich am, $a'm$, bn, $b'n$ und $a'm'$ gegeben. Die erste und zweite dieser fünf Linien schneiden sich in m, die dritte und vierte in n, die zweite und fünfte in a'. Man nehme einen Punkt c beliebig an, ziehe cm und ca'. Man nehme auf dieser letzten geraden Linie einen Punkt c' beliebig an und ziehe

$c'm$, wodurch auf $b'n$ der Punkt b',
cb', „ „ $a'm'$ „ „ m',
$c'm'$, „ „ cm „ „ b,
$c'a$, „ „ ca' „ „ n'

bestimmt wird. Zieht man endlich die drei geraden Linien bn', $b'n'$ und $a'm$, so berühren dieselben die zu bestimmende Curve.

74. Nach der 72. Nummer können wir auch eine Curve zweiter Classe beschreiben, die mit zweien gegebenen dieselben vier imaginären Tangenten hat und überdies eine gegebene gerade Linie berührt. Als besonderer Fall gehört hierher auch folgende Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die mit einer gegebenen vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten hat, die sich in zwei gegebenen (innerhalb der letztgenannten Curve liegenden) Punkten schneiden, und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Die Curve in der 39. Figur werde durch die Gleichung

$$A = 0,$$

die beiden Punktsysteme b und b', c und c' werden durch die beiden Gleichungen

$$A' = 0, \quad A'' = 0$$

dargestellt. Alsdann können wir die beiden Punktsysteme m und m', n und n' durch die beiden Gleichungen

$$A'' + \mu' A' = 0, \quad A'' + \mu A = 0$$

darstellen. Und hiernach erhalten wir *acht* gerade Linien, welche eine und dieselbe Curve berühren, nemlich die *vier* reellen geraden Linien bn, bn', $b'n$ und $b'n'$ und *vier*, im Falle der Figur, wo die beiden Punkte m und m' innerhalb der gegebenen Curve liegen, imaginäre gerade Linien: die vier imaginären von m und m' an die letztgenannte Curve zu legenden Tangenten. Hiernach ergiebt sich folgende Construction der vorstehenden Aufgabe, wenn m und m' die beiden gegebenen Punkte sind und bn die gegebene gerade Linie. Man nehme auf dieser Linie zwei Punkte b und n beliebig an, lege durch n zwei Tangenten an die gegebene Curve, ziehe bm, welche der einen Tangente in c, und bm', welche der andern Tangente in c' begegne. Durch c und c' lege man noch zwei Tangenten an die gegebene Curve, welche sich in n', und ziehe $c'm$ und cm', welche sich in b' schneiden. Alsdann erhält man drei neue Tangenten der verlangten Curve, wenn man bn', $b'n$ und $b'n'$ zieht.

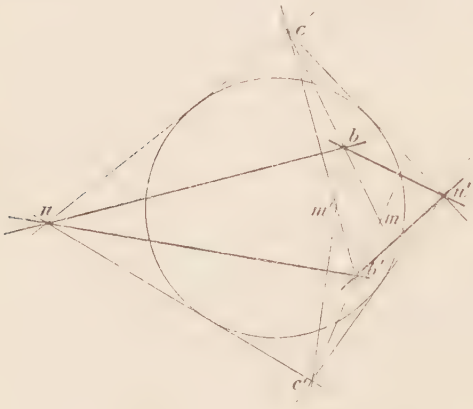

Fig. 39.

75. Wenn man annimmt, dass die beiden gegebenen Punkte m und m' *zusammenfallen*, so modificirt sich die vorstehende Construction. Man erhält alsdann eine Curve, die mit der gegebenen einen doppelten Contakt hat, der imaginär wird, wenn die zusammenfallenden Punkte innerhalb der gegebenen Curve angenommen werden. Werden dieselben auf dem Umfange der Curve angenommen, so erhält man folgende neue Construction einer Curve, die eine gegebene in einem gegebenen Punkte vierpunktig osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Es sei (Fig. 40) m der gegebene Osculationspunkt auf der gegebenen Curve, nb die gegebene gerade Linie. Von einem beliebigen Punkte derselben, von n, lege man zwei Tangenten an die Curve, die von einer beliebigen durch m gehenden geraden Linie, die der gegebenen in irgend einem Punkte b begegne, in den Punkten

c und c' geschnitten werden. Durch c und c' lege man noch zwei Tangenten an die gegebene Curve, die sich in irgend einem Punkte n' schneiden. Die gerade Linie bn' ist alsdann eine neue Tangente der verlangten Curve.

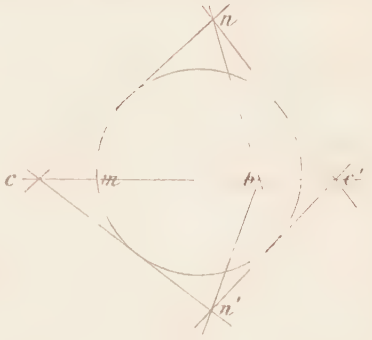

Fig. 40.

76. Die Aufgabe, einen Ort zweiter Classe zu beschreiben, der mit zwei gegebenen dieselben vier reellen oder imaginären gemeinschaftlichen Tangenten hat und eine gegebene gerade Linie berührt, hat immer eine einzige reelle Auflösung. Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie durch zwei Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curven geht, so ist der verlangte Ort kein andrer, als zwei Punkte dieser Linie oder diese Linie selbst, je nachdem jene beiden Tangentendurchschnitte reell oder imaginär sind, und es giebt also keine andern Tangenten des verlangten Ortes als die gegebene Linie selbst. Hiernach ergiebt sich folgende charakteristische Eigenschaft einer solche Linie.[4])

Wenn man von einem beliebigen Punkte einer derjenigen geraden Linien, welche zwei Durchschnitte der vier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier Curven zweiter Classe enthalten, zwei Tangenten an die eine Curve legt und von einem andern Punkte derselben geraden Linie zwei Tangenten an die andre Curve; und man legt endlich von zwei gegenüberliegenden Durchschnittspunkten dieser beiden Tangentenpaare noch zwei Tangenten an jede der beiden Curven, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in zwei neuen Punkten derselben geraden Linie.

Durch diesen ersten Aufsatz „über eine neue Art, Curven durch Gleichungen darzustellen", in welchem ich nicht über gewisse Grenzen hinausgehen wollte, ist der Weg zu allgemeineren Untersuchungen angezeigt.

12.

Aufgaben und Lehrsätze, erstere zu beweisen, letztere aufzulösen.

(Crelle's Journal, Band 6, S. 210—212. 1830 und Band 9, S. 411—412. 1832.)

1. Wenn nach allen, einer beliebigen geraden Linie parallelen Tangenten irgend einer gegebenen algebraischen Curve beliebige unter einander gleiche Kräfte wirken, so geht die Mittelkraft aus allen diesen Kräften beständig durch einen festen Punkt, wie sich die Richtung der parallelen Tangenten auch ändern mag.

Es giebt noch einige Sätze, die dem vorstehenden analog sind.

2. Wenn man auf einer geraden Linie QPQ', welche irgend eine gegebene stetig gekrümmte, in sich selbst geschlossene Linie berührt, in gleichen Abständen vom Berührungspunkte P zu beiden Seiten desselben zwei Punkte Q und Q' beliebig annimmt, und dann diese gerade Linie sich so bewegen lässt, dass sie fortwährend im Punkte P die gegebene Curve berührt, so beschreibt jeder der beiden Punkte Q und Q' eine in sich selbst zurückkehrende Curve. Der Flächeninhalt dieser beiden Curven ist derselbe. Der zwischen jeder dieser beiden Curven und der gegebenen Curve liegende Ring behält denselben Flächenraum, was für eine Curve die gegebene auch sein mag, und dieser Flächenraum ist dem Inhalte eines Kreises gleich, der PQ zum Radius hat.

3. Neue Constructionen des Appollonischen Problems der Tactionen.

(Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass die drei gegebenen Kreise ausser einander und so liegen, dass es einen Berührungskreis giebt, der die gegebenen Kreise alle drei umhüllt, und einen andern, der keinen derselben umhüllt; die beiden eben genannten Berührungskreise sind es, die wir construiren wollen.)

Man bestimme auf der Centrallinie des ersten und zweiten gegebenen Kreises die Mitten zwischen den beiden innern und den beiden

äussern Rändern dieser beiden Kreise, construire die Polaren dieser Mitten in Beziehung auf den ersten gegebenen Kreis und einen neuen Kreis, der diese beiden Polaren berührt und dessen Mittelpunkt auf der Centrallinie jener beiden gegebenen Kreise liegt. Man erhält einen zweiten ganz analogen Kreis, wenn man in der eben angezeigten Construction den dritten gegebenen Kreis an die Stelle des zweiten setzt. Die Pole der äusseren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Constructionskreise, genommen in Beziehung auf den ersten gegebenen Kreis, sind die Mittelpunkte der beiden gesuchten Kreise.

Dieselbe Construction behält ihre Anwendbarkeit, wenn an die Stelle von einem oder von zwei gegebenen Kreisen gerade Linien oder Punkte treten.

4. Wenn irgend eine algebraische Curve, und auf dem Umfange derselben irgend ein Punkt gegeben ist, und man beschreibt in diesem Punkte die Tangente und die Normale, legt ferner an die Curve 1) alle Tangenten, die dieser Normalen parallel sind, und nennt die Abstände jener Tangenten von der Normalen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_m$, 2) alle Tangenten, die der Tangente im gegebenen Punkte parallel sind, und nennt die Abstände von dieser Tangente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{m-1}$, und 3) alle Tangenten, die durch den gegebenen Punkt gehen (die Tangente in diesem Punkte selbst nicht mitgerechnet), und nennt die Winkel, welche diese Tangenten mit der Tangente im gegebenen Punkte bilden, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{m-2}$, so erhält man für den Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve in dem gegebenen Punkte folgenden Ausdruck:

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \ldots \cdot \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdot \ldots \cdot \xi_{m-1}} \cdot \operatorname{tang} \omega_1 \cdot \operatorname{tang} \omega_2 \cdot \operatorname{tang} \omega_3 \ldots \operatorname{tang} \omega_{m-2}.$$

5. In allen Hyperbeln, welche auf einer gemeinschaftlichen Asymptote in unendlicher Entfernung einen dreipunktigen Contakt haben, ist dasjenige Dreieck, welches durch eine beliebige Tangente von dem jedesmaligen Asymptotenwinkel abgeschnitten wird, von constantem Inhalte. Diesen Inhalt können wir das Maass der Krümmung der Hyperbel in unendlicher Entfernung nennen; je grösser derselbe ist, desto langsamer nähert sich die Hyperbel ihren Asymptoten.

Wenn irgend eine beliebige algebraische Curve und eine reelle Asymptote derselben gegeben sind, so giebt es unendlich viele Hyperbeln, welche mit der Curve auf der gegebenen Asymptote einen Contakt zweiter Ordnung und dieselbe Krümmung haben. Für das Maass dieser Krümmung erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\frac{m-1}{2} \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \ldots \cdot \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdot \ldots \cdot \xi_{m-2}} \cdot \operatorname{tang} \omega_1 \cdot \operatorname{tang} \omega_2 \ldots \operatorname{tang} \omega_{m-1},$$

wenn wir voraussetzen, dass die gegebene Curve nach einer beliebigen Richtung m parallele Tangenten hat, und 1) die Winkel, welche die durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Asymptote an die Curve gelegten Tangenten mit dieser Asymptote bilden, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-1}$ nennen, 2) die Abstände dieses beliebigen Punktes von denjenigen Tangenten, welche auf der Asymptote senkrecht stehen, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, und endlich 3) die Abstände derjenigen Tangenten, die der Asymptote parallel sind, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-2}$ bezeichnen.

6. Wenn irgend eine algebraische Curve einen parabolischen Zweig hat, so kann man für das Maass der Krümmung dieses parabolischen Zweiges in unendlicher Entfernung den Parameter einer osculirenden Parabel nehmen. Wenn man irgend einen Punkt beliebig annimmt und sich von diesem Punkt m Tangenten (reelle oder imaginäre) an eine solche legen lassen, so giebt es eine Richtung, nach welcher sich nur $m - 2$ parallele Tangenten an die Curve legen lassen. Wir wollen die Abstände dieser Tangenten von dem beliebig angenommenen Punkte durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-2}$ bezeichnen, ferner die Winkel, welche die durch diesen beliebig angenommenen Punkt gehenden Tangenten mit der Richtung jener Tangenten bilden, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ nennen, und endlich die Abstände derjenigen Tangenten, die auf dieser Richtung senkrecht stehen und deren es $(m - 1)$ giebt, $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$. Alsdann ist jener Krümmungsparameter gleich:

$$\frac{4}{m-1} \cdot \frac{\xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_{m-1}}{\eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_{m-2}} \cdot \operatorname{tang} \omega_1 \cdot \operatorname{tang} \omega_2 \ldots \operatorname{tang} \omega_m.$$

Neue Sätze über das umschriebene und das eingeschriebene Sechseck.

1. Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein um denselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so werden irgend zwei Seiten dieses Sechsecks von den vier übrigen in acht Punkten geschnitten. Diese acht Punkte lassen sich durch 12 neue gerade Linien mit einander verbinden. Diese 12 neuen geraden Linien schneiden sich in 42 neuen Punkten. Von diesen 42 Punkten liegen 6 nach einem allbekannten Satze auf der durch die Berührungspunkte auf jenen beiden Seiten gehenden geraden Linie; 12 liegen zu vier auf drei geraden Linien; 24 liegen paarweise auf solchen 12 geraden Linien, welche zu drei in den vier Berührungspunkten auf den vier übrigen Sechsecksseiten sich schneiden.[1])

2. Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein in denselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so lassen sich irgend zwei Winkelpunkte

dieses Sechsecks mit den vier übrigen durch 8 neue gerade Linien verbinden. Diese acht geraden Linien schneiden sich in 12 neuen Punkten. Diese 12 neuen Punkte lassen sich durch 42 neue gerade Linien mit einander verbinden. Von diesen 42 geraden Linien gehen 6 nach einem allbekannten Satze durch den Durchschnittspunkt der Tangenten in jenen beiden ersten Winkelpunkten des eingeschriebenen Sechsecks; 12 schneiden sich zu vier in drei Punkten; 24 schneiden sich paarweise in solchen 12 Punkten, welche zu drei auf den vier Tangenten in den vier übrigen Winkelpunkten des Sechsecks liegen.[1])

Die vorstehenden beiden Sätze sind durch das Princip der Reciprocität mit einander verknüpft.

I. Wenn irgend ein Kegelschnitt gegeben ist und man von irgend einem Punkte O aus nach beliebiger Richtung vier gerade Linien zieht, welche denselben in vier Punktepaaren A und A', B und B', C und C', D und D' schneiden, und dann endlich die vier Punkte A, B, C und D mit den vier übrigen A', B', C' und D' durch gerade Linien verbindet, so erhält man dreimal vier solche Durchschnittspunkte dieser geraden Linien, welche mit dem Punkte O in gerader Linie liegen. Diese zwölf Punkte können wir auf folgende Weise bezeichnen und zusammenstellen:

$$(AB', CD'),\ (BA', DC'),\ (AC', BD'),\ (CA', DB');$$
$$(AB', DC'),\ (BA', CD'),\ (AD', BC'),\ (DA', CB');$$
$$(AC', DB'),\ (CA', BD'),\ (AD', CB'),\ (DA', BC').$$

Wenn wir beliebig die beiden Durchschnittspunkte auf jeder der vier durch O gehenden geraden Linien mit einander vertauschen, so erhalten wir im Ganzen acht mal drei neue durch O gehende gerade Linien, von denen jede vier Durchschnittspunkte enthält.

II. Wenn irgend ein Kegelschnitt und eine gerade Linie gegeben sind, und man legt von irgend vier Punkten dieser geraden Linie vier Tangentenpaare a und a', b und b', c und c', d und d' an den Kegelschnitt, so kann man die Durchschnittspunkte der Tangenten a, b, c und d und der Tangenten a', b', c' und d' durch dreimal vier solche gerade Linien verbinden, welche in demselben Punkte der gegebenen geraden Linie sich schneiden. Man kann auch hier die durch denselben Punkt der gegebenen geraden Linie gelegten beiden Tangenten beliebig mit einander vertauschen.

13.

Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes.

(Crelle's Journal, Band 9, S. 124—134. 1831.)

1. Soit

$$tz + uy + vx + w = 0$$

l'équation générale du plan rapporté à trois axes coordonnés quelconques. En donnant aux coëfficients t, u, v et w des valeurs convenables t', u', v' et w', l'on pourra déterminer de position un plan donné quelconque. Je nommerai *coordonnées de ce plan* (coordonnées planaires) les quatre quantités t', u', v' et w'. Le nombre de ces coordonnées peut se réduire à trois, si l'on pose l'une d'elles, choisie arbitrairement, égale à l'unité. En posant $w = 1$, les trois coordonnées d'un plan donné seront les valeurs réciproques et prises avec le signe contraire des segments déterminés par ce plan sur les trois axes coordonnés. Dans ce qui va suivre nous poserons de préférence $t = 1$; alors l'interprétation géométrique des trois coordonnées restantes n'en deviendra pas moins simple que dans le cas précédent. Dans la discussion générale des surfaces algébriques il y aura de l'avantage à employer toutes les quatre coordonnées ensemble. L'on obtiendra alors, à la place d'équations complètes entre trois variables, des équations homogènes entre quatre variables. L'on peut du reste passer immédiatement de ces dernières équations-ci aux premières et *vice versa*.

2. En regardant w, v et u comme coordonnées variables, l'équation

$$\varphi(w, v, u) = 0$$

peut être dit représenter *une surface*. Cette surface est celle qui est touchée par tous les plans dont les coordonnées satisfont à l'équation proposée. Le système de deux équations pareilles existant ensemble représentera alors la surface développable qui enveloppe à la fois les deux surfaces, représentées par ces deux équations prises séparément.

L'équation générale du premier degré entre les trois variables

w, v et u représente un point de l'espace*), et le système de deux équations pareilles, existant simultanément, une ligne droite passant par deux tels points.

L'équation générale du second degré représente les surfaces de la seconde classe (je me sers ici de la dénomination introduite par M. Gergonne) qui sont aussi du second ordre, et comme cas particuliers, des systèmes de deux points, qui peuvent devenir imaginaires, ou coincider ou passer à l'infini. Dans le cas de deux points réels, on peut leur substituer la ligne droite joignant ces deux points et terminée en eux, et puis regarder cette ligne droite comme la limite d'un ellipsoide, par exemple, dont deux axes, le troisième restant le même, diminuent sans cesse. C'est seulement se servir d'un autre mot pour exprimer la même chose.

Je n'entrerai ici dans aucun détail comme je l'ai fait dans la première partie du second volume de mes „*Développements*“ par rapport aux constructions à deux dimensions. Il est évident qu'en introduisant les coordonnées nouvelles l'on redoublera par là même les moyens de démonstration. L'on verra aisément que, quant à la facilité des démonstrations, l'avantage sera tantôt du côté des coordonnées vulgaires, tantôt et plus souvent peut-être, du côté des coordonnées planaires.

3. Dans la note qu'on va lire, je me suis proposé de faire ressortir la liaison qui existe entre les deux systèmes de coordonnées planaires et vulgaires. Pour mon but actuel, au lieu de suivre une marche directe, j'ai préféré de déduire ainsi la nouvelle théorie des surfaces de

*) Pour le démontrer soit

(1) $$z + uy + vx + w = 0$$

l'équation générale du plan, u, v et w indiquant trois coefficients indéterminés. Posons l'équation de condition suivante:

(2) $$c + c'u + c''v + w = 0,$$

en désignant par c, c' et c'' trois quantités données. L'on a également

$$z' + y'u + x'v + w = 0,$$

(z', y', x') étant un point quelconque du plan (1). Mais cette équation ayant absolument la même forme que l'équation (2), l'on en conclura qu'on pourra prendre

$$z = c, \quad y = c', \quad x = c''.$$

Donc par l'équation (2) le plan (1) est assujetti à la condition de passer par un point donné, dont les coordonnées sont c, c' et c''. C'est précisément ce point que représente l'équation (2), lorsqu'on y regarde w, v et u comme coordonnées planaires et variables.

celle qui repose sur la considération des coordonnées des points et qui, par les géomètres modernes, a reçu de si beaux développements.

Soit

$$F(z, y, x) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface donnée quelconque. L'équation du plan tangent en l'un de ses points sera alors

$$Z - z = q(Y - y) + p(X - x),$$

ou

$$Z - qY - pX - (z - qy - px) = 0,$$

en posant $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, et en regardant Z, Y et X comme coordonnées courantes. Les coordonnées de ce plan tangent seront d'après le premier numéro:

$$v = -p, \quad u = -q, \quad w = -(z - qy - px), \tag{2}$$

et de là on tire:

$$z + uy + vx + w = 0, \tag{3}$$

équation symétrique par rapport à z, y, x et w, u, v.

Si l'on différentie l'équation (3) par rapport à x seul, en regardant y comme constant, il viendra:

$$p + \frac{\partial u}{\partial x} y + \frac{\partial v}{\partial x} x + v + \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

ou bien en réduisant:

$$\frac{\partial u}{\partial x} y + \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Si l'on regarde w comme fonction de v et u, l'on pourra donner à cette équation la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(y + \frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial v}{\partial x}\left(x + \frac{\partial w}{\partial v}\right) = 0.$$

Cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparément:

$$\begin{cases} y + \frac{\partial w}{\partial u} = 0, & x + \frac{\partial w}{\partial v} = 0, \text{ ou bien} \\ y = -Q, & x = -P, \end{cases} \tag{4}$$

si, pour abréger, l'on désigne par Q et P les coefficients différentiels partiels $\frac{\partial w}{\partial u}$ et $\frac{\partial w}{\partial v}$. En substituant ces valeurs de y et x dans l'équation (3), l'on obtiendra:

$$z = -(w - Qu - Pv). \tag{5}$$

4. Si l'on met dans l'équation du point de contact (z, y, x):

$$W + xV + yU + z = 0,$$

(je désigne par W, V et U les coordonnées planaires courantes) à la place de x, y et z les valeurs que nous venons d'obtenir, on trouvera:

$$W - w = Q(U - u) + P(V - v). \tag{6}$$

Les coefficients Q et P se tirent de l'équation

$$\varphi(w, v, u) = 0,$$

que nous supposons obtenue par l'élimination de z, y et x entre les quatre équations (1) et (2) et qui par conséquent représentera, ainsi que (1), la surface donnée.

Nous aurions pu, en suivant une marche inverse, partir de l'équation (6), qui s'obtient immédiatement, si l'on développe la théorie des surfaces dans le système des coordonnées planaires.

L'on voit que les relations entre les coordonnées z, y, x et w, u, v sont parfaitement réciproques.

5. Dans ce numéro nous nous proposons de développer les relations qui existent entre les coefficients différentiels seconds de z par rapport à y et x et ceux de w par rapport à u et v. Nous poserons d'abord pour abréger

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = R, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = S, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = T.$$

Si l'on différentie les deux équations:

$$u = -q, \quad v = -p$$

successivement par rapport à y seul, en regardant x comme constant, et par rapport à x seul, en regardant y comme constant, l'on obtiendra:

$$t = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad s = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad r = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si l'on différentie, sous le même point de vue, l'équation:

$$y + Q = 0,$$

l'on trouvera, en regardant Q comme fonction de u et v:

$$1 + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

ou ce qui revient au même:

$$1 - Tt - Ss = 0, \tag{1}$$

$$Ts + Sr = 0. \tag{2}$$

En opérant de la même manière sur l'équation suivante:

$$x + P = 0,$$

l'on parviendra aux deux équations suivantes:

$$1 - Rr - Ss = 0, \tag{3}$$

$$Rs + St = 0. \tag{4}$$

Il est évident que l'une quelconque des quatre équations (1) — (4) est comportée par les trois autres, car les équations (1) et (3) et les équations (2) et (4) s'accordent à donner

$$Tt = Rr. \tag{5}$$

D'après cela l'on obtient aisément:

$$\begin{cases} S = \dfrac{-s}{rt - s^2}, & s = \dfrac{-S}{RT - S^2}, \\ R = \dfrac{t}{rt - s^2}, & r = \dfrac{T}{RT - S^2}, \\ T = \dfrac{r}{rt - s^2}, & t = \dfrac{R}{RT - S^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Il sera bon de remarquer aussi l'équation suivante:

$$(rt - s^2)(RT - S^2) = 1. \tag{7}$$

6. En différentiant de nouveau les équations (1) — (4) successivement par rapport à y et x, en regardant R, S et T comme fonctions de u et v, et u et v comme fonctions de y et x, l'on obtiendra des équations qui serviront à déterminer les quatre coefficients différentiels partiels du troisième ordre de w par rapport à u et v, au moyen des coefficients différentiels du troisième et du second ordre de z par rapport à y et x. En suivant la même marche, l'on pourra continuer ainsi à volonté. Un simple changement de lettres suffira alors, pour exprimer réciproquement tout coefficient différentiel partiel d'un ordre quelconque de z par rapport à y et x en fonction des coefficients différentiels partiels du même ordre et des ordres inférieurs, inclusivement le second, de w par rapport à u et v.

Dans ce qui suivra j'éclaircirai par quelques exemples l'application de ce qui précède.

7. *Théorie analytique nouvelle des surfaces développables et des courbes à double courboure.* Soient

$$\begin{cases} F(w, v, u) = 0, \\ f(w, v, u) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

les équations entre les coordonnées nouvelles de deux surfaces données quelconques. Si l'on choisit les trois coordonnées w, v et u telles qu'elles satisfont en même temps aux deux équations proposées, on aura les coordonnées d'un plan qui touche à la fois les deux surfaces données. Tous les plans ainsi déterminés envelopperont une surface

développable et circonscrite à ces mêmes surfaces. L'on peut donc dire que le système de deux équations (1) *représente une surface développable.* Il en résulte que le plan qui, dans son mouvement, enveloppe une telle surface, ne peut passer d'une position quelconque à une autre que dans un sens unique et déterminé; et c'est en cela évidemment que consiste le caractère des surfaces développables.

Si l'on élimine v entre les deux équations (1), il viendra:

$$u = \varphi(v),$$

ou bien, si l'on y met pour u et v leurs valeurs $(-q)$ et $(-p)$:

$$q = \psi(p).$$

Si de cette équation enfin on fait disparaître, par la différentiation, la fonction inconnue, désignée par ψ, il viendra

$$s^2 - rt = 0. \tag{2}$$

C'est l'équation des surfaces développables donnée pour la première fois par Euler. Je ne crois pas qu'il y ait une marche plus directe d'y parvenir que la précédente.

8. Soient, en second lieu,

$$\begin{cases} F(z, y, x) = 0, \\ f(z, y, x) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

les équations, entre les coordonnées vulgaires, de deux surfaces données quelconques. Le système de ces équations représente l'intersection des deux surfaces, qui est en général une courbe à double courbure. En éliminant z entre les deux équations proposées, il viendra

$$y = \varphi(x)$$

ou bien, en substituant,

$$Q = \psi(P),$$

et de là on tire:

$$S^2 - RT = 0. \tag{4}$$

C'est l'équation des courbes à double courbure, dans le système des coordonnées planaires.

Analytiquement parlant, une surface développable ne doit être regardée comme une surface que dans le système des coordonnées vulgaires, et non pas dans le système des coordonnées nouvelles, parceque dans ce dernier système-ci une telle surface ne peut être représentée qu'au moyen de deux équations simultanées. Pareillement une courbe à double courbure ne doit nullement être rangée parmi les surfaces dans le système des coordonnées vulgaires, parceque deux équations simultanées y sont exigées pour la représenter.

Mais dans le système des coordonnées planaires une courbe à double courbure doit être placée parmi les surfaces: elle y est représentée par une équation unique. Et réciproquement toute équation entre w, v et u qui satisfait à l'équation (4), représentera une telle surface.

L'on peut encore remarquer le parallélisme suivant entre une surface développable et une courbe à double courbure. L'une est touchée par un plan tangent quelconque, non dans un point unique, mais suivant une ligne droite indéfinie. L'autre, dans l'un quelconque de ses points, est touchée par une infinité de plans qui se coupent tous suivant une même ligne droite, touchant la courbe. L'une peut être *engendrée* par une ligne droite en mouvement, l'autre est *enveloppée* par une ligne droite qui se meut dans l'espace.

9. *Théorie du contact et de l'osculation.* Si deux surfaces se touchent en un point donné, l'on a, en rapportant les lettres non accentuées à l'une et les lettres accentuées à l'autre surface,

$$q = q', \quad p = p', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

En introduisant les coordonnées planaires relatives au plan qui touche les deux surfaces dans le point donné, l'on obtiendra d'abord des quatre premières équations:

$$u = u', \quad v = v', \quad P = P', \quad Q = Q',$$

et de là et de l'équation $z = z'$ on tire d'après le numéro 3:

$$w = w'.$$

Si les deux surfaces ont dans le point donné un contact du second ordre, l'on a, comme on sait, les trois équations nouvelles:

$$r = r', \; s = s', \quad t = t',$$

et de là on tire d'après les équations (6) du numéro 5:

$$R = R', \quad S = S', \quad T = T'.$$

L'on pourrait continuer ainsi à volonté. La théorie du contact de deux surfaces en un point donné ou sur un plan donné est donc exactement la même, dans les deux systèmes de coordonnées différentes.

10. *Courbure des surfaces.* L'on sait que pour déterminer les deux rayons de courbure d'une surface donnée en un point donné, l'on a, dans la supposition de coordonnées rectangulaires, l'équation suivante:

$$(rt - s^2)\delta^2 + [(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r](1 + p^2 + q^2)^{1/2}\delta + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

équation qui se transforme aussitôt en

$$(1)\qquad \delta^2 + [(1+v^2)R - 2uvS + (1+u^2)T](1+v^2+u^2)^{1/2}\delta + (1+v^2+u^2)^2(RT-S^2) = 0.$$

Si l'on prend un plan quelconque, parallèle au plan qui touche la surface dans le point donné, pour celui des xy, l'on aura $u = 0$, $v = 0$; donc

$$(2)\qquad \delta^2 + (R+T)\delta + (RT - S^2) = 0.$$

En désignant enfin par δ' et δ'' les deux racines de cette équation, il viendra

$$\delta' + \delta'' = -(R+T), \quad \delta'\delta'' = RT - S^2.$$

L'on sait que $\left(-\frac{1}{r}\right)$ et $\left(-\frac{1}{t}\right)$ expriment les rayons de courbure des deux sections faites dans la surface proposée par les plans des xz et yz, l'angle formé par l'axe des x et celui des y étant quelconque et l'axe des z perpendiculaire au plan des xy. Pareillement $(-R)$ et $(-T)$ expriment les rayons de courbure des courbes d'intersection de deux cylindres circonscrits à la surface donnée et dont les arêtes sont parallèles à l'axe des y et des x, respectivement avec les plans des xz et yz; ou, ce qui revient au même, les rayons de courbure de ces deux mêmes cylindres, divisés par le sinus de l'angle formé par l'axe des y et celui des x. Dans ce qui précède, toutes les courbures sont supposées prises au point donné, appartenant à la fois à la surface proposée, aux deux cylindres circonscrits et aux différentes courbes d'intersection.

Après cela l'une des deux dernières équations fournit le théorème suivant:

La somme des deux rayons de courbure de deux cylindres circonscrits à une surface donnée quelconque, de manière que leurs arêtes soient parallèles à deux tangentes quelconques, mais perpendiculaires entre elles, d'une surface donnée dans un point donné, est constante et égale à la somme des deux rayons de courbure de la surface en ce point.

11. Dans le cas que la surface proprement dite soit remplacée par une courbe à double courbure, l'on a

$$RT - S^2 = 0.$$

L'un des deux rayons de courbure disparaissant alors, le degré des équations (1) et (2) s'abaisse et l'on obtient:

$$(3)\qquad \delta = -[1+v^2)R - 2uvS + (1+u^2)T](1+u^2+v^2)^{1/2},$$

et

$$(4)\qquad \delta = -(R+T).$$

L'un des deux rayons de courbure d'une courbe (considérée comme surface) est nul par conséquent, comme on devait s'y attendre; l'autre est généralement donné par l'équation (3). C'est ce dernier rayon qui est pris dans le plan osculateur de la courbe.

Tout plan contenant une tangente de la courbe doit être censé la toucher. Après cela l'interprétation géométrique de la dernière équation fait voir que la somme des deux rayons de courbure de deux cylindres quelconques dont les arêtes sont perpendiculaires entre elles et à la tangente de la courbe en un point donné, est constante et égale au rayon de courbure de la courbe en ce point. Ce même résultat, cas particulier du théorème précédent, peut s'exprimer aussi de la manière suivante:

Le rayon de courbure d'une courbe donnée quelconque en un point donné est égal à la somme des deux rayons de courbure correspondants des deux projections planes de la courbe sur deux plans quelconques, perpendiculaires entre eux et parallèles à la tangente de la courbe proposée dans le point donné.

12. Nous aurions aussi pu déduire les résultats précédents de l'une des équations (6) du numéro 5, de celle-ci par exemple:

$$t = \frac{R}{RT - S^2}, \tag{5}$$

comme nous allons en déduire quelques autres résultats. Si l'on écrit cette équation de la manière suivante:

$$RT - S^2 = \delta'\,\delta'' = R \cdot \frac{1}{t}, \tag{6}$$

l'on obtiendra, en l'interprétant, cet autre théorème:

Si par un point donné et suivant une tangente quelconque l'on fait dans une surface donnée une section normale et si à la même surface on circonscrit un cylindre dont les arêtes sont parallèles à la même tangente, le produit des rayons de courbure, dans le point donné, de la courbe dans le plan d'intersection et de ce cylindre, sera constant et égal au produit des deux rayons de courbure de la surface proposée en ce même point.

Euler a démontré le premier qu'en nommant ω l'angle que forme l'axe des y avec celle des deux sections principales à laquelle répond le rayon δ', l'on a*):

$$-t = \left(\frac{1}{\delta'}\right)\cos^2\omega + \left(\frac{1}{\delta''}\right)\sin^2\omega,$$

et de là on tire d'après l'équation (6):

$$-R = \delta''\cos^2\omega + \delta'\sin^2\omega.$$

*) Dupin, Développements de géométrie, p. 109.

Cette équation donne la courbure d'un cylindre circonscrit quelconque au moyen de la direction de ses arêtes et des courbures de la surface proposée dans le point correspondant.

13. Si $S = 0$, on aura également, d'après le numéro 5, $s = 0$. L'équation (5) se réduit alors à

$$T = \frac{1}{t}. \tag{7}$$

Si l'on s'exprime comme l'a fait Mr. Dupin, l'on aura donc ce nouveau théorème:

Si à une surface donnée quelconque l'on circonscrit un cylindre dont les arêtes sont parallèles à l'une de deux tangentes conjuguées quelconques dans un point donné, ce cylindre aura, avec la surface proposée, un contact du second ordre suivant l'autre tangente conjuguée.

L'on sait que le produit des deux rayons de courbure de deux sections normales faites dans une surface donnée suivant deux tangentes conjuguées quelconques et du carré du sinus de l'angle formé par ces tangentes est égale à une quantité constante et que la somme de ces mêmes rayons l'est également.*) De là résultent, d'après l'équation (7), ces deux autres théorèmes:

Le produit des deux rayons de courbure de deux cylindres circonscrits à une surface donnée quelconque et dont les arêtes sont parallèles à deux tangentes conjuguées est égal à une même quantité constante. La somme de ces mêmes rayons divisée par le sinus de l'angle des tangentes conjuguées est également constante.

14. Pour ne pas étendre trop loin la présente note, je me bornerai, pour dernier exemple, à énoncer simplement que, dans le système de coordonnées planaires, des formules intégrales nouvelles se présentent, tant pour la quadrature des surfaces que pour la cubature des corps terminés par elles, ces surfaces et ces corps étant limités d'une autre manière que dans la méthode ordinaire.

15. Je pense que les exemples que j'ai pris au hazard et auxquels en eux mêmes je n'attache aucune importance, suffiront pour faire sentir la possibilité, je dis plus, la nécessité de parvenir, en poursuivant la même marche, à une foule de résultats nouveaux. L'on n'a qu'à parcourir les ouvrages de MM. Monge, Dupin, Hachette et d'autres géomètres qui se sont occupés de la théorie analytique des surfaces, pour en recueillir les matériaux pour un livre nouveau sur une matière qui semblait usée, mais qui, en se présentant sous une autre face, est bien loin de l'être.

*) Dupin, Développements de géométrie. p. 102.

16. Je terminerai par une dernière remarque purement analytique. Soit

$$f(q, p, z, y, x) = 0 \tag{1}$$

une équation donnée entre z, y, x et les deux coefficients différentiels partiels de z par rapport à y et x, et supposons qu'on en ait obtenu comme intégrale l'équation suivante

$$F(z, y, x) = 0. \tag{2}$$

L'équation différentielle proposée peut se transformer dans la suivante:

$$f(-u, -v, -(w - Qu - Pv), -Q, -P) = 0, \tag{3}$$

dont on aura également l'intégrale en éliminant z, y et x entre l'équation (2) et les trois équations suivantes:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -u, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -v, \quad w + uy + vx + z = 0.$$

Si l'équation (3) se réduit à

$$f(-(w - Qu - Pv), -Q, -P) = 0, \tag{4}$$

l'on aura, à la place de l'équation (2), celle-ci:

$$f(z, y, x) = 0,$$

et de là on déduira une intégrale, qui ne sera qu'une solution particulière de l'équation (4).

En passant aux coefficients différentiels seconds, l'on verra qu'une équation quelconque:

$$\varphi(t, s, r, q, p, z, y, x) = 0$$

est intimement liée avec l'autre:

$$\varphi\Big(\frac{R}{RT - S^2}, \quad \frac{-S}{RT - S^2}, \quad \frac{T}{RT - S^2},$$

$$-u, \ -v, \ -(w - Qu - Pv), \ -Q, \ -P\Big) = 0,$$

de manière que, l'intégrale de l'une d'elles étant obtenue, l'autre s'intégrera par une simple élimination. Les deux équations suivantes:

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0,$$
$$(1 + x^2)r + 2xys + (1 + y^2)t = 0,$$

dans la dernière desquelles j'ai changé seulement les variables, en fournissent un exemple; l'une étant intégrable, l'autre l'est également.

Je m'abstiens ici de toute sorte de développements, parcequ'il y a une manière plus générale de traiter la même question. J'avais seulement en vue de faire ressortir que, quant à la possibilité d'en obtenir les intégrales, les équations aux différences partielles se groupent par couples, ainsi que cela a lieu quant aux théorèmes de géométrie.

14.

Analytisch-geometrische Aphorismen I.

(Crelle's Journal, Band 10, S. 217—226. 1831.)

Einige Beispiele von der Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten.

1. Ich habe schon bei mehreren Gelegenheiten hervorgehoben, wie solche Sätze über gerade Linien, welche von Grössenbestimmungen unabhängig sind, sich durch die Anwendung blosser Symbole, die an die Stelle linearer Gleichungen treten, und unbestimmter Coefficienten beweisen lassen. Beweise dieser Art scheinen mir besonders zierlich. So wie ein hierher gehöriger Satz vorliegt, können wir die Voraussetzungen desselben durch Symbole und unbestimmte Coefficienten ausdrücken, und dann ist der Weg für den Beweis desselben sogleich angezeigt. Man kann sagen, dass ein solcher Beweis ein so rein synthetischer ist, wie man sonst derselben nicht leicht findet. Es war ursprünglich meine Absicht, eine dritte Abtheilung des zu Anfang dieses Jahres erschienenen zweiten und letzten Bandes meiner *„Analytisch-geometrischen Entwickelungen"* diesem Gegenstande und namentlich der Verallgemeinerung desselben zu widmen. Ich will hier durch ein paar Beispiele den Charakter dieser Art von Beweisführungen noch in ein helleres Licht zu stellen suchen.

2. Der folgende Satz ist allgemein bekannt und gehört zu den wichtigeren der Situationsgeometrie.

Wenn drei in demselben Punkte (O) sich schneidende gerade Linien gegeben sind, und man legt von irgend einem Punkte (M) der dritten Linie zwei neue gerade Linien (MAA′, MBB′), von welchen die erste gegebene in zwei Punkten (A und B), und die zweite in zwei andern Punkten (A′ und B′) geschnitten wird, so liegt der Durchschnitt von A′B und AB′, wo auch der Punkt M auf der dritten gegebenen geraden Linie fortrücken mag, und wie auch die beiden durch diesen Punkt

gelegten geraden Linien ihre Richtung verändern mögen, auf einer festen vierten geraden Linie, die ebenfalls durch den Punkt O geht.

Indem wir Ausdrücke von der Form $(Ay + Bx + C)$ durch die Symbole c und c' bezeichnen, können wir die drei gegebenen, in demselben Punkte sich schneidenden geraden Linien durch folgende Gleichungen darstellen:

$$c = 0, \quad c' = 0, \quad c + c' = 0.$$

Wenn bei ähnlicher Bezeichnung die beiden neuen durch M, einen Punkt der geraden Linie: $c + c' = 0$, gehenden geraden Linien durch

$$a = 0, \quad b = 0$$

dargestellt werden, so können wir, um die Bedingung des Satzes auszudrücken,

$$a + b = c + c'$$

setzen. Aus dieser identischen Gleichung ergeben sich folgende beiden:

$$a - c' = c - b,$$
$$a - c = c' - b.$$

Die beiden Gleichungen:

$$a - c' = c - b = 0,$$
$$a - c = c' - b = 0$$

stellen folglich die geraden Linien $A'B$ und AB' dar. Denn die erste dieser Gleichungen zum Beispiel stellt eine solche gerade Linie dar, die einerseits durch den Durchschnitt von $a = 0$ und $c' = 0$, oder den Punkt A', und andrerseits durch den Durchschnitt von $b = 0$ und $c = 0$, oder den Punkt B geht.

Wenn wir die beiden letzten Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$c - c' = 0,$$

die Gleichung einer neuen geraden Linie, die, was diese Gleichung zeigt, durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt der drei gegebenen geht. Aus dieser Gleichung sind die Symbole a und b ganz verschwunden, und somit ist der vorliegende Satz bewiesen.

Wir haben in dem Vorstehenden keiner unbestimmten Coefficienten bedurft, weil wir Ausdrücke von der Form $(Ay + Bx + C)$ durch Symbole bezeichnet haben. Ein solches Symbol enthält *implicite* schon einen unbestimmten Coefficienten, weil solche Ausdrücke einen Coefficienten mehr enthalten, als Coefficienten zur Bestimmung einer gegebenen geraden Linie nothwendig sind.

3. *Es seien in derselben Ebene sechs Punkte gegeben, von welchen drei auf einer und die drei übrigen auf einer andern geraden Linie*

liegen. Man kann die drei Punkte der einen geraden Linie mit den drei Punkten der andern durch neun neue gerade Linien verbinden. Diese neun geraden Linien schneiden sich paarweise genommen in achtzehn neuen Punkten. Diese achtzehn Punkte liegen zu drei auf sechs geraden Linien vertheilt. Diese sechs geraden Linien gehen zu drei durch dieselben beiden Punkte.

Wir wollen den Beweis ganz direkt angreifen und schrittweise vorwärtsgehen; also zuerst die Gleichungen derjenigen neun geraden Linien entwickeln, welche die drei Punkte (I, II, III) auf der ersten gegebenen geraden Linie (G) mit den drei Punkten (1, 2, 3) auf der zweiten geraden Linie (H) verbinden. Diese neun geraden Linien wollen wir durch

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{I},\ 1), & (\mathrm{I},\ 2), & (\mathrm{I},\ 3), \\ (\mathrm{II},\ 1), & (\mathrm{II},\ 2), & (\mathrm{II},\ 3), \\ (\mathrm{III},\ 1), & (\mathrm{III},\ 2), & (\mathrm{III},\ 3) \end{array}$$

bezeichnen. Wir erhalten die Gleichungen aller dieser geraden Linien mit Hilfe dreier Symbole und vier unbestimmter Coefficienten. Zu diesem Ende seien die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien (G) und (H):

$$g = 0, \quad h = 0,$$

und die Gleichung einer von jenen neun geraden Linien, für die wir (I, 2) nehmen wollen, sei

$$(\mathrm{I},\ 2) \quad a = 0.$$

Durch diese drei geraden Linien sind die beiden Punkte (I) und (2) bestimmt. Für (I, 3) erhalten wir alsdann eine Gleichung von folgender Form:

$$(\mathrm{I},\ 3) \quad a + \mu g = 0.$$

Durch den Coefficienten μ ist diese gerade Linie, und also auch ihr Durchschnitt mit (H), der Punkt (3), bestimmt. Durch den Punkt (3) geht die gerade Linie (II, 3); durch Einführung eines neuen unbestimmten Coefficienten erhält man für ihre Gleichung:

$$(\mathrm{II},\ 3) \quad a + \mu g + \nu h = 0.$$

Durch diese gerade Linie ist der Punkt (II) bestimmt.

Ganz auf dieselbe Weise erhält man für (III, 2):

$$(\mathrm{III},\ 2) \quad a + \varrho h = 0,$$

und hiernach für (III, 1)

$$(\mathrm{III},\ 1) \quad a + \sigma g + \varrho h = 0.$$

Wir sind also ursprünglich von den beiden geraden Linien (G) und (H) und von (I, 2) ausgegangen. Hierdurch sind die beiden

Punkte (I) und (2) gegeben. Durch (I) legen wir die gerade Linie (I, 3), wodurch auf (H) der Punkt (3) bestimmt wird. Durch (3) legen wir (II, 3), wodurch auf (G) der Punkt (II) bestimmt wird. Durch (2) legen wir (III, 2), wodurch auf (G) der Punkt (III), und durch (III) legen wir (III, 1), wodurch auf (H) der Punkt (1) bestimmt wird. Um die Gleichung einer geraden Linie zu erhalten, deren Richtung nicht näher bestimmt ist, die aber durch den Durchschnitt zweier bekannter gerader Linien geht, bedarf man bloss eines neuen unbestimmten Coefficienten. Die sechs Punkte (I), (II), (III) und (1), (2), (3) sind also durch die drei Symbole a, g, h und durch vier Coefficienten μ, ν, ϱ und σ gegeben. Den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes gemäss bedeuten a, g, h *beliebige* lineare Ausdrücke in y und x, und μ, ν, ϱ und σ bleiben ganz unbestimmt. Wenn wir nun aber die eben genannten sechs Punkte noch durch neue gerade Linien verbinden, so müssen sich diese nothwendig durch solche Gleichungen ausdrücken lassen, welche bloss dieselben drei Symbole und dieselben vier unbestimmten Coefficienten enthalten. Ja noch mehr, wenn wir die Durchschnittspunkte der verschiedenen Verbindungslinien, paarweise genommen, durch neue gerade Linien verbinden, dann wieder neue gerade Linien durch neue Paare von Durchschnittspunkten legen und auf diese Weise beliebig fortfahren, so erhalten wir für jede solche gerade Linie eine Gleichung von folgender Form:

$$Ma + Ng + Ph = 0,$$

in der M, N und P bestimmte Funktionen der vier unbestimmten Coefficienten μ, ν, ϱ und σ sind.

Für die noch nicht bestimmten vier Verbindungslinien erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{(II, 1)} \quad a + \sigma g + \nu h = 0,\\
&\text{(I, 1)} \quad\quad a + \sigma g = 0,\\
&\text{(II, 2)} \quad\quad a + \nu h = 0,\\
&\text{(III, 3)} \quad a + \mu g + \varrho h = 0.
\end{aligned}$$

Bei einiger Uebung können wir die vorstehenden Gleichungen, indem wir die früheren Gleichungen gehörig zusammenstellen, unmittelbar hinschreiben. Die erste derselben stellt diejenige gerade Linie dar, die einerseits durch den Durchschnitt von (II, 3) und (G) geht, deren Gleichungen

$$a + \mu g + \nu h = 0, \quad g = 0,$$

und andrerseits durch den Durchschnitt von (III, 1) und (H), deren Gleichungen:

$$a + \sigma g + \varrho h = 0, \quad h = 0$$

sind. Einerseits hat also die gesuchte Gleichung folgende Form:

$$a + \mu g + \nu h + pg = 0,$$

wobei p irgend einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet, oder einfacher, indem wir μ mit dem unbestimmten Coefficienten zusammenfassen, folgende:

$$a + pg + \nu h = 0,$$

und andrerseits hat dieselbe Gleichung folgende Form:

$$a + \sigma g + qh = 0,$$

wobei q einen neuen unbestimmten Coefficienten bedeutet. Wenn die letzten Gleichungen identisch werden sollen, so muss, bei der Unabhängigkeit der Symbole a, g und h von einander, $p = \sigma$ und $q = \nu$ genommen werden, und es kommt:

$$a + \sigma g + \nu h = 0.$$

Auf ganz gleiche Weise ergeben sich die drei übrigen Gleichungen.

Drei Punkte, die nach dem ersten Theile des vorstehenden Satzes in gerader Linie liegen, sind die Durchschnitte folgender drei Linienpaare:

$$\text{A.} \quad \begin{cases} \text{(I, 2)} & a = 0, & \text{(II, 1)} & a + \sigma g + \nu h = 0; \\ \text{(II, 3)} & a + \mu g + \nu h = 0, & \text{(III, 2)} & a + \varrho h = 0; \\ \text{(III, 1)} & a + \sigma g + \varrho h = 0, & \text{(I, 3)} & a + \mu g = 0. \end{cases}$$

Um dies zu beweisen, wollen wir die Gleichungen derjenigen geraden Linien entwickeln, welche durch den ersten und zweiten und durch den ersten und dritten Durchschnittspunkt gehen. Weil diese zwei geraden Linien beide den ersten Durchschnittspunkt enthalten, so haben ihre Gleichungen folgende Form:

$$(1) \qquad pa + \sigma g + \nu h = 0,$$

und der unbestimmte Coefficient p wird einmal durch die identische Gleichung

$$pa + \sigma g + \nu h = r(a + \mu g + \nu h) + s(a + \varrho h),$$

und das andere Mal durch

$$pa + \sigma g + \nu h = q(a + \sigma g + \varrho h) + t(a + \mu g)$$

bestimmt. r, s, q und t bezeichnen neue unbestimmte Coefficienten. Zu ihrer Bestimmung erhalten wir einmal folgende Gleichungen:

$$(2) \qquad p = r + s, \quad \sigma = r\mu, \quad \nu = r\nu + s\varrho,$$

und das andere Mal:

$$(3) \qquad p = q + t, \quad \sigma = q\sigma + t\mu, \quad \nu = q\varrho.$$

Wir erhalten aus den Gleichungen (2) und den Gleichungen (3) für p denselben Werth, nämlich:

$$p = \frac{\mu\nu + \sigma\varrho - \nu\sigma}{\mu\varrho},$$

und hiernach geht die Gleichung (1) in folgende über:

(4) $$(\mu\nu + \sigma\varrho - \nu\sigma)a + \mu\varrho\sigma g + \mu\varrho\nu h = 0,$$

und stellt mithin eine solche gerade Linie dar, welche durch alle drei in Rede stehenden Durchschnittspunkte geht.

Andere Gruppen dreier in gerader Linie liegender Durchschnittspunkte ergeben sich, wenn wir die Punkte (I), (II), (III), so wie die Punkte (1), (2), (3) beliebig unter einander vertauschen. Wenn wir insbesondere (II) mit (III) und (1) mit (3) gegenseitig vertauschen so erhalten wir statt der drei Linienpaare (A) nun folgende:

B.
$$\begin{cases} (\text{I, 2}) & a = 0, & (\text{III, 3}) & a + \mu g + \varrho h = 0; \\ (\text{III, 1}) & a + \sigma g + \varrho h = 0, & (\text{II, 2}) & a + \nu h = 0; \\ (\text{II, 3}) & a + \mu g + \nu h = 0, & (\text{I, 1}) & a + \sigma g = 0. \end{cases}$$

Man sieht sogleich, dass der Uebergang von den Gleichungen (A) zu den Gleichungen (B) durch gegenseitige Vertauschung von σ mit μ und von ϱ mit ν geschieht. Aus (4) ergiebt sich hiernach sogleich für diejenige gerade Linie, welche die drei neuen Durchschnittspunkte enthält, folgende Gleichung:

(5) $$(\mu\nu + \sigma\varrho - \mu\varrho)a + \mu\nu\sigma g + \sigma\varrho\nu h = 0.$$

Wenn wir ferner (III) mit (I) und (2) mit (3) gegenseitig vertauschen, so erhalten wir statt der geraden Linien (A) die folgenden:

C.
$$\begin{cases} (\text{III, 3}) & a + \mu g + \varrho h = 0, & (\text{II, 1}) & a + \sigma g + \nu h = 0; \\ (\text{II, 2}) & a + \nu h = 0, & (\text{I, 3}) & a + \mu g = 0; \\ (\text{I, 1}) & a + \sigma g = 0; & (\text{III, 2}) & a + \varrho h = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche diese drei neuen Durchschnittspunkte enthält, hat zugleich folgende Formen:

$$a + \mu g + p(a + \nu h) = 0, \quad q(a + \sigma g) + t(a + \varrho h) = 0.$$

p, q und t sind unbestimmte Coefficienten, die so angenommen werden können, dass die ersten Theile dieser Gleichungen identisch werden. Dies giebt:

$$1 + p = q + t, \quad \mu = q\sigma, \quad p\nu = t\varrho.$$

Hieraus erhalten wir ohne Mühe für p:

$$p = \frac{\mu - \sigma}{\varrho - \nu} \cdot \frac{\varrho}{\sigma},$$

und mithin für die gesuchte Gleichung:

(6) $$(\mu\varrho - \nu\sigma)a + (\mu\varrho\sigma - \mu\nu\sigma)g + (\mu\varrho\nu - \sigma\varrho\nu)h = 0.$$

Wenn wir die Gleichung (5) von der Gleichung (4) abziehen, so erhalten wir die Gleichung (6). Die drei bezüglichen geraden Linien *gehen also durch denselben Punkt.*

Wir haben also in dem Vorstehenden nachgewiesen, dass folgende dreimal drei Punkte:

(I, 2), (II, 1) (II, 3), (III, 2) (III, 1), (I, 3)
(I, 2), (III, 3) (III, 1), (II, 2) (II, 3), (I, 1)
(II, 1), (III, 3) (I, 3), (II, 2) (III, 2), (I, 1)

auf drei geraden Linien liegen, und diese drei geraden Linien in demselben Punkte sich schneiden. Die übrigen dreimal drei Durchschnittspunkte, welche auf drei geraden Linien liegen, die ebenfalls wieder in demselben Punkte sich schneiden, ergeben sich, wenn wir in dem letzten Schema irgend zwei lateinische oder irgend zwei arabische Ziffern mit einander vertauschen. Es gilt gleich, welche Vertauschung dieser Art wir hier vornehmen; wir erhalten immer, nur in verschiedener Aufeinanderfolge, dieselben Punkte. Vertauschen wir (1) und (2), so kommt:

(I, 1), (II, 2) (II, 3), (III, 1) (III, 2), (I, 3)
(I, 1), (III, 3) (III, 2), (II, 1) (II, 3), (I, 2)
(II, 2), (III, 3) (I, 3), (II, 1) (III, 1), (I, 2).

Der auf diese Weise bewiesene Satz ist *vollständig*, so viel ich weiss, zuerst von Hrn. Steiner in Gergonne's Annalen (Okt. 1828) zum Beweise vorgelegt worden*). Man erkennt in demselben leicht einen besonderen Fall eines Satzes in Bezug auf solche Sechsecke, die sich in eine Linie zweiter Ordnung beschreiben lassen. (Vergl. Crelle's Journal, V. Band, S. 280**)). An die Stelle der Curve zweiter Ordnung tritt bloss ein System von zwei geraden Linien.

4. Mit dem eben bewiesenen Satze ist der folgende durch das „*Princip der Reciprocität*" verknüpft und am angeführten Orte sogleich daneben gestellt.

Es seien in derselben Ebene sechs gerade Linien, von welchen drei in einem Punkte und die drei übrigen in einem andern Punkte sich schneiden, gegeben. Die drei durch den einen Punkt gehenden geraden Linien schneiden die durch den andern Punkt gehenden noch in neun neuen Punkten. Diese Punkte bestimmen paarweise achtzehn neue gerade Linien, welche zu drei in denselben sechs Punkten zusammenlaufen. Diese sechs Punkte liegen zu drei und drei auf zwei geraden Linien.

*) [Band 19, S. 128.]
**) [Vgl. S. 171 dieser Ausgabe.]

Es ergiebt sich dieser Satz wiederum aus einem allgemeinen Satze (Crelle's Journal, V, S. 280), wenn man in diesem an die Stelle der Curve zweiter Classe ein System von zwei Punkten setzt. Wir können ferner denselben Satz als zugleich in dem Vorhergehenden bewiesen ansehen, wenn wir überall Punkte an die Stelle von geraden Linien setzen, und umgekehrt, und statt durch die Gleichungen

$$g = 0, \quad h = 0, \quad a = 0$$

gerade Linien darzustellen, nun durch dieselben diejenigen beiden festen Punkte, in welchen die sechs gegebenen geraden Linien zu drei und drei sich schneiden, und sonst noch irgend einen beliebigen Durchschnittspunkt dieser Linie darstellen. (Ueber diesen Gegenstand vergleiche man den zweiten Band meiner „*Entwicklungen*" oder auch eine unvollkommene Vorarbeit hierzu im 6. Bande des gegenwärtigen Journals)*). Wir wollen indess den Beweis des vorliegenden Satzes durch die allgemeine Verbindung von Symbolen führen, die wiederum, wie früher, gleich Null gesetzt gerade Linien darstellen, und bemerken zugleich, dass der so angelegte Beweis des letzten Satzes in den Beweis des vorhergehenden übergeht, wenn wir den Symbolen eine andere Bedeutung unterlegen. Wir sehen, wie das „*Princip der Reciprocität*" für alle diejenigen Sätze, welche durch allgemeine Symbole bewiesen werden können, unmittelbar gerechtfertigt ist.

Ob der Beweis eines gegebenen Satzes oder des mit ihm durch das Princip der Reciprocität verbundenen bei Zugrundelegung gewöhnlicher Punktcoordinaten einfacher sein werde, lässt sich so ziemlich im Voraus überschlagen. Einfacher ist es im Allgemeinen, beim Gebrauche dieser Coordinaten, und also auch bei der Einführung von Symbolen, welche auf dieselben sich beziehen, zu beweisen, dass drei gerade Linien in demselben Punkte sich schneiden, als dass drei Punkte in gerader Linie liegen. Bestehen zwei zusammengehörige Sätze, wie die vorliegenden, aus mehreren sich aneinander anreihenden einzelnen Sätzen, so wird es im Allgemeinen leichter sein, denjenigen zu beweisen, nach welchem bestimmte Punkte in geraden Linien liegen, die dann ihrerseits wieder in demselben Punkte sich schneiden. Denn die schwierigeren Operationen werden hierbei im Allgemeinen mit einfacheren und die leichteren mit zusammengesetzteren Gleichungen unternommen. Der oben gegebene Beweis des ersten Satzes wird hiernach, wenn nicht etwa besondere Kunstgriffe angewandt werden können, einfacher sein als der nachfolgende. Die Sache verhält sich gerade umgekehrt, wenn wir uns der neuen *Linien*-Coordinaten bedienen.

*) [Abhandlung 11 dieser Ausgabe, S. 178 ff.]

Die Gleichungen der nach dem letzten Satze gegebenen sechs geraden Linien, von welchen die drei ersten und die drei letzten in demselben Punkte sich schneiden mögen, seien:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0; \quad a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 0.$$

Wir wollen nachweisen, dass die drei geraden Linien

(A) $$(a, b'; a', b), \quad (a, c'; a', c), \quad (b, c'; b', c)$$

in demselben Punkte sich schneiden.

Wenn wir für die Gleichung der geraden Linie, welche durch diejenigen beiden Punkte geht, in welchen die gegebenen geraden Linien zu drei und drei sich schneiden, folgende einführen:

$$g = 0,$$

so können wir die Bedingungen des Satzes folgendergestalt mit Hilfe unbestimmter Coefficienten ausdrücken:

$$a + \mu g = b, \qquad a' + \mu' g = b',$$
$$a + \nu g = c, \qquad a' + \nu' g = c'.$$

Die Gleichung von $(a, b'; a', b)$ ergiebt sich alsdann sogleich, indem man zwei unbestimmte Coefficienten p und q in folgenden Gleichungen so bestimmt, dass diese Gleichungen identisch werden:

$$\left.\begin{aligned} a + \mu g + pa' &= 0, \\ a' + \mu' g + qa &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} \mu' a + \mu\mu' g + \mu' pa' &= 0, \\ \mu qa + \mu\mu' g + \mu a' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Man erhält auf den ersten Blick:

(1) $$\mu' a + \mu a' + \mu\mu' g = 0.$$

Indem man μ und ν vertauscht, ergiebt sich sogleich für $(a, c'; a', c)$ folgende Gleichung:

(2) $$\nu' a + \nu a' + \nu\nu' g = 0.$$

Wir erhalten endlich die Gleichung von $(b, c'; b', c)$, indem wir die beiden Gleichungen:

$$a + \mu g + p(a' + \nu' g) = 0,$$
$$a + \nu g + q(a' + \mu' g) = 0$$

mit Hilfe der unbestimmten Coefficienten p und q identisch machen. Auf diese Weise kommt:

(3) $$(\mu' - \nu')a + (\mu - \nu)a' + (\mu\mu' - \nu\nu')g = 0.$$

Man gelangt zur Gleichung (3), wenn man die Gleichung (2) von der Gleichung (1) abzieht. Die bezüglichen drei geraden Linien schneiden sich also *in demselben Punkte.*

Für folgende drei gerade Linien:

(B) $\qquad (a, a'; b, c'), \quad (a, b'; c, c'), \quad (b, b'; c, a')$

erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nu' a - \mu a' &= 0, \\ (\mu' - \nu') a + \nu a' + \nu\mu' g &= 0, \\ \mu' a + (\nu - \mu) a' + \nu\mu' g &= 0, \end{aligned}$$

und sehen, dass auch diese drei geraden Linien in demselben Punkte sich schneiden.

Indem wir (b) und (c), und dem entsprechend μ und ν gegenseitig mit einander vertauschen, erhalten wir folgende drei neue gerade Linien, die in demselben Punkte sich schneiden:

(C) $\qquad (a, a'; c, b'), \quad (a, c'; b, b'), \quad (c, c'; b, a')$

und für dieselben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu' a - \nu a' &= 0, \\ (\nu' - \mu') a + \mu a' + \mu\nu' g &= 0, \\ \nu' a + (\mu - \nu) a' + \mu\nu' g &= 0. \end{aligned}$$

Es bleibt uns nun nach dem zweiten Theile des vorliegenden Satzes noch zu beweisen übrig, dass die drei gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der geraden Linien (A), (B) und (C) in gerader Linie liegen. Diese Durchschnittspunkte können wir durch drei Linienpaare bestimmen, deren Gleichungen folgende sind:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\mu'\nu'(\mu - \nu)}{\mu\nu(\mu' - \nu')} a + a' = 0, \\ &\frac{\mu'\nu - \mu\nu'}{\mu\nu(\mu' - \nu')} a + g = 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\nu'}{\mu} a - a' = 0, \\ &\frac{\mu\mu' + \nu\nu' - \mu\nu'}{\nu\mu\mu'} a + g = 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\mu'}{\nu} a - a' = 0, \\ &\frac{\mu\mu' + \nu\nu' - \nu\mu'}{\mu\nu\nu'} a + g = 0; \end{aligned} \right\}$$

die sich unmittelbar aus den Gleichungen der drei Gruppen von drei geraden Linien ergeben. Die Gleichungen irgend dreier gerader Linien, welche durch die drei Durchschnitte der in Rede stehenden drei Linienpaare gehen, haben folgende Form:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu'\nu - \mu\nu'}{\mu\nu(\mu' - \nu')}\, a + g - p\left\{\dfrac{\mu'\nu'(\mu - \nu)}{\mu\nu(\mu' - \nu')}\, a + a'\right\} = 0, \\ \dfrac{\mu\mu' + \nu\nu' - \mu\nu'}{\nu\mu'}\, a + g + q\left\{\dfrac{\nu'}{\mu}\, a - a'\right\} = 0, \\ \dfrac{\mu\mu' + \nu\nu' - \nu\mu'}{\mu\nu'}\, a + g + r\left\{\dfrac{\mu'}{\nu}\, a - a'\right\} = 0. \end{cases}$$

Es ist also nachzuweisen, dass diese drei Gleichungen durch schickliche Wahl der drei unbestimmten Coefficienten p, q und r identisch gemacht werden können, was für Ausdrücke a, a' und g auch darstellen mögen. Diese Bedingung fordert zuerst:

$$p = q = r.$$

Wenn wir den Werth von $p = q$ aus den Coefficienten von a in den beiden ersten der Gleichungen (4) bestimmen, so ergiebt sich:

$$p = -\frac{(\mu\nu'^2 - \nu\mu'^2) + (\mu' - \nu')(\mu\mu' + \nu\nu')}{\mu'\nu'(\mu\mu' - \nu\nu')}.$$

Da der vorstehende Ausdruck für p in Beziehung auf μ und ν symmetrisch ist und die beiden letzten Gleichungen (4) durch gegenseitige Vertauschung von μ und ν in einander übergehen, so folgt, dass wir für den unbestimmten Coefficienten $p\,(= q = r)$ denselben Ausdruck durch Zusammenstellung der Coefficienten von a in der ersten und dritten der Gleichungen (4) erhalten hätten, und eben dies war zu beweisen.

15.

Analytisch-geometrische Aphorismen II.

(Crelle's Journal, Band 10, S. 293—299. 1831.)

Einige Sätze über Kreise und eine neue Construction des Apollonischen Problems der Tactionen.

Die Absicht dieses Aufsatzes ist, Analogien zwischen Sätzen über Kreise und Sätzen über gerade Linien nachzuweisen.

1. Neben dem Satze:

dass die drei von den Durchschnitten je zweier von drei gegebenen geraden Linien auf die jedesmalige dritte dieser geraden Linien gefällten Perpendikel in demselben Punkte sich schneiden,

besteht auch der folgende Satz:

Wenn irgend drei Kreise gegeben sind und man beschreibt drei neue Kreise, so dass jeder derselben durch die beiden Durchschnittspunkte zweier der drei gegebenen geht und den dritten derselben rechtwinklig schneidet, so gehen diese drei neuen Kreise durch dieselben beiden Punkte.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir für die Gleichungen der drei Kreise folgende nehmen:

$$(1) \qquad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-\varrho^2 = C = 0,$$

$$(2) \qquad (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-\varrho'^2 = C' = 0,$$

$$(3) \qquad (y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2-\varrho''^2 = C'' = 0.$$

Hiernach ist die allgemeine Gleichung aller Kreise, welche durch die beiden (reellen oder imaginären) Durchschnittspunkte der beiden ersten gegebenen gehen, folgende:

$$(4) \qquad C+\mu C' = 0,$$

indem wir durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen. Soll diese Gleichung insbesondere denjenigen Kreis darstellen, der den dritten gegebenen unter rechten Winkeln schneidet, so wird erfordert, dass diejenigen beiden Radien dieser beiden Kreise, welche durch einen

Durchschnittspunkt derselben gehen, auf einander senkrecht sind, und dass also die Summe der Quadrate der Radien der beiden Kreise gleich ist dem Quadrate der Entfernung ihrer Mittelpunkte von einander. Wenn wir die Gleichung (4) entwickeln, so erhalten wir für das Quadrat des Radius des bezüglichen Kreises:

$$\varrho^2 - \frac{(\alpha^2+\beta^2) + \mu(\varrho'^2 - (\alpha'^2+\beta'^2))}{1+\mu} + \left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}\right)^2,$$

und für das Quadrat der Entfernung des Mittelpunktes desselben von dem Mittelpunkte des Kreises (3):

$$\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu} - \beta''\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu} - \alpha''\right)^2.$$

Ueberdies ist der Radius des letztgenannten Kreises gleich ϱ''. Hiernach ergiebt sich zur Bestimmung des Coefficienten μ folgende Gleichung:

$$\beta''^2 - 2\beta''\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu} + \alpha''^2 - 2\alpha''\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu} = \frac{\varrho^2 - (\alpha^2+\beta^2) + \mu(\varrho'^2 - (\alpha'^2+\beta'^2))}{1+\mu} + \varrho''^2,$$

und wenn wir reduciren, kommt:

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu\{[(\beta'-\beta'')^2 + (\alpha'-\alpha'')^2] - \varrho'^2 - \varrho''^2\} \\ = -\{[(\beta-\beta'')^2 + (\alpha-\alpha'')^2] - \varrho^2 - \varrho''^2\}. \end{array}\right.$$

Dieser Gleichung können wir noch eine einfachere Form geben; denn es ist:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} [(\beta'-\beta'')^2 + (\alpha'-\alpha'')^2] - \varrho'^2 - \varrho''^2 = 2\varrho'\varrho''\cos\omega, \\ [(\beta-\beta'')^2 + (\alpha-\alpha'')^2] - \varrho^2 - \varrho''^2 = 2\varrho\,\varrho''\cos\omega', \end{array}\right.$$

wenn wir diejenigen beiden Winkel, unter welchen der zweite und dritte und der erste und dritte gegebene Kreis sich schneiden, ω und ω' nennen. Um diese Winkel noch näher zu bezeichnen, bemerken wir, dass, wenn irgend zwei Kreise sich schneiden, drei begrenzte Figuren entstehen, von welchen eine convex-convex und zwei convex-concav sind, und dass wir die Innenwinkel der erstgenannten Figur und nicht ihre Nebenwinkel ω nennen und als die Durchschnittswinkel der beiden Kreise betrachten. Wenn hiernach die beiden Kreise sich ausserhalb berühren, so ist $\omega = 0$; wenn einer von dem andern innerhalb berührt wird, so ist $\omega = \pi$. Wenn die beiden Kreise keinen Punkt gemein haben, so wird ω zwar imaginär, $\cos\omega$ bleibt aber reell und wird nur grösser als Eins. In diesem Falle bezeichnet ein gegebener Werth von $\cos\omega$ (>1) eine Beziehung der beiden bezüglichen Kreise zu einander, deren geometrische Aussage bloss eine andere wird

und sich noch immer durch eine Gleichung von der Form der Gleichungen (6) bestimmt.

Die Gleichung (5) geht hiernach in folgende über:

$$\mu = -\frac{\varrho \cos\omega'}{\varrho' \cos\omega},$$

wonach die Gleichung (4) sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\cos\omega}{\varrho} C - \frac{\cos\omega'}{\varrho'} C' = 0. \tag{7}$$

Wenn wir den Durchschnittswinkel der beiden ersten gegebenen Kreise ω'' nennen, so giebt eine blosse Accentvertauschung folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\cos\omega'}{\varrho'} C' - \frac{\cos\omega''}{\varrho''} C'' = 0, \\ \frac{\cos\omega''}{\varrho''} C'' - \frac{\cos\omega}{\varrho} C = 0, \end{cases} \tag{8}$$

für diejenigen beiden Kreise, welche durch die Durchschnittspunkte des zweiten und dritten und des dritten und ersten gegebenen Kreises gehen und resp. den ersten und zweiten gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden. Ein Blick auf die letzten drei Gleichungen zeigt uns die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze ergiebt sich durch Grenzbetrachtungen in der Construction nicht bloss der an die Spitze dieser Nummer gestellte Satz, sondern man kann in der Aussage dieses Satzes ganz beliebig Punkte und gerade Linien an die Stelle der drei gegebenen Kreise setzen und erhält auf diese Weise zehn verschiedene Sätze. Nehmen wir z. B. statt der drei gegebenen Kreise drei *Punkte*, so gelangen wir zu folgendem Satze:

„Wenn irgend drei Punkte gegeben sind und man beschreibt drei Kreise so, dass jeder derselben durch einen der drei gegebenen Punkte geht und die beiden übrigen zu zugeordneten Polen hat, so schneiden sich diese drei Kreise in denselben beiden Punkten."

In diesem Falle können wir in der analytischen Beweisführung uns der Symbole $\cos\omega$, die unendlich werden, nicht mehr bedienen. Man erhält hier indessen, indem man $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ setzt, aus (5) sogleich

$$\mu = -\frac{e'^2}{e^2},$$

wenn man durch e' und e die Abstände des ersten und zweiten gegebenen Punktes vom dritten bezeichnet.

Der Raum verbietet, hierüber mehr ins Detail einzugehen. Ich erwähne nur noch beiläufig, dass, da in der Gleichung (6) der dritte

gegebene Kreis nur in den Winkeln ω und ω', unter welchen er die beiden ersten schneidet, erscheint, wir sogleich folgenden Satz erhalten:

„Alle dritten Kreise, welche jeden von zwei gegebenen Kreisen unter einem gegebenen Winkel schneiden, werden ihrerseits von einem und demselben Kreise unter rechten Winkeln geschnitten, und dieser Kreis geht durch die beiden Durchschnitte der beiden gegebenen."

Eigentlich kommt in der Gleichung (7) nur der Quotient $\frac{\cos\omega'}{\cos\omega}$ vor.

2. Neben den Satz:

dass, wenn man die Winkel, welche in den Durchschnitten von irgend drei gegebenen geraden Linien entstehen, durch sechs neue gerade Linien halbirt, diese Halbirungslinien zu drei in vier neuen Punkten sich schneiden,

stellt sich der folgende:

Wenn irgend drei Kreise gegeben sind und man halbirt diejenigen Winkel, welche in den Durchschnitten je zweier derselben entstehen, durch dreimal zwei Kreise, so erhält man solche sechs Kreise, die, zu drei auf vierfache Weise zusammengestellt, in denselben beiden Punkten sich schneiden.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir die drei gegebenen Kreise wiederum durch die Gleichungen (1) — (3) der vorigen Nummer darstellen, und durch die Gleichung (4) denjenigen Kreis bezeichnen, der durch die Durchschnitte der beiden ersten gegebenen geht und die Durchschnittswinkel derselben halbirt. Da dieser Kreis alsdann mit dem ersten und zweiten gegebenen Kreise Winkel bildet, die sich zu π ergänzen, und deren Cosinus also gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von μ, wenn wir der Kürze halber in den Nennern der folgenden Ausdrücke den Radius des Kreises (4) R nennen:

$$(9)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\left(\dfrac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}-\beta\right)^2+\left(\dfrac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}-\alpha\right)^2}{2R\varrho} \\ \qquad -\dfrac{\dfrac{\varrho^2-\beta^2-\alpha^2+\mu(\varrho'^2-\beta'^2-\alpha'^2)}{1+\mu}-\left(\dfrac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}\right)^2+\varrho^2}{2R\varrho} \\ = -\dfrac{\left(\dfrac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}-\beta'\right)^2+\left(\dfrac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}-\alpha'\right)^2}{2R\varrho'} \\ \qquad +\dfrac{\dfrac{\varrho^2-\beta^2-\alpha^2+\mu(\varrho'^2-\beta'^2-\alpha'^2)}{1+\mu}-\left(\dfrac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}\right)^2+\varrho'^2}{2R\varrho'}. \end{array}\right.$$

Nach allen Reductionen erhalten wir hieraus:

$$\mu = -\frac{\varrho}{\varrho'},$$

und also aus (4):

$$\frac{1}{\varrho} C - \frac{1}{\varrho'} C' = 0. \tag{10}$$

Durch blosse Accentvertauschung erhalten wir hiernach für diejenigen beiden Kreise, welche die von dem zweiten und dritten und von dem ersten und dritten gegebenen Kreise gebildeten Winkel halbiren, folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{1}{\varrho'} C' - \frac{1}{\varrho''} C'' = 0, \\ \frac{1}{\varrho''} C'' - \frac{1}{\varrho} C = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Die drei Kreise (10) und (11) gehen also, was zu beweisen war, durch dieselben beiden Punkte.

Wenn wir das Zeichen eines der drei Radien ϱ, ϱ' und ϱ'' in den letzten drei Gleichungen ändern, so erhalten wir drei neue Kreise, welche in denselben beiden Punkten sich schneiden. Nehmen wir ϱ mit entgegengesetztem Zeichen, so erhält der erste Theil der Gleichung (9) ebenfalls das entgegengesetzte Zeichen, und diese Bedingungsgleichung drückt aus, dass der Kreis (10) die beiden Kreise (1) und (2) unter gleichen Winkeln schneidet, und folglich die *Nebenwinkel* der Durchschnittswinkel der letztgenannten beiden Kreise halbirt. In eine gleiche Beziehung tritt alsdann auch der zweite der Kreise (11) zu den Kreisen (1) und (3). Hiernach ist der vorstehende Satz vollständig bewiesen.

Es ist dieser Satz, wenigstens unter einer andern Aussage, bekannt. Die Mittelpunktscoordinaten des Kreises (10) z. B. sind:

$$y = \frac{\varrho'\beta - \varrho\beta'}{\varrho' - \varrho}, \qquad x = \frac{\varrho'\alpha - \varrho\alpha'}{\varrho' - \varrho},$$

und in diesen Ausdrücken erkennen wir die Coordinaten des Durchschnittes der gemeinschaftlichen äussern Tangenten der beiden ersten Kreise wieder. Aendern wir das Zeichen von ϱ oder ϱ', so erhalten wir die Coordinaten des Durchschnittes der gemeinschaftlichen innern Tangenten derselben beiden Kreise. Also:

„Wenn man aus solchen drei Durchschnittspunkten gemeinschaftlicher Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen, die in gerader Linie liegen, als Mittelpunkten drei neue Kreise beschreibt, welche durch die Durchschnitte der beiden bezüglichen gegebenen Kreise gehen, so schneiden dieselben sich in denselben beiden Punkten“*).

*) Vgl. Analytisch-geometrische Entwicklungen, Band I, § 185, S. 96.

Wenn ich nicht irre, ist dieser Satz schon in einem früheren Bande von Gergonne's Annalen aufgestellt und bewiesen worden.[1]) Ich bemerke beiläufig, dass in dem vorstehenden Satze die drei Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten mit *irgend drei andern Punkten* vertauscht werden können, die in gerader Linie und auf den Centrallinien je zweier der drei gegebenen Kreise liegen*).

3. „Wenn man die Innenwinkel eines gegebenen Dreiecks durch drei gerade Linien halbirt, so schneiden sich diese Halbirungslinien in einem und demselben Punkte. Wenn man von diesem Punkte aus Perpendikel auf die drei Dreiecksseiten fällt, so sind die Fusspunkte dieser Perpendikel diejenigen Punkte, in welchen der dem Dreieck eingeschriebene Kreis die Seiten desselben berührt. Dieser Kreis ist durch diese Berührungspunkte bestimmt."

Ganz analog ist folgende neue und, wie mir scheint, elegante Construction des Problems der Tactionen:

Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt.

„Man halbire durch drei Kreise diejenigen beiden Winkel, unter welchen die drei gegebenen Kreise, paarweise genommen, sich schneiden. Diese drei Kreise gehen durch dieselben beiden Punkte. Man lege durch diese beiden Punkte drei neue Kreise, welche die drei gegebenen unter rechten Winkeln schneiden. Die dreimal zwei Durchschnittspunkte, welche man hiernach auf den letztgenannten drei Kreisen erhält, sind diejenigen Punkte, in welchen diese Kreise von zwei der verlangten

*) Um keinen Satz unbewiesen zu lassen, füge ich diese Note hinzu. Die Mittelpunkte der drei Kreise (1) können wir durch folgende drei Gleichungen darstellen, wenn wir uns der neuen Liniencoordinaten bedienen:

$$\beta u + \alpha v + 1 = U = 0,$$
$$\beta' u + \alpha' v + 1 = U' = 0,$$
$$\beta'' u + \alpha'' v + 1 = U'' = 0.$$

Irgend drei andere Punkte, welche auf den Seiten des durch diese drei Mittelpunkte bestimmten Dreiecks, und überdies in gerader Linie liegen, können wir alsdann, wenn μ und ν unbestimmte Coefficienten bedeuten, durch folgende Gleichungen darstellen:

$$U - \mu U' = 0, \quad \mu U' - \nu U'' = 0, \quad \nu U'' - U = 0.$$

Diese Punkte sind aber, wie sogleich erhellt, die Mittelpunkte folgender drei Kreise:

$$C - \mu C' = 0, \quad \mu C' - \nu C'' = 0, \quad \nu C'' - C = 0,$$

die, was man sogleich aus ihren Gleichungen entnimmt, durch die Durchschnitte je zweier der drei gegebenen Kreise gehen, und überdiess alle drei in denselben beiden Punkten sich schneiden.

berührt werden: von denjenigen nämlich, welche dieselben alle drei gleichartig berühren."

Ohne Mühe ergiebt sich der Beweis dieser Construction, die sich, was nach dem Vorhergehenden kaum noch erwähnt zu werden braucht, auf jede beliebige gegenseitige Lage der drei gegebenen Kreise zu einander erstreckt.

Wir wollen die beiden gesuchten Kreise C und C' nennen; jeder derselben wird von den drei gegebenen Kreisen γ, γ' und γ'' gleichartig berührt. In der 196. Nummer des ersten Bandes der *„Entwicklungen"* ist ohne allen Aufwand von Rechnung gezeigt worden, dass der Durchschnitt der äusseren gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier Kreise, welche die Kreise C und C' so berühren, wie es die Kreise γ thun, auf der gemeinschaftlichen Chorde von C und C' liegt. Derjenige Kreis K, welcher aus einem solchen Punkte als Mittelpunkt beschrieben wird und mit den bezüglichen beiden Kreisen (etwa γ und γ') dieselben Durchschnittspunkte hat, schneidet die beiden Kreise C und C' unter rechten Winkeln. Es folgt dies unmittelbar aus dem Satze am Ende der ersten Nummer dieses Aufsatzes, wenn man zugleich bemerkt, dass die Gleichungen (7) und (10) identisch werden, wenn $\omega = \omega'$, und also insbesondere auch, wenn $\omega = \omega' = 0$ oder $\omega = \omega' = \pi$. Hieraus folgt dann ferner, dass alle solche Kreise K die Centrallinie der beiden Kreise C und C' in denselben beiden festen Punkten schneiden, was auch schon in der 185. Nummer der *„Entwicklungen"* bemerkt worden ist.

Wenn wir nun statt eines Kreises K einen solchen Kreis nehmen, der zweien *zusammenfallenden* Kreisen γ entspricht, so ist aus einer Grenzbetrachtung sogleich ersichtlich, dass ein solcher Kreis den Kreis γ rechtwinklig schneidet und durch diejenigen beiden Punkte geht, in welchen der Kreis γ von den Kreisen C und C' berührt wird. Ein solcher Kreis wird aber auch die Centrallinie der letztgenannten beiden Kreise immer noch in den beiden constanten Durchschnittspunkten der Kreise K schneiden. Somit ist die obige Construction gerechtfertigt.

Die Construction der übrigen Berührungskreise ist ganz ähnlich.

Ich beschränke mich hier auf die vorstehenden Analogien. Nach Analogien zu schliessen, ist eines der ersten Hilfsmittel, um neue Sätze aufzufinden; und überdiess, wo wie in dem Vorstehenden Analogien zwischen zwei Reihen von Sätzen sich finden, da besteht nothwendig ein Uebertragungsprincip. Ich komme später noch hierauf zurück.

16.

Analytisch-geometrische Aphorismen III.

(Crelle's Journal, Band 11, S. 26—32. 1831.)

Ueber die Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten zum Beweise geometrischer Sätze.

Wir haben in dem Früheren*) diejenigen schon bekannten Sätze der Situationsgeometrie bewiesen, welche sich auf die Durchschnittspunkte irgend solcher sechs geraden Linien, von welchen *drei* durch einen gegebenen Punkt gehen und die *drei* übrigen durch einen andern, beziehen. Man wird leicht auf den Gedanken hingeführt, die analogen Sätze zu suchen, welche sich auf die Durchschnittspunkte irgend solcher sechs geraden Linien, von welchen *vier* durch einen gegebenen und die *beiden* übrigen durch einen andern gegebenen Punkt gehen, beziehen. Auf diesem Wege findet man folgenden Satz.

Wenn sechs gerade Linien gegeben sind, von welchen vier durch einen gegebenen Punkt P und die beiden übrigen durch einen zweiten gegebenen Punkt Q gehen, so schneiden sich diese geraden Linien ausserdem noch in acht Punkten. Diese acht Punkte lassen sich durch zwölf neue gerade Linien verbinden, und diese zwölf geraden Linien schneiden sich in zweiundvierzig neuen Punkten. Von diesen zweiundvierzig Punkten liegen sechs auf einer und derselben geraden Linie, die durch den Punkt Q geht, zwölf dieser Punkte liegen zu vier auf drei, und vierundzwanzig zu zwei auf zwölf geraden Linien, die alle durch den Punkt P gehen.

Wir wollen die vier durch den Punkt P gehenden geraden Linien durch die Buchstaben a, b, c und d, die beiden durch den Punkt Q gehenden durch g und h bezeichnen. (a, g) zum Beispiel stellt alsdann nach unserer gewöhnlichen Bezeichnungsart den Durchschnittspunkt von a und g dar, (b, h) den Durchschnittspunkt von b und h; ferner $(a, g; b, h)$ diejenige gerade Linie, welche die beiden Durchschnitts-

*) [Vgl. S. 237 dieser Ausgabe.]

punkte (a, g) und (b, h) verbindet, und endlich $[(a, g; b, h), (d, g; c, h)]$ den Durchschnittspunkt zweier solcher gerader Linien. Diesen letzten Punkt können wir durch das abgekürzte Symbol $abdc$ bezeichnen, und dem analog alle solche Punkte, in deren vollständigen Symbolen g und h auf dieselbe Weise vorkommen. Durch Hinzufügung der letztgenannten beiden Buchstaben in den ihnen zugehörigen Stellen können wir hiernach jedes abgekürzte Symbol vervollständigen, so z. B. bedeutet das Symbol $abbc$ den Punkt $[(a, g; b, h), (b, g; c, h)]$. Dies vorausgesetzt, liegen

1. die Punkte

$$abba,\quad acca,\quad adda,\quad bccb,\quad bddb,\quad cddc$$

alle sechs auf einer durch Q gehenden geraden Linie;

2. die dreimal vier Punkte

$$\begin{array}{llll} abdc, & bacd, & adbc, & dacb; \\ abcd, & badc, & acbd, & cadb; \\ acdb, & cabd, & adcb, & dabc; \end{array}$$

auf drei durch P gehenden geraden Linien, und endlich

3. die zwölfmal zwei Punkte

$$\begin{array}{ll} baac & caab \\ baad & daab \\ caad & daac \\ abbc & cbba \\ abbd & dbba \\ cbbd & dbbc \\ accb & bcca \\ accd & dcca \\ bccd & dccb \\ addb & bdda \\ addc & cdda \\ bddc & cddb \end{array}$$

auf zwölf ebenfalls durch P gehenden geraden Linien.

Man sieht sogleich, dass jede der zwölf geraden Linien, welche die acht ursprünglichen Durchschnittspunkte verbinden, von sieben der übrigen in neuen Punkten geschnitten wird. Man erhält also für die Zahl aller solcher Durchschnittspunkte $\frac{7 \cdot 12}{2} = 42$. Alle diese Punkte kommen in den vorstehenden Schemata vor.

Beweis. Die Gleichungen aller geraden Linien, welche in der vorliegenden Construction vorkommen, können wir mit Hilfe von vier unbestimmten Coefficienten μ, ν, ϱ und σ aus den symbolischen Gleichungen der beiden geraden Linien a und g und der geraden Linie PQ, welche die beiden gegebenen Punkte P und Q verbindet, herleiten. Die Gleichungen dieser drei geraden Linien seien:

$$a = 0, \quad g = 0, \quad m = 0,$$

und die Gleichungen der übrigen gegebenen geraden Linien:

$$b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0, \quad h = 0.$$

Alsdann ist

$$(1) \quad m + \mu a = b, \qquad (3) \quad m + \varrho a = d,$$
$$(2) \quad m + \nu a = c, \qquad (4) \quad m + \sigma g = h,$$

und in diesen identischen Gleichungen sind die Bedingungen des Satzes vollständig ausgedrückt.

Der Beweis für den *ersten Theil* des obigen Satzes ist bereits schon durch allgemeine Symbole im ersten Paragraphen dieser Aphorismen geführt worden*). Wir erhalten so viele Durchschnittspunkte, die alle mit dem Punkte Q in gerader Linie liegen, als sich die vier geraden Linien a, b, c und d zu zwei combiniren lassen, nämlich 6.

Wir wenden uns zum Beweise des *zweiten Theiles.* Zu diesem Ende wollen wir zuerst die Gleichung der geraden Linie $(a, g; b, h)$ entwickeln. Die beiden ersten Buchstaben dieses Symbols zeigen, dass diese Gleichung folgende Form hat:

$$pa + qg = 0,$$

und die beiden letzten, dass dieselbe Gleichung eine algebraische Folge aus den Gleichungen

$$b = 0, \quad h = 0$$

sein muss. Folglich erhalten wir die gesuchte Gleichung, wenn wir die Ausdrücke für b und h, (1) und (4), damit m verschwinde, von einander abziehen. Auf diese Weise kommt:

$$(5) \qquad \mu a - \sigma g = 0.$$

Die Gleichung für $(d, g; c, h)$ hat zugleich folgende beide Formen:

$$(A) \qquad (m + \varrho a) + pg = 0, \quad q(m + \nu a) + r(m + \sigma g) = 0.$$

Um die ersten Theile dieser beiden Gleichungen mit Hilfe der unbestimmten Coefficienten p, q und r identisch zu machen, müssen wir

$$q + r = 1, \quad q\nu = \varrho, \quad r\sigma = p$$

setzen. Diese Gleichungen geben auf der Stelle

*) [Vgl. S. 235 und 236 dieser Ausgabe.]

$$p = \frac{\sigma(\nu - \varrho)}{\nu},$$

und hiernach verwandelt sich die erste der beiden Gleichungen (A) in

(6) $$\nu m + \nu\varrho a + \sigma(\nu - \varrho)g = 0.$$

Man erhält hiernach ferner die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche durch den Durchschnittspunkt von (5) und (6) und zugleich durch den Punkt P geht, wenn man, um zu einer Gleichung von der Form:

$$pa + qm = 0$$

zu gelangen, zwischen den Gleichungen (5) und (6) g eliminirt. Auf diese Weise findet man sogleich:

(7) $$\nu m + (\nu(\mu + \varrho) - \mu\varrho)a = 0.$$

Diese letzte Gleichung bleibt identisch dieselbe, wenn wir μ und ϱ gegenseitig mit einander vertauschen. Dieser Vertauschung entspricht aber die gegenseitige Vertauschung der beiden geraden Linien b und d. Auf der geraden Linie (7) liegt also nicht allein der Durchschnittspunkt von (5) und (6) oder der Punkt $abdc$, sondern auch der Punkt $adbc$. Der zweite Punkt ist hiernach aus dem ersten dadurch bestimmt, dass die beiden mittleren Buchstaben ihrer (abgekürzten) Symbole ihre Stellen vertauschen. Den ersten dieser beiden Punkte können wir aber auch durch das Symbol $dcab$ bezeichnen und den zweiten durch $bcad$, was bloss darauf hinauskommt, diejenigen beiden geraden Linien, welche den jedesmaligen Durchschnittspunkt bilden, in anderer Ordnung zu nehmen. Vertauschen wir also wiederum die mittleren Buchstaben in den letzten beiden Symbolen, so erhalten wir die Symbole zweier neuen Punkte $dacb$ und $bacd$, welche ebenfalls auf der geraden Linie (7) liegen. Die auf diese Weise bestimmten vier Punkte sind also:

$$abdc, \quad adbc, \quad dacb, \quad bacd$$

und liegen, wie behauptet wurde, auf einer und derselben durch den Punkt P gehenden geraden Linie.

Vertauschen wir einmal gegenseitig d und c, und das andere mal b und c mit einander, so erhalten wir noch zweimal vier analoge Punkte und für die Gleichungen der beiden diese Punkte enthaltenden geraden Linien ergiebt sich, indem man in (7) einmal gegenseitig ϱ und ν, das andere mal μ und ν mit einander vertauscht:

(8) $$\varrho m + (\varrho(\mu + \nu) - \mu\nu)a = 0,$$

(9) $$\mu m + (\mu(\varrho + \nu) - \varrho\nu)a = 0.$$

Da vier Elemente 24 verschiedene Permutationen bilden und jeder Punkt sich auf doppelte Weise durch ein Symbol ausdrücken lässt,

so entsprechen allen jenen Permutationen solche Punkte, wie wir eben betrachtet haben.

Es bleibt uns jetzt also nur noch übrig, den *dritten Theil* des vorliegenden Satzes zu beweisen. Für die gerade Linie $(a, g; b, h)$ haben wir oben schon die Gleichung

$$\mu a - \sigma g = 0 \tag{5}$$

erhalten. Für $(c, g; a, h)$ erhalten wir jede von folgenden beiden Gleichungen

$$(m + \nu a) + qg = 0, \quad (m + \sigma g) + pa = 0,$$

wenn wir die ersten Theile derselben mit Hilfe der beiden unbestimmten Coefficienten q und p identisch machen. Dies giebt unmittelbar

$$q = \sigma, \quad p = \nu,$$

und hiernach ist die Gleichung der in Rede stehenden geraden Linie:

$$m + \nu a + \sigma g = 0. \tag{10}$$

Wenn man in der vorstehenden Gleichung für σg aus (5) μa schreibt, so ergiebt sich:

$$m + (\mu + \nu) a = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt diejenige gerade Linie dar, welche durch den Durchschnitt von (10) und (5), d. h. durch den Punkt *caab* und zugleich durch den Punkt P, den Durchschnitt von a und m, geht. Diese Gleichung bleibt unverändert, wenn man μ und ν, d. h. die geraden Linien b und c gegenseitig mit einander vertauscht. Man erhält also den neuen Punkt *baac*, welcher ebenfalls auf der geraden Linie (11) liegt.

Das eben Bewiesene erstreckt sich unmittelbar auf alle Combinationen aus den vier Elementen a, b, c und d, welche den vorstehenden analog gebildet sind, auf solche Symbole nämlich, in welchen in der Mitte derselbe Buchstabe zweimal vorkommt. Zu demselben Buchstaben in der Mitte können sich zwei der drei übrigen offenbar auf dreifache Weise gesellen, und zwar jedesmal zweifach, indem derselbe Buchstabe einmal vorn und das andere mal hinten steht. Es giebt also $4 \cdot 3 = 12$ Paare solcher Punkte, die im dritten Theile des vorliegenden Satzes zusammengestellt sind.

Aus dem in dem Vorstehenden vollständig bewiesenen Satze ergiebt sich sogleich nach dem *Principe der Reciprocität* der folgende neue Satz.

Wenn sechs Punkte gegeben sind, von welchen vier auf einer gegebenen geraden Linie P, und die beiden übrigen auf einer andern gegebenen

geraden Linie Q liegen, so kann man diese sechs Punkte noch durch acht neue gerade Linien verbinden. Diese acht geraden Linien schneiden sich in zwölf neuen Punkten, und diese zwölf Punkte lassen sich paarweise durch zweiundvierzig neue gerade Linien verbinden. Von diesen zweiundvierzig geraden Linien schneiden sich sechs in einem und demselben Punkte der geraden Linie Q, zwölf derselben schneiden sich zu vier in drei, und vierundzwanzig zu zwei in zwölf Punkten der geraden Linie P.

Da die eigentliche Absicht dieses Aufsatzes bloss darin besteht, die Methode der Symbole und unbestimmten Coefficienten in ein helleres Licht zu stellen und dadurch zugänglicher zu machen, so ergreife ich die neue Gelegenheit, die sich mir darbietet, und will den letzten Satz ebenfalls direct beweisen. Die detaillirte Aussage dieses Satzes können wir wie bei dem ersten Satze schematisiren und brauchen zu diesem Ende nur Punkte an die Stelle von geraden Linien, Durchschnitte zweier gerader Linien an die Stelle von geraden Linien, welche durch zwei Punkte gehen, und umgekehrt, zu setzen. Hiernach ist der erste Theil des Satzes als nach dem ersten Paragraphen dieser Aphorismen schon bewiesen anzusehen. Was die beiden andern Theile betrifft, so ist die Schlussweise aus den Symbolen gerade dieselbe wie in dem ersten Satze und es braucht also nur noch gezeigt zu werden, einmal, dass die beiden geraden Linien:

$$[(a, g;\ b, h),\ \ (d, g;\ c, h)] \quad \text{und} \quad [(a, g;\ d, h),\ \ (b, g;\ c, h)],$$

oder $abdc$ und $adbc$, und das andere mal, dass die beiden geraden Linien:

$$[(b, g;\ a, h),\ \ (a, g;\ c, h)] \quad \text{und} \quad [(c, g;\ a, h),\ \ (a, g;\ b, h)],$$

oder $baac$ und $caab$ sich auf der geraden Linie P schneiden.

Wir können alle geraden Linien der vorstehenden Construction durch Gleichungen ausdrücken, wenn wir von den symbolischen Gleichungen einer derselben, etwa (a, g), und der beiden gegebenen geraden Linien, nämlich P, auf der die vier Punkte a, b, c, d und Q, auf der die beiden Punkte g und h liegen, ausgehen. Diese drei Gleichungen seien

$$a = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Wir erhalten alsdann für die acht neuen, die sechs gegebenen Punkte verbindenden geraden Linien folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} a = 0 & (a, g), & a + \sigma p = 0, & (a, h) \\ a + \mu q = 0 & (b, g), & a + \sigma p + \mu q = 0 & (b, h) \\ a + \nu q = 0 & (c, g), & a + \sigma p + \nu q = 0 & (c, h) \\ a + \varrho q = 0 & (d, g), & a + \sigma p + \varrho q = 0 & (d, h). \end{array}$$

Wenn wir die vier Punkte a, b, c und d beliebig mit einander verwechseln, so behalten wir ganz dieselben acht Gleichungen, nur in anderer Ordnung.

Für die gerade Linie $[(a, g;\ b, h),\ (d, g;\ c, h)]$ ergeben sich hiernach folgende Gleichungen:

$$ma + \sigma p + \mu q = 0, \quad n(a + \varrho q) + a + \sigma p + \nu q = 0,$$

die mit Hilfe der beiden unbestimmten Coefficienten m und n identisch gemacht werden müssen. Hiernach kommt:

$$m = 1 + n, \quad \mu = n\varrho + \nu,$$

und somit ist

$$m = \frac{\varrho + \mu - \nu}{\varrho},$$

wonach die gesuchte Gleichung für $abdc$ folgende wird:

$$(\varrho + \mu - \nu)a + \varrho\sigma p + \varrho\mu q = 0. \tag{1}$$

Um die Gleichung für $adbc$ zu erhalten, brauchen wir bloss b und d und dem entsprechend in der letzten Gleichung μ und ϱ gegenseitig mit einander zu vertauschen. Auf diese Weise kommt:

$$(\varrho + \mu - \nu)a + \mu\sigma p + \varrho\mu q = 0. \tag{2}$$

Wenn man die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander abzieht und den Factor von p im Resultate fortlässt, so kommt: $p = 0$, d. h. was zu beweisen war, dass sich die beiden geraden Linien (1) und (2) auf der geraden Linie P schneiden.

Für die Gleichung von $[(b, g;\ a, h),\ (a, g;\ c, h)]$ oder $baac$ erhalten wir folgende Formen:

$$a + \sigma p + m(a + \mu q) = 0; \quad na + \sigma p + \nu q = 0,$$

die mit Hilfe der beiden unbestimmten Coefficienten m und n identisch gemacht werden müssen. Zu diesem Ende müssen wir

$$1 + m = n, \quad m\mu = \nu$$

nehmen, wonach

$$n = \frac{\nu + \mu}{\mu}$$

ist, und die letzte der obigen Gleichungen in folgende, vollkommen bestimmte übergeht:

$$(\nu + \mu)a + \sigma\nu p + \nu\mu q = 0. \tag{3}$$

Vertauscht man μ und ν und umgekehrt, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung von $baac$ die nachstehende für $caab$:

$$(\nu + \mu)a + \sigma\mu p + \nu\mu q = 0. \tag{4}$$

Wenn man abzieht, erhält man aus (3) und (4), wie oben, $p = 0$, und die beiden bezüglichen geraden Linien schneiden sich also wiederum auf der gegebenen geraden Linie P.

Jeder Leser, welcher der Art, wie die verschiedenen Sätze der Geometrie unter einander verknüpft sind, — und hieraus schöpfen, was nicht oft genug wiederholt werden kann, die neueren Behandlungsweisen der Geometrie ihre glänzendsten Resultate — besondere Aufmerksamkeit geschenkt hat, wird mit Grund vermuthen, dass es allgemeinere Sätze giebt, von welchen die vorstehenden Particularisationen sind. Es giebt wirklich solche Sätze. Es dürfen dieselben uns aber hier nicht beschäftigen. Gelegentlich werde ich auf dieselben zurück kommen.

17.

Analytisch-geometrische Aphorismen IV.

(Crelle's Journal, Band 11, S. 117—129, 1831.)

Das Malfatti'sche Problem.

A. Eine Gruppe geometrischer Sätze und elementarer Beweis derselben.

1. *Wenn man von solchen zwei Punkten M und N (Fig. 41 und 42), die auf zwei zusammengehörigen (d. h. auf den beiden inneren oder den beiden äusseren) gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Kreise C und C′ liegen, noch vier Tangenten an diese Kreise legt, so bestimmen dieselben ein solches Viereck, in welches sich ein dritter Kreis K beschreiben lässt.*

Wir können diesen Satz sehr einfach auf elementarem Wege beweisen. Zwei verschiedene Fälle sind hierbei zu unterscheiden. In dem ersten Falle sind die beiden Punkte M und N, wie in Fig. 41, Winkelpunkte des dem Kreise K nach dem vorstehenden Satze umschriebenen einfachen Vierecks; in dem zweiten Falle findet dies nicht statt.

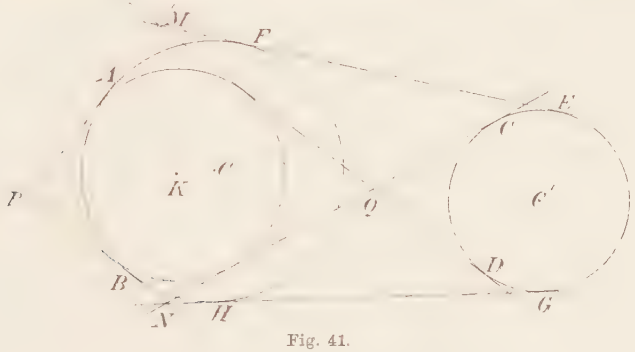

Fig. 41.

Im dem *ersten Falle* (Fig. 41) liegt der Beweis des Satzes darin, zu zeigen, dass die Summe zweier gegenüberliegender Seiten des in Rede

stehenden Vierecks der Summe der beiden übrigen gleich ist. M und N seien zwei auf den *äusseren* gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kreise C und C' beliebig angenommene Punkte, dann ist $MPNQ$ jenes von den vier durch diese beiden Punkte gehenden Tangenten gebildete Viereck. Es ist also zu zeigen, dass

$$MQ + NP = NQ + MP.$$

Dieselbe Gleichung können wir auf folgende Weise schreiben:

$$MD - QD + NB + PB = NC - QC + MA + PA,$$

und sie reducirt sich, da

$$QD = QC, \quad PB = PA,$$

auf folgende:

$$MD + NB = NC + MA$$

oder

$$MD - MA = NC - NB.$$

Indem wir für die einzelnen Glieder dieser Gleichung äquivalente Werthe substituiren, erhalten wir:

$$\left.\begin{matrix} ME - MF \\ EF \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} NG - NH \\ GH, \end{matrix}\right.$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit in die Augen springt.

Wir haben in dem Vorstehenden die beiden Punkte M und N auf den beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kreise beliebig angenommen. An die Stelle der beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten können wir aber auch die beiden *inneren* setzen. Man sieht leicht ein, dass der Beweis für diese Annahme unmittelbar in dem Vorstehenden schon enthalten ist, wenn man statt der beiden Kreise C und C' die Kreise K und C' als gegeben betrachtet.

Auf den *zweiten Fall* bezieht sich die Figur 42[1]), in der M und N die zwei auf den beiden hier nothwendig *inneren* gemeinschaftlichen Tangenten angenommenen Punkte sind. Es ist zu beweisen, dass die durch M und N gehenden Tangenten MP, MQ, NP und NQ alle vier einen und denselben Kreis K berühren, und dies kommt bekanntlich darauf hinaus zu zeigen, dass

$$MQ - MP = NP - NQ.$$

Dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$MD - QD - PA + MA = NB - PB - QC + NC.^{2})$$

Es ist aber

$$QD = QC, \quad PA = PB,$$

$$MD = ME, \quad MA = MB, \quad NC = NG, \quad NB = NH,$$

folglich reducirt sich die obige Gleichung auf die folgende:

$$ME + MF = NH + NG,$$

deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet.

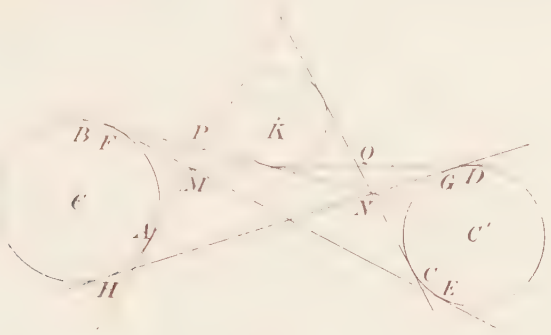

Fig. 42.

2. In dem Falle der ersten Figur (Fig. 41) schneiden sich zwei äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente der drei gegebenen, paarweise zusammengestellten Kreise in einem und demselben Punkte M, und die drei entsprechenden (zwei äussere und eine innere) gemeinschaftlichen Tangenten in einem und demselben andern Punkte N. In dem Falle der zweiten Figur (Fig. 42) schneiden sich sowohl in M als auch in N drei innere gemeinschaftliche Tangenten. Durch theilweise Umkehrungen erhalten wir hiernach folgenden Satz aus dem eben bewiesenen.

Wenn zwei äussere und eine innere oder wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen in einem und

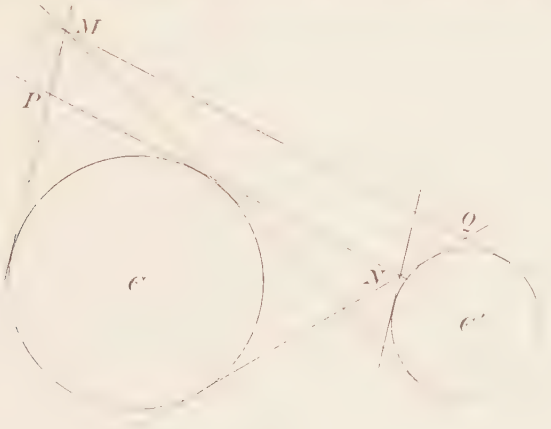

Fig. 43.

demselben Punkte sich schneiden, so thun dasselbe die drei jenen entsprechenden Tangenten.

3. Beiläufig bemerken wir, dass aus dem Satze der vorigen Nummer der folgende als specieller Fall (Fig. 43) sich ergiebt.

Wenn irgend zwei Tangenten zweier gegebener Kreise C und C' sich in irgend einem Punkte M einer inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente dieser Kreise schneiden, so schneiden sich noch zwei andere Tangenten, die jenen beiden in M sich schneidenden parallel sind, in irgend einem zweiten Punkte N der andern inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangenten.

Um uns nämlich von der Wahrheit dieses Satzes zu überzeugen, brauchen wir bloss in der Figur 42 den Kreis K als dadurch bestimmt anzusehen, dass er in den Winkel PNQ beschrieben ist und dann den Radius dieses Kreises immer mehr zunehmen zu lassen.

4. Wenn man für den Punkt N (Fig. 44 und 45) den Durchschnitt einer äussern und einer innern gemeinschaftlichen Tangente der beiden gegebenen Kreise C und C' nimmt, so erhält man aus der ersten Nummer folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem Punkte M einer äussern oder innern gemeinschaftlichen Tangente zweier gegebenen Kreise noch zwei Tangenten an dieselben legt, so bilden dieselben mit einer beliebigen der beiden innern oder äussern gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise ein Dreieck MPQ, und ein diesem Dreieck eingeschriebener Kreis berührt die letztbezeichnete innere oder äussere gemeinschaftliche Tangente in demjenigen Punkte N, in welchem dieselbe von derjenigen äussern oder innern gemeinschaftlichen Tangente, auf welcher der Punkt M nicht liegt, geschnitten wird.

Die Aussage dieses Satzes unterscheidet wiederum zwei Fälle; auf den ersten bezieht sich Figur 44, und der bezeichnete Kreis be-

Fig. 44.

rührt zwei Seiten des Dreiecks, PM und PQ, in ihren Verlängerungen, und zwar die letztere dieser Seiten im Punkte N. Figur 45 bezieht sich auf den zweiten Fall; der in Rede stehende Kreis ist dem Drei-

ecke PMQ im engern Sinne des Wortes eingeschrieben und berührt die Seite PQ im Punkte N.

Fig. 45.

5. Wenn wir insbesondere annehmen, dass die beiden Kreise C und C' sich berühren, so fallen zwei innere oder zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten derselben zusammen, und wir erhalten aus der ersten Nummer folgenden Satz:

Wenn irgend zwei gegebene Kreise sich berühren und man legt von irgend zwei Punkten der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkte noch vier Tangenten an die beiden Kreise, so giebt es immer einen solchen dritten Kreis, der diese vier Tangenten zugleich berührt.

Dieser letzte Satz ist auch als ein besonderer Fall eines andern allgemeineren Satzes anzusehen, in welchem an die Stelle der beiden sich berührenden Kreise irgend zwei beliebige Kreise treten, und an die Stelle der Tangente im Berührungspunkte die (wirkliche oder ideale) gemeinschaftliche Chorde tritt. Dieser Satz seinerseits ist eine unmittelbare Folge daraus, dass die von demselben Punkte der gemeinschaftlichen Chorde irgend zweier gegebener Kreise an dieselben gelegten und in den Berührungspunkten begrenzten Tangenten einander gleich sind.

6. Für den besonderen Fall, dass die beiden Kreise C und C' (Fig. 46) sich berühren, ergiebt sich aus dem Satze der 4. Nummer der nachstehende:

Wenn man von irgend einem Punkte M der Tangente im Berührungspunkte zweier sich ausserhalb berührender Kreise C und C' noch zwei Tangenten an dieselben legt, so bilden diese Tangenten mit einer beliebigen der beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise ein Dreieck, dessen letztbezeichnete Seite von dem eingeschriebenen Kreise in ihrem Durchschnitt N mit der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkte berührt wird.

Die unmittelbare Umkehrung des vorstehenden Satzes giebt den folgenden:

Wenn man irgend einen Kreis c'' beschreibt, der mit zweien gegebenen, sich ausserhalb berührenden C und C' eine gemeinschaftliche äussere

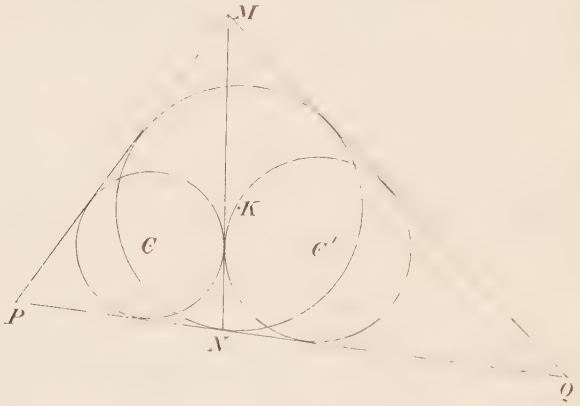

Fig. 46.

Tangente hat und diese Tangente in demjenigen Punkte N berührt, in welchem die innere gemeinschaftliche Tangente von C und C' in dieselbe einschneidet, so schneiden sich in irgend einem Punkte M der letztgenannten Tangente die beiden noch übrigen äusseren gemeinschaftlichen Tangenten des dritten Kreises und der beiden gegebenen.

B. Geometrische Construction der Malfatti'schen Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt.

7. Es seien irgend zwei sich ausserhalb berührende Kreise C und C' (Fig. 47) gegeben. Man ziehe eine ihrer äusseren gemeinschaftlichen Tangenten PQ. Man ziehe NR', die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte derselben beiden Kreise. R' sei der Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien PQ und NR'. Es sei c'' irgend ein Kreis, welcher PQ in R' so berühre, dass die Mittelpunkte der drei Kreise C, C' und c'' auf derselben Seite von PQ liegen. Alsdann schneiden sich die beiden noch übrigen äusseren gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises c'' und der beiden Kreise C und C', nämlich $Q'N$ und $P'N$, in irgend einem Punkte N der geraden Linie $R'N$ (nach der 6. Nummer). Man beschreibe ferner einen neuen Kreis C'', welcher die beiden Kreise C und C' ausserhalb berührt, und zwar den erstgenannten Kreis C auf $Q'N$ und folglich den letztgenannten C' auf $P'N$. Man ziehe ferner PR und QR, äussere gemeinschaftliche

Tangenten der Kreise C und C'', C' und C'' Es werde PR von $Q'N$ in Q', und QR von $P'N$ in P' geschnitten. Man beschreibe ferner einen Kreis c', welcher PR in Q' und ausserdem $P'N$ berührt. Derselbe Kreis wird alsdann auch $R'N$ berühren (nach der 6. Nummer). Und ebenso können wir endlich einen letzten Kreis c beschreiben, welcher die drei geraden Linien $Q'N$, $R'N$ und QR, und zwar die letztgenannte im Punkte P' berührt.

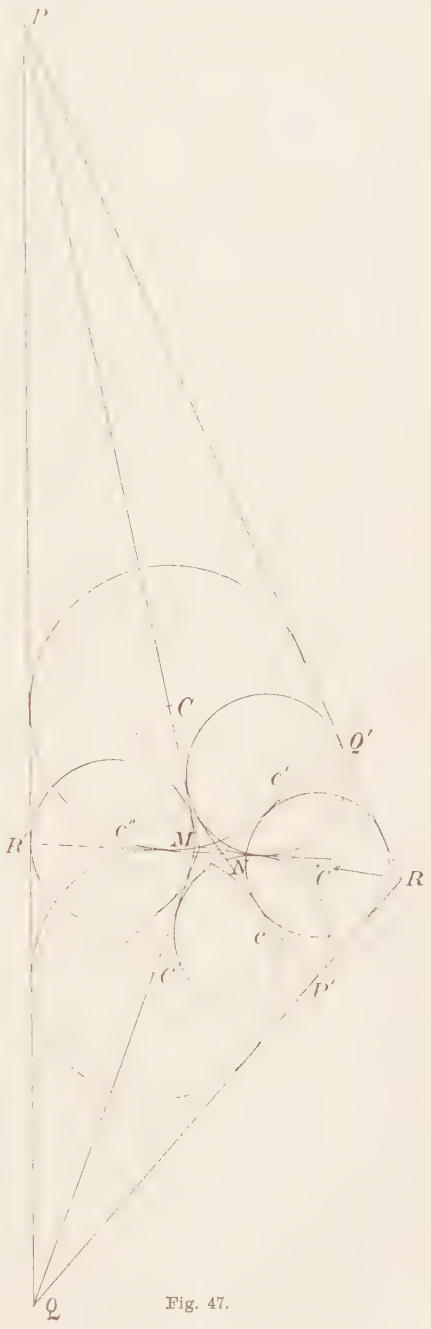

Fig. 47.

Wenn wir das Ganze der eben angezeigten Construction zusammenfassen, so haben wir ein Dreieck PQR und drei Kreise C, C' und C'', von denen jeder die beiden übrigen und zugleich zwei Seiten des Dreiecks berührt. Die drei gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten je zweier dieser drei Kreise, nämlich $R'N$, $Q'N$ und $P'N$, schneiden sich in demselben Punkte, in N. Wir haben ferner drei Kreise c'', c', c, von denen jeder eine der drei Dreiecksseiten PQ, PR, QR in demjenigen Punkte R', Q', P' berührt, in welchem dieselbe Dreiecksseite resp. von $R'N$, $Q'N$, $P'N$ geschnitten wird. Die drei letztgenannten geraden Linien $R'N$, $Q'N$ und $P'N$ sind zugleich innere gemeinschaftliche Tangenten derselben paarweise zusammengestellten Kreise, der Kreise c' und c, c und c'', c'' und c'. Da diese drei geraden Linien in demselben Punkte, in N, sich schneiden, so gehen (nach der 2. Nummer) auch die drei übrigen innern gemeinschaftlichen

Tangenten derselben Kreise durch einen und denselben Punkt. Dieser Punkt sei M. Wenn wir ferner die Kreise c, C' und c'' zusammenstellen, so sehen wir, dass zwei äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente dieser drei Kreise, nämlich $P'N$, $R'N$ und $Q'N$, alle drei in N sich vereinigen. Dasselbe thun also (wiederum nach der 2. Nummer) in irgend einem andern Punkte die drei entsprechenden gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise, nämlich PQ, QR und die eine jener drei durch den Punkt M gehenden geraden Linien, die wir also MQ nennen können. Die drei Kreise c'', c', c sind also solchen drei Dreiecken PMQ, PMR, QMR eingeschrieben, die entstehen, wenn man vom Punkte M aus drei gerade Linien nach den drei Winkelpunkten des Dreiecks PQR zieht.

Nach der vorstehenden Analyse ist also die Construction der drei Kreise C, C' und C'', von denen jeder die beiden übrigen und zugleich zwei Seiten des Dreiecks PQR, das wir nun als ursprünglich gegeben betrachten wollen, berührt, auf die Construction der drei Kreise c, c', c'', und die Construction dieser drei Kreise auf die Bestimmung des Punktes M zurückgeführt. Man braucht sogar nur einen der drei Kreise c, c', c'', etwa den letzten, zu construiren und die beiden Punkte Q' und P' zu bestimmen, in welchen die beiden andern, c' und c, die bezüglichen Seiten des gegebenen Dreiecks PR und QR berühren. Diese Berührungspunkte erhält man sehr leicht, da bekanntlich die Differenz von RM und QM z. B. der Differenz von RP' und QP' gleich ist. *Der Punkt M ist derjenige Punkt, in welchem diejenigen drei geraden Linien, welche die Innenwinkel des gegebenen Dreiecks PQR halbiren, zusammentreffen.**) Hiernach ergiebt sich folgende Construction des Malfatti'schen Problems.

1) *Man halbire die drei Innenwinkel des gegebenen Dreiecks PQR durch drei gerade Linien PM, QM und RM. Diese drei geraden Linien schneiden sich in M und theilen das gegebene Dreieck in drei neue Dreiecke.*

2) *Man beschreibe in ein beliebiges dieser neuen Dreiecke, PMQ den Kreis c'', der PQ in R' berühre, und bestimme diejenigen beiden Punkte Q' und P', in welchen die den beiden andern Dreiecken PMR und PMQ einzuschreibenden Kreise PR und QR berühren.*

3) *Von den beiden Punkten P' und Q' lege man zwei leicht zu unterscheidende Tangenten $P'N$ und $Q'N$ an den Kreis c'', die sich in irgend einem Punkte N schneiden, und verbinde durch eine gerade Linie $R'N$ diesen Punkt mit dem Punkte R'.*

*) [Eine hierzu gehörige Anmerkung befindet sich auf S. 272.]

4) *Alsdann sind $P'N$, $Q'N$ und $R'N$ die Tangenten in den Berührungspunkten je zweier der drei gesuchten Kreise und theilen mithin das gegebene Dreieck in drei diesen Kreisen umschriebene Vierecke.**)

8. Mit der in dem Vorstehenden enthaltenen Construction der Malfatti'schen Aufgabe (Fig. 47) sind noch zwei andere Constructionen derselben Aufgabe verwandt, die ich in dem Folgenden kurz behandeln will. Nach der obigen Construction werden die drei gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten je zweier der drei gesuchten Kreise C, C' und C'', nämlich $R'N$, $Q'N$ und $P'N$ bestimmt. Dies geschieht, indem man innere gemeinschaftliche Tangenten der drei Hilfskreise c, c' und c'' construirt, eine Construction, die sich durch die Bestimmung der drei Punkte P', Q' und R' vereinfachen lässt. Dieselben drei geraden Linien kann man aber auch durch die unmittelbare Construction des Punktes N bestimmen. Dies ist leicht. Zuerst bestimme man zu diesem Ende wie oben die drei Punkte P', Q' und R'. Es ist alsdann, indem man $P'N = r$, $Q'N = r'$ und $R'N = r''$ setzt:

$$r - r' = RP' - RQ',$$
$$r - r'' = QP' - QR',$$
$$r' - r'' = PQ' - PR'.$$

Der Punkt N liegt also zugleich auf drei vollkommen bestimmten Hyperbelzweigen, deren Brennpunkte je zwei der drei Punkte P', Q' und R' sind, und lässt sich hiernach leicht bestimmen. Man kann diese Bestimmung auf die Construction eines Kreises zurückführen, der drei Kreise berührt, deren Mittelpunkte P', Q' und R' sind, und deren Radien sich unmittelbar ergeben. Einen dieser Radien können wir beliebig annehmen und insbesondere auch gleich Null setzen. Es reducire sich hiernach derjenige Kreis, dessen Mittelpunkt (P') auf der

*) Diese Construction ist im Wesentlichen keine andere als die von Herrn Steiner im ersten Bande des Crelle'schen Journals (S. 178) aufgestellte. Es findet sich daselbst keine Andeutung eines Beweises. Die einleitenden Worte des Verfassers: „Um die Fruchtbarkeit der in den Paragraphen (I, II, III) aufgestellten Sätze an einem dazu geeigneten Beispiele zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zugleich die Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe, jedoch ohne Beweis, hinzu", könnten demjenigen, der, wie ich von mir bekennen muss, keine Idee davon hat, wie die Construction jener Aufgabe dem Wesentlichen nach auf den in dem angeführten Paragraphen entwickelten bekannten Sätzen über Chordalen, zugeordnete Pole und Aehnlichkeitspunkte beruhen möge, den Gedanken aufdrängen, dass die gegebene Construction nicht bewiesen sei. Das Verdienst der Erfindung bleibt, es liegt in der Combination der Kreise c'', c' und c mit den Kreisen C, C' und C''.

kürzesten Seite des gegebenen Dreiecks liegt, auf einen Punkt. Alsdann erhält man für die Radien der beiden andern Kreise, deren Mittelpunkte Q' und R' sind, folgende Werthe:

$$RQ' - RP' \text{ und } QR' - QP'.$$

Hiernach ergiebt sich folgende neue Construction der Malfattischen Aufgabe:

1) *Man bestimme wie oben die drei Punkte P', Q' und R' und construire zu denjenigen beiden Punkten Q' und R' [3]), die nicht auf der längsten Seite des gegebenen Dreiecks PQR liegen, als Mittelpunkten zwei Kreise mit Radien, die resp. gleich sind den Unterschieden von RQ' und RP', und von QR' und QP'.*

2) *Man suche den Mittelpunkt eines leicht zu unterscheidenden derjenigen beiden Kreise, welche durch den Punkt P' gehen, und die beiden eben bezeichneten Kreise ausserhalb berühren. Diesen Mittelpunkt, den Punkt N, braucht man alsdann bloss mit den drei Punkten P', Q' und R' durch gerade Linien zu verbinden, um das gegebene Dreieck, wie oben, in drei den gesuchten Kreisen umschriebene Vierecke zu theilen.*

9. Wir können endlich auch unmittelbar die Mittelpunkte der drei gesuchten Kreise construiren. Es liegen dieselben zuvörderst auf den drei Halbirungslinien PM, QM und RM. Dann erhalten wir ferner, nach dem Obigen, sogleich die drei Punkte P', Q' und R', diejenigen Punkte nämlich, in welchen die Tangenten in den Berührungspunkten je zweier der drei gesuchten Kreise in diejenige Dreiecksseite einschneiden, welche dieselben beiden Kreise berührt. Alles ist also auf die Auflösung folgender Aufgaben zurückgeführt.

„Wenn ein Dreieck QPM (Fig. 48), und auf einer Seite PQ desselben irgend ein Punkt R' gegeben ist, zwei solche Kreise zu beschreiben, die einander ausserhalb und beide die Seite PQ berühren, deren innere gemeinschaftliche Tangente diese Seite in dem gegebenen Punkte R' schneidet, und deren Mittelpunkte auf den beiden andern Dreiecksseiten liegen."

Um diese Aufgabe direct anzugreifen, sei R' der Anfangspunkt der Coordinaten, $R'X$ und $R'Y$ seien die rechtwinkligen Coordinatenaxen. Wir wollen die gleichen Entfernungen der Berührungspunkte B und B' vom Anfangspunkte ξ nennen, und

$$\text{cotang}\, MPX = a, \quad \text{cotang}\, MQX = a', \quad R'P = b, \quad R'Q = b'$$

setzen. Alsdann erhalten wir:

$$ay - x - b = 0,$$
$$a'y - x + b' = 0,$$

für die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien MP und MQ, mithin für die Ordinaten der gesuchten Mittelpunkte, die wir η und η' nennen wollen:

$$\eta = -\frac{\xi - b}{a}, \qquad \eta' = \frac{\xi - b'}{a'}.$$

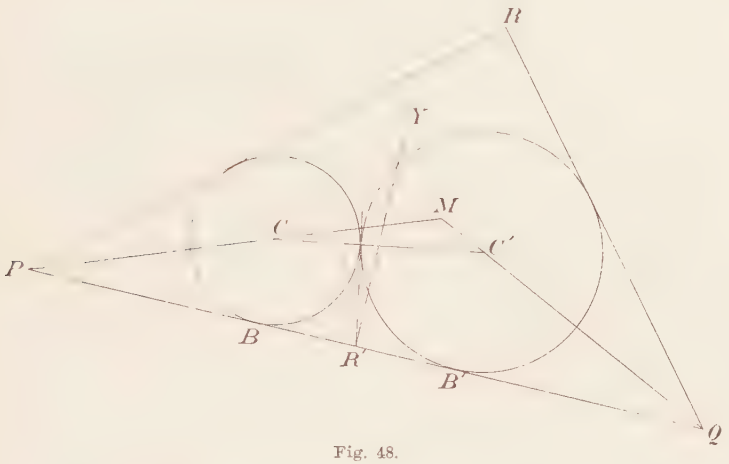

Fig. 48.

Die Bedingungen der Aufgabe bringen, wie in der Note zur 7. Nummer, mit sich, dass

$$\eta\eta' = \xi^2,$$

und hiernach ergiebt sich, indem wir substituiren, folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung von ξ:

$$(1 + aa')\xi^2 - (b + b')\xi + bb' = 0.$$

Wir wollen uns hier nicht mit der geometrischen Construction dieser Gleichung beschäftigen. Unser Zweck war bloss, eine einfache Gleichung aufzustellen, von deren Auflösung das Malfatti'sche Problem abhinge. Wir werden auf dieselbe noch zurückweisen, wenn in einem späteren Paragraphen von den verschiedenen sich paarweise zusammengruppirenden Fällen des in seiner ganzen Ausdehnung genommenen Problems die Rede sein wird.

Wenn

$$1 + aa' = 0,$$

das heisst, wenn die beiden geraden Linien PM und QM auf einander senkrecht stehen, und folglich an die Stelle des ursprünglich gegebenen Dreiecks PQR zwei parallele Linien, die von irgend einer dritten geraden Linie geschnitten werden, treten, so reducirt sich die letzte

Gleichung, indem ein Werth von ξ unendlich wird, auf folgende des ersten Grades:

$$\xi = \frac{bb'}{b+b'} = \frac{R'P \cdot R'Q}{PQ}.$$

Anmerkung zu S. 268.

In dieser Note will ich einen algebraisch-analytischen Beweis der vorstehenden Behauptung des Textes hinzufügen. Es kommt hierbei offenbar Alles darauf an, zu zeigen, dass, wenn irgend zwei sich ausserhalb berührende Kreise C und C' (Fig. 49) gegeben sind und man einen beliebigen Kreis c'' construirt, der eine äussere gemeinschaftliche Tangente PQ jener beiden Kreise in demjenigen Punkte R' berührt, in welchen die gemeinschaftliche innere Tangente derselben Kreise C und C' einschneidet,

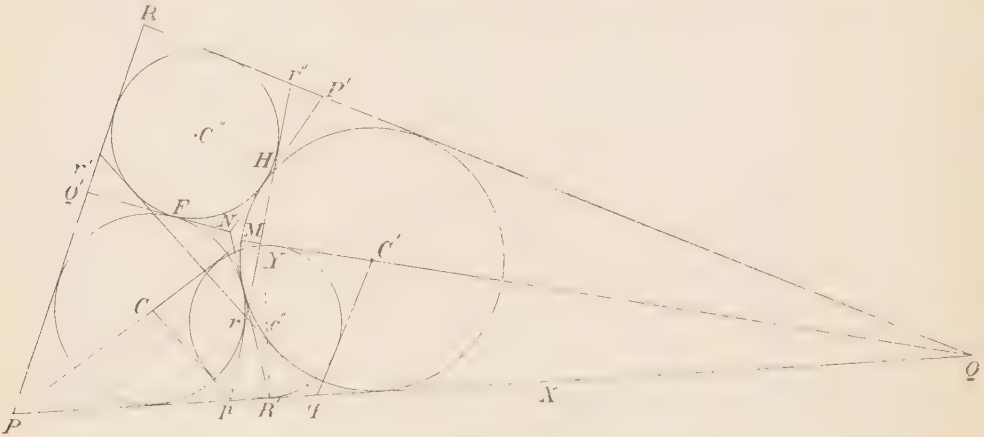

Fig. 49.

wenn man ferner die beiden noch übrigen äusseren gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises c'' und der Kreise C und C', nämlich NF und NH zieht und endlich einen Kreis C'' construirt, der die beiden Kreise C und C' auf den eben gezogenen geraden Linien in F und H berührt, dass alsdann z. B. eine äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise C'' und C' und eine durch den Mittelpunkt des letztern Kreises C' an den Kreis c'' gelegte Tangente sich in einem Punkte von PQ, der gemeinschaftlichen Tangente von C und C', schneiden.

Wir wollen zu diesem Ende zuvörderst den Kreis C'' bestimmen. Wenn wir $R'Q$ zur ersten und $R'Y$ zur zweiten Coordinatenaxe nehmen, so können wir die Kreise C' und C durch folgende Gleichungen darstellen:

$$(1) \qquad (y - b')^2 + (x - a)^2 = b'^2$$

$$(2) \qquad (y - b)^2 + (x + a)^2 = b^2.$$

Für ihre gemeinschaftliche Chorde ergiebt sich alsdann:

$$(3) \qquad (b' - b)y + 2ax = 0,$$

und diese Chorde geht den obigen Voraussetzungen gemäss durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Um auszudrücken, dass die beiden Kreise (1) und (2) sich ausserhalb berühren, erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$(b' - b)^2 + 4a^2 = (b + b')^2,$$

die sich auf

$$a^2 = bb' \tag{4}$$

reducirt.

Die Gleichung des Kreises c'' sei folgende:

$$(y - \beta)^2 + x^2 = \beta^2. \tag{5}$$

Hiernach wollen wir die Gleichung der geraden Linie NH, der gemeinschaftlichen Tangente der Kreise C' und c'', bestimmen. Wenn

$$y = mx + n$$

diese Gleichung ist, so erhalten wir zur Bestimmung ihrer beiden Constanten, wie man leicht sieht, folgende beide Gleichungen:

$$-\frac{\beta - n}{\sqrt{1 + m^2}} = \beta,$$

$$-\frac{b' - am - n}{\sqrt{1 + m^2}} = b';$$

und hiernach:

$$((b' - \beta)^2 - a^2)n = -2\beta a^2,$$

$$((b' - \beta)^2 - a^2)m = -2(b' - \beta)a.$$

Die gesuchte Gleichung für HN ist also:

$$((b' - \beta)^2 - a^2)y + 2(b' - \beta)ax + 2\beta a^2 = 0. \tag{6}$$

Für NF ergiebt sich hieraus sogleich, indem man das Zeichen von a ändert und b' mit b vertauscht, folgende Gleichung:

$$((b - \beta)^2 - a^2)y - 2(b - \beta)ax + 2\beta a^2 = 0. \tag{7}$$

Wenn man die beiden letzten Gleichungen von einander abzieht, erhält man die Gleichung (3) in Uebereinstimmung mit der 6. Nummer.

Für die beiden durch die Mittelpunkte von C' und C gehenden und respective auf NH und NF senkrecht stehenden geraden Linien, deren Durchschnitt der Mittelpunkt des Kreises C'' ist, ergeben sich nach bekanntem Verfahren folgende Gleichungen:

$$2(b' - \beta)ay - ((b' - \beta)^2 - a^2)x - a(b'^2 + a^2 - \beta^2) = 0,$$

$$2(b - \beta)ay + ((b - \beta)^2 - a^2)x - a(b^2 + a^2 - \beta^2) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für die Mittelpunktscoordinaten des Kreises C'', die wir durch zwei Accente unterscheiden wollen:

$$x'' = -\frac{(b' - b)a}{b' + b - 2\beta}, \tag{8}$$

$$y'' = \frac{2a^2 - \beta^2}{b' + b - 2\beta}. \tag{9}$$

Der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise C'' und C' ist hiernach gleich

$$\sqrt{(y''-b')^2+(x''-a)^2}=\frac{a^2+(b'-\beta)^2}{b'+b-2\beta},$$

und der Radius des Kreises C'', den wir r'' nennen wollen:

$$r''=\frac{a^2+(b'-\beta)^2}{b'+b-2\beta}-b'=\frac{\beta^2}{b'+b-2\beta}. \tag{10}$$

Die Rationalität der letzten Ausdrücke verdient bemerkt zu werden.

Um nun unsere Absicht zu erreichen, ist es offenbar genügend, zu zeigen, dass eine äussere gemeinschaftliche Tangente RQ der Kreise C'' und C' dieselbe *Richtung* hat, als eine gerade Linie, welche mit der ersten Coordinatenaxe, der geraden Linie PQ, einen Winkel bildet, der doppelt so gross ist als derjenige, welchen eine durch den Mittelpunkt von C' an den Kreis c'' gelegte Tangente $C'M$ mit derselben Axe bildet.

Die Gleichung der äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise C'' und C' erhalten wir, wenn wir die Constanten in der Gleichung

$$y=px+q$$

durch folgende beide Gleichungen bestimmen:

$$\frac{b'-ap-q}{\sqrt{1+p^2}}=-b',$$

$$\frac{y''-x''p-q}{\sqrt{1+p^2}}=-r''.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen gliedweise in einander dividiren, so erhalten wir eine lineare Gleichung zwischen p und q und aus dieser:

$$q=\frac{b'(r''-y'')-(r''a-b'x'')p}{r''-b'}.$$

Substituiren wir diesen Werth für q in die erste der vorstehenden Gleichungen und schreiben dann für x'', y'' und r'' ihre Werthe bei (8), (9) und (10), so kommt:

$$a^2-(b'-\beta)^2+2a(b'-\beta)p=[(b'-\beta)^2+a^2-2\beta^2]\sqrt{1+p^2}$$

und durch Fortschaffung des Wurzelzeichens ergiebt sich hieraus zur Bestimmung der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welchen die äussere gemeinschaftliche Tangente von C'' und C' mit der ersten Axe bildet, folgende quadratische Gleichung in p:

$$\begin{cases}[(b'-\beta)^4-2(a^2+2\beta^2)(b'-\beta)^2+(a^2-2\beta^2)^2]p^2\\ +4a(b'-\beta)[(b'-\beta)^2-a^2]p+4(a^2-\beta^2)[(b'-\beta)^2-\beta^2]=0.\end{cases} \tag{11}$$

Man sieht, dass die beiden Wurzeln dieser Gleichung sich auf die beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten von C'' und C' beziehen.

Von der andern Seite erhalten wir zunächst für die durch den Punkt (b', a), den Mittelpunkt des Kreises C', an den Kreis c'' gelegten Tangenten bekanntlich folgende Gleichung:

$$(y''-\beta)(y-\beta)+x''x=\beta^2, \tag{12}$$

wobei die beiden Constanten y'' und x'' durch folgende beiden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$(13)\qquad \begin{cases} (y''-\beta)(b'-\beta)+ax''=\beta^2, \\ (y''-\beta)^2+x''^2=\beta^2. \end{cases}$$

Die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, welchen die Tangente (12) mit der ersten Coordinatenaxe bildet und den wir φ nennen wollen, ist

$$-\frac{x''}{y''-\beta},$$

und aus den Gleichungen (13) erhalten wir unmittelbar den Werth dieses Ausdrucks, wenn wir zuvor die erste derselben mit $(y''-\beta)$, die zweite durch $(y''-\beta)^2$ dividiren und dann $\left(\frac{1}{y''-\beta}\right)$ eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{a(b'-\beta)\pm\beta\sqrt{(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2}}{a^2-\beta^2}.$$

Hierdurch erhält man:

$$\frac{1}{\operatorname{tang}2\varphi}=\frac{1-\operatorname{tang}^2\varphi}{2\operatorname{tang}\varphi}=$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\frac{(a^2+\beta^2)(b'-\beta)^2-(a^2-2\beta^2)(a^2-\beta^2)\pm 2a\beta(b'-\beta)\sqrt{(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2}}{(a^2-\beta^2)[a(b'-\beta)\pm\beta\sqrt{(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2}},$$

oder, wenn man mit $a(b'-\beta)\mp\beta\sqrt{(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2}$ Nenner und Zähler multiplicirt, wonach beide durch $(a^2-\beta^2)$ theilbar werden:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{tg}2\varphi}= \\ -\tfrac{1}{2}\,\dfrac{a(b'-\beta)[(b'-\beta)^2-a^2]\pm\beta[(b'-\beta)^2+a^2-2\beta^2]\sqrt{(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2}}{(a^2-\beta^2)[(b'-\beta)^2-\beta^2]}. \end{cases}$$

Für $\operatorname{tang}2\varphi$ erhält man endlich, indem man den reciproken Werth des vorstehenden Ausdruckes nimmt und dann den Nenner rational macht, wodurch Nenner und Zähler durch $(a^2-\beta^2)[(b'-\beta)^2-\beta^2]$ theilbar werden:

$$(15)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}2\varphi= \\ \dfrac{a(b'-\beta)[(b'-\beta)^2-a^2]\mp\beta[(b'-\beta)^2+a^2-2\beta^2]\sqrt{(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2}}{(b'-\beta)^4-2(a^2+2\beta^2)(b'-\beta)^2+(a^2-2\beta^2)^2}. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (14) und (15) ist ersichtlich, dass die beiden Werthe für $\operatorname{tang}2\varphi$ die beiden Wurzeln der Gleichung (11) sind.

Dem hiermit bewiesenen Satze können wir auch folgende Aussage geben:

Wenn irgend drei Kreise C, C′ und C″, von welchen jeder die beiden andern ausserhalb berührt, gegeben sind, und man verbindet die beiden Durchschnittspunktepaare der äussern gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises C″ und der Kreise C′ und C mit einer beliebigen äussern gemeinschaftlichen Tangente PQ der letztgenannten beiden Kreise, nämlich die beiden Punktepaare Q und q, P und p, durch vier gerade Linien mit den Mittelpunkten der be-

züglichen Kreise C' und C, so berühren diese geraden Linien alle vier einen und denselben Kreis c'', der ausserdem auch von den beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises C'' und der Kreise C' und C und endlich auch noch von der äusseren gemeinschaftlichen Tangente PQ der beiden Kreise C' und C, und zwar in demjenigen Punkte berührt wird, in welchem in die letztgenannte äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise C' und C die innere gemeinschaftliche Tangente derselben Kreise einschneidet.

Ich gehe hier in kein Detail weiter ein und beschränke mich auf den Fall der vorliegenden Figur. In dieser Figur erfüllen, beiläufig bemerkt, die drei Kreise C, C' und C'' die Bedingungen der Malfatti'schen Aufgabe in Beziehung auf die vier verschiedenen Dreiecke PQR, Pqr', Qpr'' und pqr, wenn wir die genannte Aufgabe in ihrer weitern Bedeutung nehmen.

Sobald man den vorstehenden Satz in seine gehörige Verbindung bringt, ist nicht zu bezweifeln, dass man zu einem leichtern Beweise desselben gelangt. Denn ich bin geneigt, jedesmal da unnöthige Weitläufigkeiten vorauszusetzen, wo, wie in dem Vorhergehenden, um einen vorliegenden Satz zu beweisen, Grössenbestimmungen gemacht werden, die aus der Aussage des Satzes wieder verschwinden. In Beziehung auf die im Texte gegebene Analyse des Malfatti'schen Problems wäre ein einfacher rein geometrischer Beweis wünschenswerth. Vielleicht giebt es auch eine allgemeine analytische Schlussweise, die uns aller algebraischen Entwicklung überhebt. Ich werde in dem sechsten Paragraphen dieser Aphorismen hierauf zurückkommen.*) Um bis dahin meinerseits den Schein zu vermeiden, irgend eine Behauptung unbewiesen gewagt zu haben, füge ich in dieser Note den obigen Beweis hinzu.

*) [S. 284 dieser Ausgabe.]

18.

Analytisch-geometrische Aphorismen V.

(Crelle's Journal, Band 11, S. 219—225. 1831.)

Ueber ein neues Uebertragungsprincip.

1. „Alle Sätze, welche auf eine beliebige Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit geraden Linien oder von geraden Linien unter sich Bezug haben, und blosse Situations- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar auf eine Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit solchen Kreisen, die alle durch einen festen Punkt gehen, oder von letztbezeichneten Kreisen unter sich übertragen."

Ich werde hier, wo ich einzig und allein Constructionen der Elementargeometrie im Auge habe, nur diesen besonderen Fall eines allgemeinen Uebertragungsprincipes discutiren und andeuten, wie er aus bekannten Sätzen und Constructionen neue finden lehrt. Die nachfolgenden analytischen Betrachtungen könnte man auch mit leichter Mühe durch rein geometrische ersetzen.

2. Man weiss, dass wenn ein Kreis gegeben ist, irgend zwei Punkte, welche beide auf derselben durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehenden geraden Linie liegen und die Eigenschaft haben, dass einer derselben auf der Polare des andern liegt, *zugeordnete Pole in Beziehung auf den gegebenen Kreis genannt werden.* Der geometrische Ort für die zugeordneten Pole aller Punkte, die auf dem Umfange irgend eines gegebenen Kreises liegen, ist ein neuer Kreis. Die Beziehung der beiden Kreise zu einander ist eine durchaus gegenseitige; ich nenne dieselben in dem Folgenden *zugeordnete Kreise*, und sage, der eine Kreis sei der *Polarkreis* des andern.

Wenn

$$y^2 + x^2 = R^2 \tag{1}$$

die Gleichung des gegebenen Kreises ist, so stellen, wie in der 181. Nummer des ersten Bandes meiner „*Entwicklungen*" gezeigt worden ist, die beiden Gleichungen:

$$(2) \qquad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2,$$

$$(3) \qquad \left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma^2}\varrho^2,$$

irgend zwei zugeordnete Kreise dar, indem wir zugleich in der letzten Gleichung der Kürze halber

$$\beta^2+\alpha^2-\varrho^2=\gamma$$

setzen. Am angeführten Orte ist nachgewiesen worden, dass die beiden zugeordneten Kreise (2) und (3) mit dem Kreise (1) dieselbe gemeinschaftliche Chorde haben, und dass der Mittelpunkt des Kreises (1) entweder der äussere oder der innere homologe Punkt (Aehnlichkeitspunkt) der beiden Kreise (2) und (3) ist, so dass es im Allgemeinen zwei Kreise giebt, in Beziehung auf welche zwei gegebene Kreise zugeordnete sind.

Die Durchschnittspunkte irgend zweier Kreise sind offenbar die zugeordneten Pole der Durchschnittspunkte ihrer beiden Polarkreise. Wenn also mehrere Kreise durch denselben Punkt gehen, so thun ihre Polarkreise ein Gleiches. Wenn zwei oder mehrere Kreise sich berühren, so berühren sich ebenfalls ihre Polarkreise. Wenn vier oder mehrere Punkte auf dem Umfange desselben Kreises liegen, so thun ihre zugeordneten Pole ein Gleiches. Wir sehen ferner, dass wenn überhaupt irgend eine Construction vorliegt, die sich auf Kreise bezieht und von Grössenbestimmungen unabhängig ist, wir sogleich eine entsprechende Construction in der Polarfigur erhalten. Die nähere Discussion dieser Bemerkung giebt das in Rede stehende Princip.

3. Wenn $\gamma=0$ ist, so geht der Kreis (2) durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und die Gleichung (3) verwandelt sich alsdann in folgende:

$$2\beta y+2\alpha x=R^2,$$

und stellt folglich eine gerade Linie dar, nämlich die gemeinschaftliche Chorde der beiden Kreise (1) und (2).

Zu einem Kreise, der durch den Anfangspunkt der Coordinaten, den Mittelpunkt des Hilfskreises, geht, gehört also als zugeordneter Ort eine gerade Linie, und umgekehrt, zu irgend einer gegebenen geraden Linie gehört als zugeordneter Ort ein solcher Kreis, der durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt des Hilfskreises, geht. Wenn die gegebene gerade Linie ein Durchmesser des letztgenannten Kreises ist, so ist sie ihr eigener zugeordneter Ort.

Wir sehen hieraus sogleich, dass jedem Satze über gerade Linien, der bloss Situationsbeziehungen enthält, ein zweiter entspricht, der sich unmittelbar aus dem ersten ergiebt, wenn man statt der geraden Linien

solche Kreise nimmt, die durch irgend einen festen Punkt gehen. Es ist zugleich ersichtlich, dass der erste Satz sich zugleich auf gerade Linien und beliebige Kreise beziehen kann. Alsdann bezieht sich der zweite entsprechende Satz auf solche Kreise, welche alle durch einen festen Punkt gehen und auf beliebige Kreise. Ich begnüge mich hier mit ein paar Beispielen.

I. *Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so gehen die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier dieser drei Kreise durch einen und denselben Punkt.*

II. *Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so schneiden sich diejenigen drei neuen Kreise, welche durch die beiden (reellen oder imaginären) Durchschnittspunkte je zweier der drei gegebenen und überdies noch durch irgend einen gegebenen Punkt gehen, ausserdem noch in einem zweiten festen Punkte.*

I. *Wenn man um einen gegebenen Kreis ein beliebiges Sechseck beschreibt, so schneiden sich die drei Diagonalen dieses Sechsecks in demselben Punkt.*

II. *Wenn man durch einen festen Punkt sechs solche Kreise legt, die einen gegebenen Kreis berühren, so kann man aus den Bogen derselben verschiedene Sechsecke bilden. Legt man durch jenen festen Punkt und die dreimal zwei gegenüberliegenden Winkelpunkte eines solchen Sechsecks drei neue Kreise, so schneiden sich dieselben in einem und demselben zweiten festen Punkte.*

Auf ähnliche Weise könnten wir den Satz vom eingeschriebenen Sechseck, Monge's Satz über die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen, und unzählig viele andere Sätze verdoppeln.

4. Diejenigen beiden Kreise, welche zu irgend zwei gegebenen geraden Linien als Polarkreise gehören und also durch den Mittelpunkt des Hilfskreises gehen, berühren in diesem Punkte offenbar zwei solche gerade Linien, welche den beiden gegebenen parallel sind. Es schneiden sich die beiden Kreise also unter denselben Winkeln als die beiden gegebenen geraden Linien. Zwei Parallellinien entsprechen zwei sich im Mittelpunkte des Hilfskreises berührende Kreise. Wir ziehen hieraus den Schluss, dass auch alle diejenigen Sätze, die auf Kreise und gerade Linien Bezug haben und *Winkel*beziehungen enthalten, sich übertragen lassen.

I. *Die Summe der Innenwinkel jedes geradlinigen Dreiecks beträgt zwei Rechte.*

II. *Wenn ein Dreieck aus den Bogen solcher drei Kreise, welche in*

demselben Punkte sich schneiden, gebildet wird, so beträgt die Summe der drei Winkel dieses Dreiecks zwei Rechte.

Wenn dieser zweite Satz zum unmittelbaren Beweise vorgelegt wäre, so würde man sogleich zum Ziele kommen, wenn man sich des geometrischen Beweises des ersten Satzes erinnerte. Dieser letzte Beweis beruht gewöhnlich darauf, dass man durch einen Winkelpunkt des gegebenen Dreiecks eine gerade Linie der gegenüberliegenden Seite parallel zieht und dann die Sätze über Wechsel- und Gegenwinkel anwendet. Dort erhält man den Beweis ganz ähnlich, wenn man durch den aus den Bogen zweier Kreise gebildeten Mittelpunkt einen neuen Kreis legt, der den dritten Kreis in dem festen Punkte berührt.

I. *Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, sind einander gleich.*

II. *Wenn ein fester Punkt und ein Kreis gegeben sind und man nimmt auf dem Umfange des Kreises zwei neue feste Punkte beliebig an und beschreibt dann zwei neue Kreise, die sich in irgend einem dritten Punkte des Umfanges des gegebenen Kreises schneiden, und von denen jeder durch den gegebenen festen Punkt und durch einen der beiden andern festen Punkte geht, so ist der Durchschnittswinkel solcher zwei Kreise ein constanter, wo auch der dritte Punkt des Umfanges des gegebenen Kreises angenommen werden mag.*

Ich könnte diese Beispiele noch beliebig vervielfältigen, begnüge mich aber beiläufig nur noch zu erwähnen, wie das in Rede stehende Uebertragungsprincip unmittelbar die Lösung der Aufgabe liefert, „in und um einen gegebenen Kreis ein solches n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten Bogen von Kreisen sind, die alle durch einen gegebenen Punkt gehen und dessen Winkel einander gleich sind," wenn sich sonst nur in und um einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Polygon von n Seiten beschreiben lässt.

5. Wenn wir irgend zwei concentrische Kreise durch die beiden Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2,$$
$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho'^2,$$

darstellen, so erhalten wir, indem wir der Kürze halber

$$\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=\gamma,\quad \alpha^2+\beta^2-\varrho'^2=\gamma'$$

nennen, für ihre Polarkreise folgende Gleichungen:

$$\left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma^2}\varrho^2,$$
$$\left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma'}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma'}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma'^2}\varrho'^2,$$

und für die gemeinschaftliche Chorde dieser Kreise, indem wir abziehen und reduciren,

$$2\beta y + 2\alpha x = R^2. \tag{4}$$

Aus der Form dieser Gleichung, in der weder ϱ noch ϱ' vorkommt, ist ersichtlich, dass wenn beliebige concentrische Kreise gegeben sind, alle ihnen zugeordneten Kreise eine gemeinschaftliche Chorde haben, und dass diese Chorde auch die gemeinschaftliche Chorde des Hilfskreises und desjenigen jener concentrischen Kreise ist, der durch den Mittelpunkt desselben geht. Alle Polarkreise haben also dieselben beiden festen Punkte zu zugeordneten Polen. Der eine dieser Punkte ist, was unmittelbar erhellet, derjenige, welcher in Beziehung auf den Hilfskreis zum Mittelpunkte der concentrischen Kreise als zugeordneter Punkt gehört. Er liegt auf der geraden Linie:

$$\beta y + \alpha x = R^2,$$

und steht also von jener gemeinschaftlichen Chorde (4) so weit ab, als der Anfangspunkt der Coordinaten, der Mittelpunkt des Hilfskreises. Dieser Mittelpunkt ist also der zweite jener beiden festen zugeordneten Punkte.

Alle Sätze, welche sich auf concentrische Kreise beziehen und blosse Situations- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich also auf solche Kreise unmittelbar übertragen, welche eine gemeinschaftliche (ideale) Chorde haben. Ich begnüge mich mit einem einzigen Beispiele.

I. Ein solcher Winkel, dessen Scheitel auf dem Umfange eines von zwei gegebenen concentrischen Kreisen fortrückt, während seine beiden Schenkel den andern derselben berühren, bleibt constant.

II. Derjenige Winkel, welcher von zwei Kreisen gebildet wird, die sich in irgend einem Punkte eines von irgend zwei gegebenen, keinen Punkt gemein habenden Kreisen schneiden, den andern dieser Kreise berühren und überdies durch einen derjenigen beiden Punkte gehen, die in Beziehung auf die beiden gegebenen Kreise zugeordnete Pole sind, ist von constanter Grösse.

6. Es seien

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$(y - \beta')^2 + (x - \alpha')^2 = \varrho'^2$$

die Gleichungen irgend zweier gegebener Kreise, und hiernach, indem wir

$$\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = \gamma, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 - \varrho'^2 = \gamma'$$

setzen, die Gleichungen der Polarkreise:

$$\left(y - \frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(x - \frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2 = \frac{R^4}{\gamma}\varrho^2,$$
$$\left(y - \frac{R^2\beta'}{\gamma'}\right)^2 + \left(x - \frac{R^2\alpha'}{\gamma'}\right)^2 = \frac{R^4}{\gamma'^2}\varrho'^2.$$

Wir wollen untersuchen, welche Lage der Hilfskreis in Beziehung auf die beiden gegebenen Kreise haben muss, damit die Radien der beiden Polarkreise einander gleich seien. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$\frac{\gamma}{\varrho} = \pm\frac{\gamma'}{\varrho'},$$

das heisst, wenn

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2}{\varrho} = \pm\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - \varrho'^2}{\varrho'}.$$

Der Mittelpunkt des Hilfskreises ist hierbei der Anfangspunkt der Coordinaten. Verlegen wir die Axen so, dass die Coordinaten jenes Mittelpunktes y und x werden, so kommt:

$$\frac{(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 - \varrho^2}{\varrho} = \pm\frac{(y-\beta')^2 + (x-\alpha')^2 - \varrho'^2}{\varrho'}.$$

Diese Gleichung stellt also, wenn wir y und x als veränderlich betrachten, den Ort derjenigen Punkte dar, in welchem der Mittelpunkt des Hilfskreises angenommen werden muss, damit die Radien der beiden Polarkreise gleich werden. Im zweiten Paragraphen dieser Aphorismen*) haben wir gesehen, dass die letzte Gleichung denjenigen Kreis darstellt, welcher aus einem der beiden homologen Punkte der beiden gegebenen Kreise als Mittelpunkte beschrieben wird und mit diesen Kreisen dieselbe gemeinschaftliche Chorde hat.

Da ferner, wenn irgend *drei* Kreise gegeben sind, diejenigen drei neuen Kreise, welche aus solchen drei homologen Punkten je zweier der drei gegebenen Kreise, die in gerader Linie liegen, als Mittelpunkten beschrieben werden, und mit den bezüglichen gegebenen Kreisen dieselben gemeinschaftlichen Chorden haben, in denselben beiden Punkten sich schneiden (Aphorismen II**)), so können wir einen solchen Durchschnittspunkt zum Mittelpunkte des Hilfskreises nehmen und erhalten alsdann solche drei den gegebenen zugeordnete Kreise, deren Radien einander gleich sind.

Alle Sätze also über zwei und drei beliebige Kreise von *gleichen Radien*, welche nur Lagen- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar übertragen auf beliebige Kreise mit beliebigen Radien. Und überhaupt alle möglichen Constructionen, welche sich auf drei

*) [Vgl. S. 250 dieser Ausgabe.]
**) [Vgl. S. 250 dieser Ausgabe.]

gleiche gegebene Kreise beziehen, in welchen, was das Endresultat betrifft, nur Kreise und gerade Linien in Betracht kommen, lassen sich auch dann ausführen, wenn statt der drei gleichen Kreise irgend drei beliebige gegeben sind.

Es ist zum Beispiel leicht, einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene *gleiche* Kreise gleichartig berührt. Diese Bemerkung liefert uns eine *neue Construction des Apollonischen Problems der Tactionen*, wenn irgend drei *beliebige* Kreise gegeben sind, die von einem vierten berührt werden sollen. Man bestimme auf die eben erwähnte Art den Mittelpunkt eines Hilfskreises, so dass die den gegebenen zugeordneten Kreise einander gleich werden, und construire dann diejenigen beiden Kreise, welche die drei gleichen zugeordneten Kreise gleichartig berühren. Die Polarkreise der beiden so bestimmten Kreise sind alsdann zwei verlangte.

Ich gehe in kein Detail dieser Construction hier ein, weil in dem folgenden Paragraphen, dem der gegenwärtige hier seine Stelle verdankt, noch ein anderes Beispiel der letzten Uebertragungsweise vorkommen wird.

19.

Analytisch-geometrische Aphorismen VI.

(Crelle's Journal, Band 11, S. 356—360. 1831.)

Ueber die Steiner'sche Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe.

1. Bevor ich zur Construction der genannten Aufgabe:

„Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, drei neue solche Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden übrigen und zwei der drei gegebenen berührt,"

übergehe, muss ich den folgenden Satz vorausschicken.

Wenn irgend zwei gegebene Kreise von irgend einem dritten Kreise ausserhalb berührt werden und man von irgend einem Punkte ihrer gemeinschaftlichen Chorde zwei Tangenten an dieselben zieht, so kann man einen neuen Kreis beschreiben, welcher den dritten Kreis in einem seiner beiden Durchschnittspunkte mit der gemeinschaftlichen Chorde und zu gleicher Zeit jene beiden Tangenten berührt.

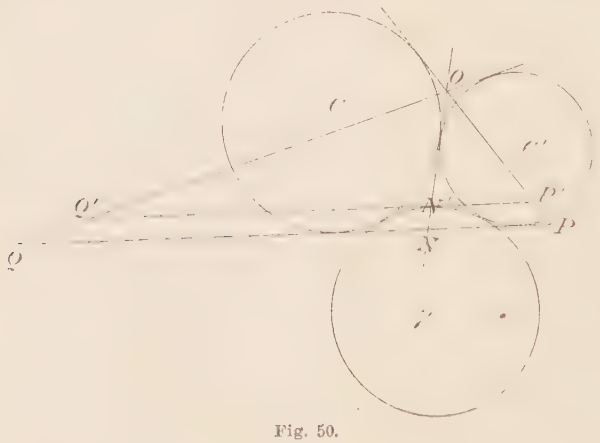

Fig. 50.

Ich beabsichtige bei der Aufstellung dieses Satzes keineswegs Allgemeinheit, und in der Fig. 50 beziehe ich mich, mit blosser Rücksicht auf das Folgende, auch wiederum nur auf den besonderen Fall, dass die beiden gegebenen Kreise sich berühren, und zwar ausserhalb. Hiernach seien C und C' die beiden gegebenen sich ausserhalb berührenden Kreise; γ sei irgend ein Kreis, der beide ausserhalb berührt.

ON sei die gemeinschaftliche Chorde (innere gemeinschaftliche Tangente), PQ eine äussere gemeinschaftliche Tangente der beiden gegebenen Kreise C und C'. Von irgend einem Punkte O auf der gemeinschaftlichen Chorde ON dieser Kreise seien an dieselben die beiden Tangenten OP und OQ gelegt. Dies vorausgesetzt, beruht der Beweis des vorstehenden Satzes darauf, zu zeigen, dass es einen solchen Kreis giebt, der den Kreis γ in N' (einem der beiden Durchschnittspunkte dieses Kreises und der gemeinschaftlichen Chorde ON) und überdies OP und OQ berührt.

Alle beliebigen Kreise, welche zwei gegebene C und C' ausserhalb berühren, werden von der gemeinschaftlichen Chorde dieser beiden gegebenen unter constanten Winkeln geschnitten, und zwar unter denselben Winkeln als die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden letztgenannten Kreise. Dies ergiebt sich sogleich und ist implicite schon in der 195. Nummer des ersten Bandes meiner *„Entwicklungen“* enthalten. Die Tangenten eines solchen Berührungskreises γ, in dessen Durchschnittspunkten mit der gemeinschaftlichen innern Tangente der beiden gegebenen Kreise, sind also den äussern gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise parallel. So ist $Q'P'$, die Tangente in N', der gemeinschaftlichen Tangente QP parallel. Nun berührt aber ferner, nach einem Satze des § IV dieser Aphorismen*), derjenige Kreis, welcher die beiden geraden Linien OP und OQ berührt, und durch N, den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Chorde ON und der gemeinschaftlichen Tangente PQ, geht, zugleich auch diese Tangente in dem letztgenannten Punkte N. Es berührt also auch ein Kreis, welcher dieselben beiden geraden Linien OP und OQ berührt und durch N', einen Punkt von ON, geht, die gerade Linie $P'Q'$, die durch N' geht und mit OP parallel ist, und folglich auch den Kreis γ in N'.

2. Wir wollen nun (Fig. 51) von den beiden sich ausserhalb berührenden Kreisen a und c als gegeben ausgehen und irgend einen dritten Kreis B beschreiben, der beide ausserhalb berührt. Dieser Kreis werde in B' von NB', der gemeinschaftlichen Chorde (Tangente) der Kreise a und c, geschnitten. Man beschreibe ferner einen beliebigen Kreis β, der den Kreis B in B' ausserhalb berührt. Alsdann schneiden sich nach dem vorausgeschickten Satze zwei gemeinschaftliche äussere Tangenten der Kreispaare a und β, c und β, nämlich die beiden geraden Linien $C'N$ und $A'N$, in irgend einem Punkte N von NB', der gemeinschaftlichen Chorde von a und c. Wir können hier-

*) [Vgl. S. 266 dieser Ausgabe.]

nach ferner einen Kreis b beschreiben, welcher die beiden Kreise a und c bezüglich auf NC' und $N'A$ berührt. Wir wollen endlich zwei neue Kreise C' und A mit beliebigen Radien beschreiben, von welchen der erste die beiden Kreise b und a, und der zweite die Kreise b und c ausserhalb berührt. Nach dem an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Satze können wir hiernach endlich noch zwei solche Kreise beschreiben, von welchen der eine, γ, den Kreis C in C', einem

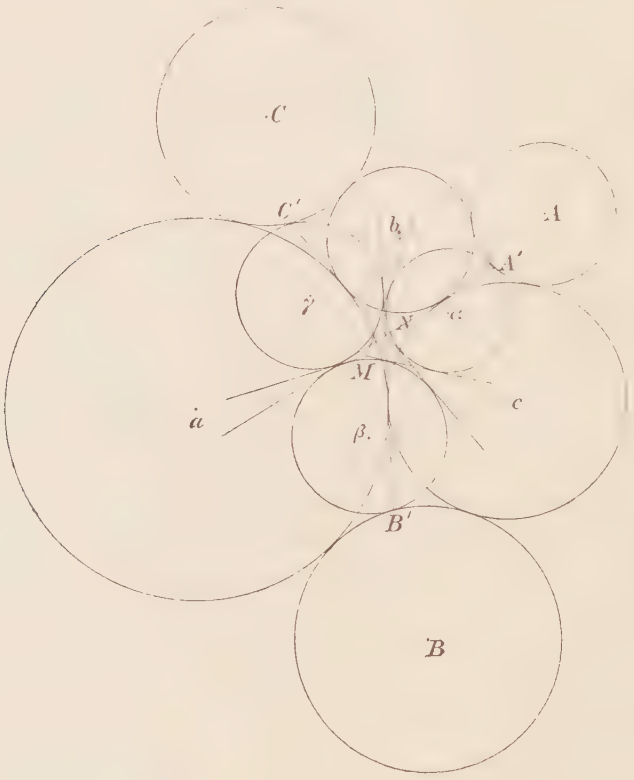

Fig. 51.

Durchschnitte mit NC', und überdies die beiden geraden Linien NA und NB', und von welchen der andere, α, den Kreis A in A', einem Durchschnittspunkte mit NA', und überdies die beiden geraden Linien NB' und NC' berührt.

Auf die Weise sind wir zu einer Construction gekommen, die derjenigen des IV. Paragraphen (Fig. 46) vollkommen analog ist. Es sind bloss die drei Kreise B, A und C an die Stelle der drei geraden Linien BC, AC und AB getreten. In beiden Fällen schneiden sich drei innere gemeinschaftliche Tangenten der Kreise α, β und γ, wenn

wir diese Kreise paarweise zusammenstellen, in einem und demselben Punkte, in N, und hieraus folgt in der letzten Construction wie in der ersten, dass die drei übrigen inneren gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise sich ebenfalls in einem und demselben Punkte, in M schneiden. Es kommt also im vorliegenden Falle wiederum nur darauf an, die drei in M sich schneidenden geraden Linien zu kennen, um, wenn die drei Kreise A, B und C gegeben sind, zunächst die Kreise α, β, γ und dann die verlangten Kreise a, b und c zu construiren.

3. Wenn die drei gegebenen Kreise A, B und C einander gleich sind, so wird man durch eine etwas ermüdende Eliminationsrechnung — die der in einer Note dem IV. Paragraphen beigefügten ähnlich ist, und die ich hier nicht unternehme, weil ich glaube, dass sie sich durch eine einfache allgemeine Betrachtung wird ersetzen lassen — finden, *dass für diesen Fall die drei in M sich schneidenden geraden Linien die gemeinschaftlichen Chorden je zweier der drei gegebenen Kreise sind.*

Für den vorliegenden besonderen Fall ergiebt sich hiernach folgende Construction:

I. Man beschreibe die drei gemeinschaftlichen Chorden der drei gegebenen gleichen Kreise A, B und C, die sich in irgend einem Punkte M alle drei schneiden.

II. Man beschreibe drei neue Kreise α, β, γ, von welchen jeder einen der drei gegebenen ausserhalb berührt und ausserdem die beiden gemeinschaftlichen Chorden des letztgenannten und jedes der beiden übrigen gegebenen.

III. Die drei gemeinschaftlichen Chorden der drei gegebenen Kreise sind alsdann innere gemeinschaftliche Tangenten der drei Kreise α, β und γ. Man ziehe hiernach die drei übrigen inneren gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise. Es werden sich dieselben alsdann in einem und demselben Punkte, in N schneiden.

IV. Jeder der gesuchten Kreise a, b und c berührt alsdann zwei der in N sich schneidenden geraden Linien und ist daher leicht zu construiren.

Vereinfachungen der vorstehenden Construction bieten sich von selbst dar, wenn man berücksichtigt, dass die in N sich schneidenden geraden Linien durch die Berührungpunkte A', B' und C' der drei Kreispaare A und α, B und β, C und γ gehen.

4. Nach der letzten Nummer des vorigen Paragraphen erhalten wir aus der vorstehenden Construction des speciellen Falles unserer Aufgabe die Construction der allgemeinen Aufgabe:

Wenn irgend drei beliebige Kreise gegeben sind, drei solche neue Kreise zu beschreiben, von welchen jeder die beiden übrigen und zwei der drei gegebenen berührt.

I. Man beschreibe aus den äusseren homologen Punkten je zweier der drei gegebenen Kreise A, B und C als Mittelpunkten drei neue Kreise, welche mit den bezüglichen gegebenen eine gemeinschaftliche Chorde haben; oder mit andern Worten, man halbire die Winkel, welche die drei gegebenen Kreise paarweise mit einander bilden, durch drei neue Kreise. Diese drei neuen Kreise, die wir durch (AB), (AC) und (BC) unterscheiden wollen, schneiden sich bekanntlich in denselben beiden Punkten (Aphorismen, § II)*). Diese Punkte seien P und M.

II. Man beschreibe einen neuen Kreis α, welcher die Kreise A, (AB) und (AC), einen Kreis β, welcher B, (AB) und (BC), und einen Kreis γ, welcher C, (AC) und (BC) so berührt, dass die Berührung von α und β mit (AB), von α und γ mit (AC) und von β und γ mit (BC) eine ungleichartige ist.

III. Man beschreibe drei neue Kreise, welche alle drei durch einen der beiden Punkte P oder M, etwa durch den ersteren derselben gehen und die respective die Kreise α und β, α und γ, β und γ ungleichartig berühren. Diese Kreise, welche wir durch $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ bezeichnen wollen, schneiden sich alsdann noch in einem und demselben zweiten Punkt. Dieser Punkt sei N.

IV. Von den verlangten drei Kreisen berührt alsdann der erste a die vier Kreise B, C, $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\gamma)$, der zweite b die Kreise A, C, $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$, und der dritte c die Kreise A, B, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$.

Ich füge hier keine Figur hinzu, weil eine solche sich schon in dem ersten Bande dieses Journals vorfindet, und man auch, in Ermangelung dieses Bandes, leicht an der Figur, welche zu der vorigen Nummer gehört, sich orientiren kann, indem man den Punkt, den wir P genannt haben, sich hier unendlich weit entfernt denkt.

Im Jahre 1826 hat Herr Steiner die vorliegende Aufgabe, die man damals ach den Schwierigkeiten, welche ausgezeichnete Geometer bei der Behandlung der blossen Malfatti'schen Aufgabe gefunden hatten, für unüberwindlich zu betrachten geneigt sein mochte, als Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe ausgesprochen und, jedoch ohne Spur irgend einer Rechtfertigung, eine Construction hinzugefügt, die im Wesentlichen mit der vorstehenden übereinstimmt**). Bald nachher wurde die Steiner'sche Construction auch in den zu Montpellier erscheinenden Annalen zur Rechtfertigung vorgelegt; aber so viel ich weiss, ist durchaus nichts weiter erfolgt und die Richtigkeit

*) [Vgl. S. 249 und 250 dieser Ausgabe.]

**) S. Crelle's Journal, Band 1, S. 180.

jener Construction bis jetzt problematisch geblieben. Was bei der Aussage der eben genannten Construction befremden muss, ist, dass mit keiner Silbe angedeutet ist, dass die oben durch (AB), (AC) (BC), $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ bezeichneten Kreise alle sechs (und nicht bloss die drei ersten) durch einen und denselben Punkt gehen; denn eben dadurch ist doch die Construction der allgemeinen Aufgabe mit der Construction der Malfatti'schen verknüpft.

5. Die Construction der Steiner'schen Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe, die wir in der vorigen Nummer aufgestellt haben, ist wahrscheinlich noch nicht die einfachste. Man kann vielleicht unmittelbar (Fig. 51), wenn wir von den drei Kreisen A, B und C ausgehen, auf leichte Weise die drei in M sich schneidenden geraden Linien construiren.

6. Herr Steiner erweitert die Aufgabe, welche den Gegenstand dieses Paragraphen bildet, indem er dieselbe auf die Kugeloberfläche und auf beliebige Oberflächen zweiter Ordnung überträgt. Dies geschieht unmittelbar mit Hilfe eines Uebertragungsprincipes, das ich schon früher zur Anwendung gebracht hatte und das mit der Aufgabe selbst in keiner Beziehung steht. Interessant wäre folgende Aufgabe:

In die Winkelpunkte eines Polygons von n Seiten n Kreise so zu beschreiben, dass jeder Kreis den vorhergehenden und den nachfolgenden berührt.

Und dann könnte man an die Stelle der n Seiten, von welchen das Polygon gebildet wird, n beliebige *Kreise* setzen.

20.

Ueber solche Punkte, die bei Curven einer höhern Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen.

(Crelle's Journal, Band 10, S. 84—91. 1832.)

1. So unbeholfen auf der einen Seite die Einführung der Brennpunkte in die Theorie der Kegelschnitte ist und immer bleiben wird, wenn man dieselben durch Gleichungen zwischen gewöhnlichen Punktcoordinaten darstellt, so natürlich geht auf der andern Seite die Definition jener Punkte aus der Darstellung der Kegelschnitte durch Gleichungen zwischen den neuen Liniencoordinaten hervor. Die Beantwortung der Frage, welche einfachere Formen die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen diesen Coordinaten durch blosse Verlegung des Anfangspunktes annehmen kann, enthält die Discussion der verschiedenen Fälle, welche jene Gleichung umfasst und giebt zugleich die Definition und die Bestimmung der Brennpunkte*). Die Definition, welche auf diesem Wege uns entgegentritt, knüpft sich an ein paradox scheinendes analytisches Factum an, dass nämlich, wenn

$$\text{tang}\, \varphi = \pm \sqrt{-1},$$

man immer hat:

$$\text{tang}\, (\varphi + \psi) = \pm \sqrt{-1},$$

welchen reellen oder imaginären Bogen ψ auch darstellen mag. Denn es ist:

$$\text{tang}\, (\varphi + \psi) = \frac{\text{tang}\, \psi + \text{tang}\, \varphi}{1 - \text{tang}\, \varphi\, \text{tang}\, \psi} = \frac{\text{tang}\, \psi \pm \sqrt{-1}}{1 \mp \text{tang}\, \psi \sqrt{-1}} = \pm \sqrt{-1}.$$

Nun sind die Brennpunkte eines Kegelschnittes solche Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass wenn man die Richtung der beiden durch einen solchen Punkt gehenden Tangenten des Kegelschnittes bestimmt, man für die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche

*) Analytisch-geometrische Entwicklungen. Band II, Abschnitt II, § 1.

diese Tangenten mit der ersten Axe und folglich mit jeder beliebigen geraden Linie bilden, $\pm\sqrt{-1}$ erhält. Auf gewisse Weise kann man also sagen, „dass jede durch den Brennpunkt gehende (imaginäre) gerade Linie eine Tangente des Kegelschnittes ist."

2. Die in dem Vorstehenden aufgestellte Definition der Brennpunkte scheint mir die einzig allgemeine zu sein. Um das Imaginäre in der Aussage derselben zu vermeiden, können wir dieselbe auf mehrfache Weise geometrisch umschreiben*). Wir wollen hier dieselbe Definition auf beliebige algebraische Curven ausdehnen.

Derjenige Punkt in der Ebene irgend einer gegebenen algebraischen Curve, welcher die Eigenschaft hat, dass zwei durch denselben gehende Tangenten der Curve mit einer beliebigen geraden Linie Winkel bilden, deren beide trigonometrischen Tangenten $\pm\sqrt{-1}$ sind, heisst ein Brennpunkt der Curve.

3. Wir wollen irgend eine solche Curve betrachten, an welche sich von irgend einem gegebenen Punkte aus im Allgemeinen n Tangenten legen lassen. Diese Curve können wir alsdann durch die allgemeine Gleichung des n^{ten} Grades zwischen den Liniencoordinaten w und v darstellen. (w und v beziehen sich bekanntlich auf irgend eine beliebige Tangente der Curve, $(-w)$ bedeutet das Segment, das diese Tangente von der zweiten Coordinatenaxe abschneidet, $(-v)$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen sie mit der ersten Axe bildet.) Diese Gleichung sei, indem wir rechtwinklige Coordinatenaxen voraussetzen und der Kürze wegen das Aggregat aller Glieder, welche w enthalten, in das Symbol Ω zusammenfassen, folgende:

$$(1)\quad \Omega + Av^n + Bv^{n-1} + Cv^{n-2} + Dv^{n-3} + Ev^{n-4} + \cdots + Mv + N = 0.$$

Um den Anfangspunkt der Coordinaten in irgend einen Punkt (y, x) zu verlegen, brauchen wir bloss

$$w \text{ mit } w - xv - y \text{ zu vertauschen}^{**}),$$

zu vertauschen. Die resultirende Gleichung hat alsdann dieselbe Form. Sie sei folgende:

$$(2)\quad \Omega' + A'v^n + B'v^{n-1} + C'v^{n-2} + D'v^{n-3} + E'v^{n-4} + \cdots + M'v + N' = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung $w = 0$ setzen, so verschwindet bloss Ω' und zur Bestimmung der Richtung der durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Tangenten der gegebenen Curve erhalten wir folgende Gleichung:

*) Entwicklungen, Band II, S. 64.

**) Entwicklungen, Band II, S. 40.

$$(3)\quad A'v^n + B'v^{n-1} + C'v^{n-2} + D'v^{n-3} + E'v^{n-4} + \cdots + M'v + N' = 0.$$

Setzen wir in diese Gleichung $\pm\sqrt{-1}$ für v, so erhalten wir, wenn die Gleichung befriedigt werden soll, indem wir einerseits die imaginären, andrerseits die reellen Glieder annulliren, folgende beiden Bedingungen:

$$(4)\quad A' - C' + E' - \cdots = 0,$$

$$(5)\quad B' - D' + \cdots = 0.$$

Diese beiden Gleichungen müssen also, der Definition der Brennpunkte gemäss, befriedigt werden, wenn der neue Anfangspunkt ein Brennpunkt sein soll. Die einzelnen Glieder in den letzten Gleichungen erhalten ihre geometrische Bedeutung aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen. Denn bezeichnen wir die n Wurzeln der Gleichung (3) durch

$$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots v_n,$$

so ist bekanntlich

$\frac{B'}{A'}$ gleich der Summe dieser Wurzeln,

$\frac{C'}{A'}$ gleich der Summe der Produkte je zweier dieser Wurzeln,

$\frac{D'}{A'}$ „ „ „ „ „ „ dreier „ „

$\frac{E'}{A'}$ „ „ „ „ „ „ vier „ „

vorausgesetzt, dass wir alle Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen nehmen.

Für $n = 3$ reduciren sich die beiden Gleichungen (4) und (5) auf

$$(6)\quad A' - C' = 0,$$

$$(7)\quad B' - D' = 0;$$

für $n = 4$ auf

$$(8)\quad A' - C' + E' = 0,$$

$$(9)\quad B' - D' = 0.$$

Die Gleichungen (6) und (7) sind identisch mit:

$$(10)\quad 1 - (v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3) = 0,$$

$$(11)\quad v_1 + v_2 + v_3 - v_1v_2v_3 = 0;$$

und die Gleichungen (8) und (9) mit

$$(12)\quad 1 - (v_1v_2 + v_1v_3 + v_1v_4 + v_2v_3 + v_2v_4 + v_3v_4) + v_1v_2v_3v_4 = 0,$$

$$(13)\quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - (v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4) = 0.$$

Die vier letzten Gleichungen ändern sich nicht, wenn wir die Zeichen der verschieden markirten v alle ändern. Indem wir diese v aber negativ nehmen, bezeichnen dieselben die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die durch den neuen Anfangspunkt gehenden, die gegebene Curve berührenden geraden Linien mit der ersten Coordinatenaxe bilden.

4. Wenn aber ganz allgemein

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4, \ldots \ldots w_n$$

Winkel sind, zu welchen als trigonometrische Tangenten

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4, \ldots \ldots v_n$$

gehören, so ist

$$(14)\quad \operatorname{tang}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots + w_n) = \frac{B - D + F - \cdots}{A - C + E - \cdots},$$

wenn $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}, \frac{F}{A}$ u. s. w. die obige Bedeutung haben. Dieses Resultat ergiebt sich auf dem Wege der Induction ohne alle Mühe, und ist auch schon von Joh. Bernoulli mitgetheilt worden*).

Hiernach stellen sich die in der vorigen Nummer enthaltenen geometrischen Beziehungen sehr einfach dar. Die Gleichungen (4) und (5) sind nämlich mit folgenden beiden gleichbedeutend:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots + w_n = \frac{m+1}{2}\pi,$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots + w_n = \frac{m}{2}\pi,$$

wenn m eine ganze und gerade Zahl bedeutet. Die erste dieser beiden Gleichungen sagt allein für sich aus, dass die Summe derjenigen Winkel, welche die n durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Tangenten der Curve mit der ersten Axe bilden, gleich $(m+1)$ rechten Winkeln ist, die zweite Gleichung für sich allein genommen, dass dieselbe Summe gleich m rechten Winkeln ist. Da wir für den Winkel, den eine gerade Linie mit der ersten Axe bildet, einen positiven und einen negativen nehmen können, deren arithmetische Summe gleich π ist, so können wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, in den letzten beiden Gleichungen $m = 0$ setzen, so dass dieselben in folgende übergehen:

$$(15)\quad w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots + w_n = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$(16)\quad w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots + w_n = 0.$$

*) Opera T. II. n. CXXVII.

5. Nun sind zuvörderst zwei Fälle zu unterscheiden; erstens kann n eine *gerade* und zweitens eine *ungerade* Zahl sein. Im ersten Falle erhalten wir, wenn wir die n Winkel, welche jene n durch den neuen Anfangspunkt gehenden Tangenten mit der zweiten Coordinatenaxe bilden, durch

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3,\ \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$$

bezeichnen, nach einander aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \cdots + \vartheta_n = \tfrac{1}{2}\pi - n \,.\, \tfrac{1}{2}\pi \text{ oder } = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \cdots + \vartheta_n = -\, n \,.\, \tfrac{1}{2}\pi \text{ oder } = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind also keine andern als die bezüglichen Gleichungen (15) und (16), selbst wenn wir alle Winkel, statt von der *ersten Axe* an, von der *zweiten Axe* an rechnen. Zu demselben Resultate kommen wir auch auf anderm Wege. Wenn wir z. B. die beiden Gleichungen (12) und (13) durch das Produkt $v_1 v_2 v_3 v_4$ dividiren, so kommt:

(12a) $$\frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_3}\cdot\frac{1}{v_4} - \left[\frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_3}\cdot\frac{1}{v_4}\right] + 1 = 0,$$

(13a) $$\frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_3}\cdot\frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_3}\cdot\frac{1}{v_4} - \left[\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right] = 0.$$

Diese Gleichungen sind keine andern als die ursprünglichen, wenn wir in diesen an die Stelle der Tangenten Cotangenten setzen.

Wenn *zweitens* n eine ungerade Zahl ist, so verwandeln sich die Gleichungen (15) und (16) in folgende:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \cdots + \vartheta_n = 0,$$
$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \cdots + \vartheta_n = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und man sieht, dass diese Gleichungen wiederum keine andern sind als die ursprünglichen, wenn wir die Ordinatenaxe mit der Abscissenaxe vertauschen. Aber hier stimmt die erste der neuen Gleichungen mit der zweiten der alten, und die zweite von jenen mit der ersten von diesen überein. Dasselbe finden wir bestätigt, wenn wir z. B. die beiden Gleichungen (10) und (11) durch $v_1 v_2 v_3$ dividiren, wonach

(10a) $$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_3} = 0,$$

(11a) $$1 - \left[\frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{v_3}\right] = 0$$

kommt.

Der neue Anfangspunkt der Coordinaten ist durch die beiden Gleichungen (4) und (5) bestimmt. Jede dieser Gleichungen für sich stellt, wenn wir die Coordinaten desselben, y und x, als veränderlich betrachten, eine Curve dar, und jeder Durchschnitt dieser zwei Curven kann für den neuen Anfangspunkt genommen werden und ist also ein Brennpunkt der ursprünglich gegebenen Curve.

Die Gleichung (5), die wir zuerst betrachten wollen, steigt, wovon man sich leicht überzeugt, in Beziehung auf y und x im Allgemeinen bis zum n^{ten} Grade. Sie ist die Gleichung des geometrischen Ortes für diejenigen Punkte, durch welche solche n Tangenten der gegebenen Curve gehen, welche mit der ersten Axe Winkel bilden, deren Summe gleich Null ist. Diese Curve geht also durch die Brennpunkte der gegebenen Curve n^{ter} Classe. Nach den beiden ersten Nummern thut dasselbe jede andere analoge Curve n^{ter} Ordnung, wenn wir die erste Axe beliebig ändern. Denn wenn der Anfangspunkt einer der Brennpunkte der gegebenen Curve n^{ter} Classe ist, so ändert diese Curve die durch das Zusammenbestehen der Gleichungen (4) und (5) bestimmte Form ihrer Gleichung auch dann nicht, wenn man das Axensystem beliebig um den Anfangspunkt der Coordinaten sich drehen lässt.

Die Gleichung (4) stellt unter den gemachten Voraussetzungen eine solche Curve n^{ter} Ordnung dar, durch deren jeden Punkt solche n Tangenten der gegebenen Curve n^{ter} Classe gehen, welche mit der ersten Axe n Winkel bilden, deren Summe gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so können wir dieselbe Curve dadurch bestimmen, dass wir sagen, die Summe der Winkel, welche jene n Tangenten mit der *zweiten* Axe bilden, sei gleich Null. Alsdann erhalten wir eine solche Curve, welche unter den früher bezeichneten Curven n^{ter} Ordnung schon vorkommt. Wenn aber n eine gerade Zahl ist, so ist dies nicht der Fall, und wir erhalten, wenn wir nach und nach der ersten Axe alle möglichen Richtungen geben, unendlich viele neue Curven n^{ter} Ordnung, welche sich einander alle in den Brennpunkten der gegebenen Curve n^{ter} Classe schneiden.

7. Wenn wir zusammenfassen, erhalten wir also die nachstehenden Resultate.

I. *Der geometrische Ort für solche Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der n Winkel, welche die durch jeden derselben an eine gegebene Curve n^{ter} Classe gelegten n Tangenten mit einer gegebenen geraden Linie bilden, gleich Null ist, ist eine Curve n^{ter} Ordnung. Wenn wir nach einander der gegebenen geraden Linie alle möglichen Richtungen geben, so erhalten wir solcher geometrischen Oerter unendlich*

viele. Alle diese Oerter schneiden sich im Allgemeinen in n^2 Punkten, den Brennpunkten der Curve n^{ter} Classe. Durch zwei jener Oerter sind diese Brennpunkte also völlig bestimmt. Diese Bestimmung geschieht in dem Vorstehenden durch die Zusammenstellung der beiden Gleichungen (4) *und* (5) *in dem Falle, wo n eine ungerade Zahl ist.*

II. *Der geometrische Ort für solche Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der Winkel, welche die durch jeden derselben an eine gegebene Curve n^{ter} Classe gelegten n Tangenten mit einer gegebenen geraden Linie bilden, gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, ist eine Curve n^{ter} Ordnung. Wenn wir nach einander der gegebenen geraden Linie alle möglichen Richtungen geben, so erhalten wir solcher geometrischen Oerter unendlich viele, die aber nur dann von den unter I. bestimmten verschieden sind, wenn n eine gerade Zahl ist. Diese neuen Oerter gehen alsdann ebenfalls durch die n^2 Brennpunkte der gegebenen Curve n^{ter} Classe. Diese n^2 Brennpunkte sind durch irgend zwei jener neuen Oerter vollständig bestimmt, oder auch — wie in dem Vorstehenden in dem Falle, dass n eine gerade Zahl ist, durch die Zusammenstellung der Gleichungen* (4) *und* (5) *— durch einen der neuen und einen der unter I. bestimmten Oerter.*

8. Eine Curve n^{ter} Classe hat zwar im Allgemeinen n^2 Brennpunkte, diese Anzahl reducirt sich aber in besonderen Fällen. Das Gesetz stellt sich hierbei sogleich heraus. Es kommt nämlich auf die Potenz an, in welcher v in der Gleichung der Curve zwischen den Liniencoordinaten w und v vorkommt; oder geometrisch ausgedrückt, auf die Zahl der Tangenten, welche sich *parallel mit einer gegebenen geraden Linie* an die Curve legen lassen. Giebt es solcher Tangenten im Allgemeinen m, so giebt es m^2 Brennpunkte. Eine Curve zweiter Classe hat im Allgemeinen *vier* Brennpunkte, eine Parabel insbesondere nur *einen* Brennpunkt. Eine Curve dritter Classe hat *neun, vier* oder nur *einen* Brennpunkt, u. s. w.

9. Ich will als Beispiel die Curven dritter Classe nehmen und für die allgemeinste Gleichung derselben:

$$\alpha w^3 + \beta v w^2 + \gamma w^2 + \delta v^2 w + \varepsilon v w + \zeta w + \eta v^3 + \vartheta v^2 + \varkappa v + \lambda = 0.$$

Wenn wir den Anfangspunkt in irgend einen Punkt (y, x) verlegen und demzufolge $(w - xv - y)$ für w schreiben, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 = \Omega &- (\alpha x^3 - \beta x^2 + \delta x - \eta) v^3 \\ &- (3\alpha x^2 y - 2\beta x y - \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x - \vartheta) v^2 \\ &- (3\alpha x y^2 - 2\gamma x y - \beta y^2 + \varepsilon y + \zeta x - \varkappa) v \\ &- (\alpha y^3 - \gamma y^2 + \zeta y - \lambda), \end{aligned}$$

indem wir alle mit w behafteten Glieder durch Ω bezeichnen. Zur Bestimmung der Brennpunkte erhalten wir hiernach folgende beiden Gleichungen:

(6a) $\alpha x^3 + 3\alpha xy^2 + \beta y^2 - \beta x^2 + 2\gamma xy + (\delta - \xi)x - \varepsilon y + \varkappa - \eta = 0,$

(7a) $\alpha y^3 - 3\alpha x^2 y - \gamma y^2 + \gamma x^2 + 2\beta xy - \varepsilon x - (\delta - \xi)y + \vartheta - \lambda = 0.$

Wir erhalten also im Allgemeinen *neun* Brennpunkte. Diese Anzahl reducirt sich auf *vier*, wenn

$$\alpha = 0,$$

und auf *eins*, wenn zugleich

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

wobei die gegebene Curve immer noch von der dritten Classe bleibt.

21.

Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes.

(Crelle's Journal, Band 12, S. 105—108. 1834.)

La découverte du *principe de reciprocité* (théorie des polaires reciproques) ou ce qui est identiquement la même chose, celui de *dualité* a fait naître une foule de questions nouvelles, d'ont l'une que je regarde avec M. Poncelet comme fondamentale n'a pas été résolue jusqu'à ce jour malgré les efforts des plus habiles géomètres.

M. Gergonne lorsqu'il introduisit le premier ses doubles colonnes qui depuis on fait fortune, a supposé que le degré d'une courbe soit égal à celui de sa polaire, ou, en d'autres termes, que le nombre des points d'intresection d'une courbe algébrique d'un degré quelconque avec une droite donnée soit en général égal au nombre des tangentes à la même courbe passant par un point donné. Plusieurs ans auparavant M. Poncelet avait déjà reconnu le contraire, en annonçant que, si le degré de la proposée est m, le nombre de ses tangentes partant d'un même point donné est de $m(m-1)$: fait évident et très facile à prouver par l'analyse. Cédant enfin malgré lui M. Gergonne garantit à ses doubles colonnes leur validité en remplaçant seulement dans l'une d'elles le mot *degré* par le mot *classe*. D'après cette dénomination une courbe proposée du $m^{\text{ième}}$ degré est de la $m(m-1)^{\text{ième}}$ classe et sa polaire de la $m^{\text{ième}}$ classe. Cette nouvelle classification des courbes me paraît très importante; en l'adoptant je me plais de reconnaître que la méprise même d'un homme d'esprit porte ses fruits.

Dès que les courbes passent le second degré, il se présente une difficulté que je vais exposer. Le degré d'une courbe proposée étant m, celui de sa polaire sera en général $m(m-1)$. Cette nouvelle courbe a réciproquement pour sa polaire la proposée. Tandis donc qu'en général une courbe du $m(m-1)^{\text{ième}}$ degré a pour polaire une courbe du $m(m-1)[m(m-1)-1]^{\text{ième}}$ degré, une courbe particulière de ce

même degré a pour polaire une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré seulement. Ainsi, par exemple, à une courbe du $3^{\text{ième}}$ degré répond comme polaire une courbe du $6^{\text{ième}}$, à une courbe du $6^{\text{ième}}$ degré en général une courbe du $30^{\text{ième}}$; mais dans le cas particulier en question ce degré se réduit de 27 unités et redescend au troisième. De même à une courbe du $4^{\text{ième}}$ degré répond comme polaire une courbe du $12^{\text{ième}}$, à une courbe du $12^{\text{ième}}$ degré en général une courbe du $132^{\text{ième}}$; mais dans le cas particulier ce degré, en se rabaissant de 128 unités, redevient le $4^{\text{ième}}$. Quelle est donc la nature de la courbe particulière qui produise une réduction si extraordinaire? Voilà la difficulté à résoudre.

M. Poncelet essaya d'en donner l'explication dans le présent Journal*). Il l'a trouvée dans les points doubles de la courbe polaire de la proposée, dont chacun d'après lui produit dans le degré de la polaire réciproque une réduction de deux unités. Je désignais aussitôt**) cette application comme incomplète, vu qu'une courbe du $m(m-1)^{\text{ième}}$ degré ne pourrait jamais avoir un nombre de points doubles suffisant pour opérer la réduction exigée. J'aurais dû ajouter que, dans le cas de $m = 3$, la courbe proposée ne permettant pas d'être touchée par une même ligne droite en deux points differents, sa polaire ne pourrait pas admettre de points doubles. Plus tard, dans la suite de ses mémoires M. Poncelet***) convient en parlant de l'explication en question „de n'avoir fait que glisser sur cette importante et difficile matière."

Ensuite il continue ainsi: „En effet, la solution de ces questions dépend du perfectionnement d'une autre théorie, celle des points *singuliers* des courbes, qui n'est point encore complètement faite malgré les savantes recherches de nos premiers géomètres et elle tient aussi aux difficultés les plus ardues de la science de l'élimination. Mais, quoique les considérations d'une géométrie purement intuitive, appuyée de notions qui dérivent de l'admission du principe de continuité, nous aient permis d'entrer plus avant dans le fond de la question, nous ne saurions nous flatter cependant d'en avoir éclairci entièrement les difficultés et d'avoir dissipé tous les nuages dont elle demeure encore enveloppée."

Voilà l'état de la question dont je me propose de consigner ici la solution.

*) Crelle's Journal, vol. 4, p. 13.

**) Analytisch-geometrische Entwicklungen, vol. 2, p. 288, Note.

***) Crelle's Journal, vol. 8, p. 38.

Une courbe peut être regardée ou comme décrite par un point ou comme enveloppée par une ligne droite. Au premier mode de génération se rapporte la manière généralement en usage de représenter une courbe par une équation entre deux variables. Dans cette génération c'est un cas tout singulier si le point générateur s'arrête pour se diriger en sens contraire; les courbes représentées par les équations générales d'un degré quelconque n'admettent pas en général de points de rébroussement. Elles n'admettent pas non plus en général de points multiples ou isolés. Mais elles auront en général un certain nombre de points d'inflexion qui ne se comportent nullement comme points singuliers, car dans de tels points le mouvement du point générateur n'est pas interrompu. Dans le second mode de génération auquel se rapporte un algorithme non moins facile, il n'existe pas en général de points d'inflexion, parceque dans un tel point le mouvement de la droite génératrice s'arrête et continue ensuite en sens contraire. Il n'existe pas non plus en général de tangentes multiples. Mais il y aura en général un certain nombre de points doubles et de points de rébroussement. Dans ces derniers points le mouvement de la droite génératrice ne présente aucune singularité, elle y continue à se mouvoir dans le même sens. La définition de la tangente n'est pas la même dans les deux modes de génération; dans le premier toute ligne droite passant par deux points coïncidants (consecutifs ou non) jouit du rôle de tangente, dans le second la tangente c'est la droite génératrice dans ses différentes positions. De la résulte qu'à chaque point double d'une courbe proposée répond une réduction de *deux* unités dans le degré de sa polaire, comme M. Poncelet l'a remarqué le premier, pourvu toutefois que le point double ne soit en particulier *un point de rébroussement;* dans ce cas au contraire la réduction est de *trois* unités. D'après ces préliminaires, je passe à l'énoncé de la solution.

Les courbes représentées par l'équation générale du $m^{\text{ième}}$ degré ont en général un nombre de points d'inflexion égal à $3m(m-2) = M$ et un nombre de tangentes doubles égal à

$$\tfrac{1}{2}(m+3)m(m-2)(m-3) = N.$$

Leurs courbes polaires du $m(m-1)^{\text{ième}}$ degré auront donc en général M points de rébroussement et N points doubles proprement dits. Le degré de leurs polaires qui, pour les courbes de leur degré, est en général le $m(m-1)\,|\,m(m-1)-1\,|^{\text{ième}}$, s'abaisse donc de $(3M+2N)$ unités et redescend ainsi au $m^{\text{ième}}$.

Dans le cas de $m = 3$ la réduction provient donc uniquement

des points d'inflexion de la proposée, qui sont au nombre de 9. Six de ces 9 points sont toujours imaginaires.

Dans le cas de $m = 4$ la réduction provient des 24 point d'inflexion et des 28 tangentes doubles de la proposée. Et ainsi de suite.

Je dois me contenter ici d'avoir énoncé ce résultat auquel se rattachent une foule de questions du plus grand intérêt dans la théorie générale des courbes algébriques. On trouvera tous les développements désirables sur cet important sujet dans un ouvrage qui paraîtra en peu de mois, dans lequel je me propose d'exposer un système de géométrie analytique, en partant de points de vue nouveaux et en m'occupant presque exclusivement des courbes de degrés supérieurs.*)

*) [Dieser Hinweis betrifft das „System der analytischen Geometrie", Bonn, 1835, insbesondere S. 241 ff.]

22.

Enumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies.

(Liouville's Journal de Mathématiques, Band 1, S. 229—252. 1836.)

1. De tous les géomètres, Euler est celui qui s'est le plus systématiquement occupé des courbes de degré supérieur. Il s'est attaché surtout à la considération des branches infinies, et en a tiré, dans son *Introduction à l'analyse de l'infini*, le moyen de classer les différentes espèces de courbes d'un même degré, en poussant cette classification jusqu'au quatrième degré inclusivement*). Ce qu'il a fait sur ce sujet, il y a plus de quatre-vingts ans, a passé en d'autres ouvrages sous son autorité et sans être revu. Mais la longueur des calculs qu'exigeait sa méthode ne lui permettait pas de démontrer d'une manière certaine que toutes les espèces annoncées par lui existent réellement. Il donne ainsi 146 espèces de courbes du quatrième degré qu'il distribue en huit classes: il faut d'abord réduire ce nombre à 125, car par une erreur de calcul, il en compte 21 de trop dans la sixième classe; ensuite, dans les 125 courbes restantes, il y en a 12 qui n'existent pas du tout: de l'une d'elles Euler affirme positivement le contraire. Il y a 22 espèces qui lui sont échappées et parmi elles l'espèce générale de la dernière classe: l'oubli des autres provient de ce qu'Euler n'a pas reconnu 1° que l'ordre du contact peut être différent sur deux asymptotes parallèles, et 2° qu'il peut y avoir (pour m'expliquer brièvement) un point de rébroussement de seconde espèce à l'infini. Enfin ses notions inexactes sur les asymptotes paraboliques, qui ne sont jamais isolées, mais toujours en nombre infini, et sur les asymptotes courbes en général ont dû inévitablement le conduire à des erreurs manifestes que l'on trouvera signalées plus loin.

Dans ce mémoire nous nous proposons de refaire le travail

*) [Vgl. a. a. O. Band II, Cap. 7—11.]

d'Euler avec les moyens ordinaires de l'Analyse, maniés toutefois d'une manière nouvelle, en sorte que nous pourrons écrire immédiatement les équations qui répondent aux différentes espèces de courbes du quatrième degré, et cela par une méthode applicable aux courbes d'un degré quelconque. Les axes des coordonnées n'introduisent dans nos équations rien d'arbitraire qui nous embarrasse et qu'il faille éliminer, pour ainsi dire, si l'on veut reconnaître la nature intime de la courbe, sans avoir égard à sa position. On voit sur-le-champ la liaison de chaque terme de nos équations avec les courbes qu'elles représentent, ainsi que le changement produit dans la nature de ces courbes par le changement de forme de l'un quelconque des termes de leurs équations. Enfin, pour servir de contrôle à notre classification et en général à tous nos calculs, il y a un nombre abstrait qui s'obtient immédiatement pour chacune de nos équations; je veux parler du nombre des constantes dont dépendent les courbes d'une espèce quelconque.

2. Fixons d'abord la notation que nous emploierons. Nous désignerons par P, Q, R, S, ... des lignes droites quelconques et par p, q, r, s, ... les distances respectives d'un point quelconque à ces droites. En passant d'un point à un autre ces dernières quantités varient et chacune d'elles change de signe si le point passe d'un côté de la droite correspondante au côté opposé. Le côté positif de chaque droite est absolument arbitraire. Pour représenter ces droites on a les équations suivantes:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0 \ldots .$$

Nous nommerons les quantités p, q, r, s, ... *fonctions linéaires.* Elles le sont des coordonnées ordinaires, comme chacune d'elles l'est de deux quelconques prises arbitrairement parmi elles. Nous désignerons ensuite par Ω_n, Ω'_n, Ω''_n, ... des fonctions quelconques du $n^{\text{ième}}$ degré, de fonctions linéaires quelconques, ou, ce qui revient au même, des coordonnées ordinaires. Enfin les lettres grecques λ, μ, ... indiqueront toujours des quantités constantes.

3. Après avoir ainsi fixé la notation, je ne dirai que deux mots sur le principe de notre méthode; je m'abstiendrai de tout ce qui ne se rapporte pas immédiatement à l'énumération des différentes espèces de courbes du quatrième degré.

Soit, conformément à notre notation

$$\Omega_n = 0 \tag{a}$$

l'équation générale des courbes du $n^{\text{ième}}$ degré, et

$$p = 0,$$

l'équation d'une ligne droite quelconque. Regardons, pour fixer les idées, Ω_n et p comme fonctions de coordonnées ordinaires. On déterminera alors les intersections de la ligne droite avec la courbe, en éliminant l'une de ces deux coordonnées. L'équation résultante s'élèvera en général au $n^{\text{ième}}$ degré et indiquera par ses racines n points d'intersection, réels ou imaginaires. — Dans tous les cas, si, par une détermination particulière des constantes, le degré d'une équation algébrique s'abaisse de m unités, sans qu'on ait négligé aucun facteur variable, il faut en chercher la cause dans la circonstance que m des racines primitives sont devenues *infinies*. Donc, si cela arrive dans le cas présent, c'est parce que, par un changement soit dans la position réciproque de la ligne droite et de la courbe, soit par un changement dans la nature de celle-ci, m points d'intersection ont passé à l'infini. L'équation de la droite contenant deux constantes, on peut en disposer de manière que de ses points d'intersection avec la courbe donnée deux passent à l'infini; nous dirons alors que la ligne droite est une *asymptote* de la courbe. D'après cette définition, si nous voulons que P soit une asymptote de la courbe représentée par l'équation (a), il faut que celle-ci, quand on pose $p = 0$, se réduise à une fonction du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, ou ce qui revient au même, il faut quelle puisse prendre la forme suivante:

$$p\Omega_{n-1} + \Omega_{n-2} = 0.$$

Si Ω_{n-2} se réduisait à une fonction Ω_{n-m} du $(n-m)^{\text{ième}}$ degré, m surpassant le nombre 2 (ce qui exigerait que la courbe fût d'une nature particulière), il y aurait, sur l'asymptote P, m points d'intersection situés à l'infini. Nous dirons que l'asymptote a alors avec la courbe un contact de m points, ce qui revient à dire avec Euler que la courbe a une asymptote hyperbolique de l'espèce $\mu = \frac{a}{t^{m-1}}$. Pour chaque point d'intersection nouveau, passant à l'infini, l'ordre du contact s'élève d'une unité. Car de l'équation

$$p\Omega_{n-1} + \Omega_{n-m} = 0$$

on tire, en regardant Ω_{n-1} et Ω_{n-m} comme des fonctions de p et d'une autre variable q, en donnant à celle-ci une valeur infinie et en négligeant p par rapport à q, l'expression suivante:

$$p = -\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-1}} = \mu q^{-(m-1)}$$

qui fait voir que la distance des points infiniment éloignés de la courbe à l'asymptote P, si elle n'est pas infiniment grande elle-même,

est un infiniment petit de l'ordre $(m-1)$. On voit encore que, suivant que m est un nombre pair ou impair, p change de signe ou n'en change pas, si l'on prend successivement $q=\infty$ et $q=-\infty$; ce qui signifie que deux branches de la courbe qui suivent l'asymptote P en sens divers sont situées, dans le premier cas, sur les deux côtés opposés et dans le second cas, sur le même côté de cette asymptote.

On peut mettre en évidence dans l'équation d'une courbe l'ensemble de ses asymptotes. Ainsi, par exemple, en prenant $n=4$, on obtient l'équation

$$pqrs+\Omega_2=0, \tag{b}$$

qu'on peut encore écrire de la manière suivante:

$$pqrs+\lambda tu+\mu=0.$$

Chacune des fonctions linéaires p, q, r, s, t, u dépend de deux constantes; l'équation (b) qui renferme en outre λ et μ contient ainsi 14 constantes. Ce nombre est égal à celui des constantes de l'équation générale des courbes du 4ième degré. On peut donc regarder les deux équations comme équivalentes et transformer celle-ci, que nous supposerons donnée, dans l'équation (b). Cette transformation doit exiger la résolution d'une équation du 4ième degré, car, sans changer l'équation (b), on peut changer entre elles les quatre fonctions linéaires p, q, r, s qui répondent aux quatre asymptotes P, Q, R, S.

4. Les raisonnements du numéro précédent s'appliquent également aux asymptotes courbes. Les notions généralement admises sur ces asymptotes me paraissent peu nettes. Ainsi Euler, par exemple, ne voit qu'une seule asymptote parabolique là où il y en a une infinité, que l'on obtient toutes, en deplaçant l'une d'elles parallèlement à elle-même suivant la direction de ses diamètres. Parmi ces asymptotes il y en a cependant une qui a avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé que les autres; mais ce n'est pas celle d'Euler qui, au contraire, dépend du choix arbitraire des axes des coordonnées. J'ajouterai peu de mots, pour faire mieux ressortir le caractère des asymptotes paraboliques.

Si les courbes représentées par l'équation (a) ont pour asymptote une parabole dont l'équation est

$$p^2+\lambda q=0,$$

il faut que l'équation (a) puisse s'écrire sous la forme suivante

$$(p^2+\lambda q)\Omega_{n-2}+\Omega'_{n-2}=0, \tag{c}$$

afin que son premier membre se réduise à une fonction du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, en faisant disparaître $(p^2+\lambda q)$. Quatre points d'intersection

s'étant éloignés à l'infini, la parabole ne coupe la courbe qu'en $2(n-2)$ points seulement. En introduisant une constante arbitraire α et en posant, pour abréger,

$$\Omega'_{n-2} - \lambda\alpha\Omega_{n-2} = \Omega''_{n-2},$$

on pourra mettre l'équation (c) sous la forme suivante:

$$[p^2 + \lambda(q+\alpha)]\Omega_{n-2} + \Omega''_{n-2} = 0, \tag{d}$$

dans laquelle la parabole nouvelle dont l'équation est

$$p^2 + \lambda(q+\alpha) = 0, \tag{e}$$

se présente absolument de la même manière que la première parabole dans l'équation (c). Toutefois si l'on détermine α de sorte que l'on ait

$$\Omega''_{n-2} = p\Omega''_{n-3} + \Omega'_{n-3} = (p+\pi)\Omega_{n-3} + \Omega_{n-4}, \tag{f}$$

ce qui peut toujours se faire et cela d'une seule manière, l'équation (d) se changera dans la suivante

$$(p^2 + \lambda q_0)\Omega_{n-2} + (p+\pi)\Omega_{n-3} + \Omega_{n-4} = 0, \tag{g}$$

en posant $(q+\alpha) = q_0$, et l'on voit que la parabole

$$p^2 + \lambda q_0 = 0 \tag{h}$$

ne coupe la courbe proposée qu'en $(2n-5)$ points, cinq points d'intersection ayant passé à l'infini.

Toutes les paraboles représentées par l'équation (e), si l'on attribue à α successivement toutes les valeurs possibles, sont asymptotes l'une de l'autre. L'ordre du contact à l'infini est $\frac{1}{2}$. C'est un contact du même ordre qui a lieu entre l'une quelconque de ces paraboles et la courbe proposée. Toutefois pour l'asymptote parabolique (h), que j'appellerai *osculatrice*, l'ordre du contact s'élève à l'unité, et peut, dans des cas particuliers, en croissant pour chaque point nouveau passant à l'infini d'une demi-unité, s'élever jusqu'au $\left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\text{ième}}$ ordre.

Dans les équations suivantes qui sont du quatrième degré,

$$\begin{cases} (p^2 + \lambda q)rs + \nu(p+\pi)t + \mu = 0, \\ (p^2 + \lambda q)(rs+\delta) + \nu t = 0, \\ (p^2 + \lambda q)(rs+\delta) + \nu p + \mu = 0, \\ (p^2 + \lambda q)(rs+\delta) + \mu = 0 \end{cases} \tag{k}$$

l'asymptote parabolique et osculatrice est mise en évidence.

En suivant l'une des branches infinies de cette asymptote l'on obtient pour q, r, s, t des valeurs infiniment grandes du premier ordre et pour p une valeur infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement. Avec cette

attention l'on déduit des quatre équations précédentes que l'expression $(p^2 + \lambda q)$, rapportée aux points infiniment éloignés sur les branches paraboliques de la courbe proposée, est successivement un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ et 2. Cette expression donne la distance (prise suivant la direction des diamètres et multipliée par un coefficient constant) du point auquel elle est rapportée à l'asymptote parabolique:

$$p^2 + \lambda q = 0.$$

La plus courte distance de ce même point à l'asymptote parabolique est infiniment petite d'un ordre plus élevé d'une demi-unité; elle est donc respectivement de l'ordre 1, $\frac{3}{2}$, 2 et $\frac{5}{2}$.

Au nombre infini d'asymptotes paraboliques répond, dans le cas de deux asymptotes rectilignes, un nombre infini d'asymptotes hyperboliques dont les deux asymptotes rectilignes sont celles de la courbe. Parmi ce nombre, il y en a deux dont le contact avec la courbe est plus intime et s'élève sur l'une des deux asymptotes rectilignes au deuxième ordre. Dans le cas de deux asymptotes rectilignes et imaginaires, on obtient un nombre infini d'ellipses au lieu d'hyperboles, qui ne coupent la courbe qu'en $(2n - 4)$ points seulement, mais, en général, il n'y en a aucune qui coupe la courbe en moins de $(2n - 4)$ points.

Pour déterminer le nombre des constantes dans les équations (k), il n'en faut compter que quatre pour l'expression $(p^2 + \lambda q)$. Des cinq constantes qu'elle contient, l'une peut être prise à volonté, ce qui tient à ce qu'à une même parabole il répond un nombre infini d'expressions de la même forme. Une remarque analogue a lieu pour l'expression suivante $(p^2 + \lambda q^2)$ qui répond à deux asymptotes imaginaires, se coupant en un point réel.

Je passerai immédiatement à l'énumération des différentes courbes du quatrième degré; pour me rapprocher, autant que possible, de la marche d'Euler, je rapporterai ces courbes à huit cas principaux; j'ai dû néanmoins intervertir l'ordre des troisième et quatrième cas.

Premier cas.

5. Il n'y a aucune direction réelle suivant laquelle une ligne droite coupe la courbe en moins de quatre points. Les quatre asymptotes rectilignes sont imaginaires, mais elles se coupent deux à deux en deux points réels, centres de deux séries d'ellipses concentriques, semblables et semblablement situées, dont chacune, ayant avec la courbe un double contact imaginaire à l'infini, ne la coupe qu'en quatre points. Espèce générale dépendant de 14 constantes:

(1) $$(p^2 + \lambda^2 q^2)(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu tu + \mu = 0.$$

Deuxième cas.

6. Il y a deux directions suivant lesquelles une ligne droite arbitraire rencontre la courbe en trois points seulement. Ce sont les directions de deux asymptotes réelles qui coupent la courbe en général et au plus en deux points. Il y a un nombre infini d'asymptotes hyperboliques, ayant ces mêmes asymptotes rectilignes. Deux d'entre elles ont suivant l'une de leurs asymptotes avec la courbe un contact du second et suivant l'autre un contact du premier ordre. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires, se coupant en un point réel, centre commun d'une infinité d'ellipses semblables qui ne coupent la courbe qu'en quatre points. Espèce générale, dépendant de 14 constantes:

$$pq(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu tu + \mu = 0. \tag{2}$$

Il peut arriver que chacun des deux points d'intersection de chacune des deux asymptotes réelles passe à l'infini. De là proviennent les espèces suivantes:

$$pq(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \tag{3}$$

$$pq(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu pt + \mu = 0, \tag{4}$$

$$pq(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \tag{5}$$

$$pq(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu p(q + \varkappa) + \mu = 0, \tag{6}$$

$$pq(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu pq + \mu = 0. \tag{7}$$

On obtiendrait d'autres espèces (dont je ne ferai pas mention ici, parce qu'Euler ne s'en est point occupé) en considérant les cas particuliers où les points d'intersection des asymptotes imaginaires passent à l'infini: c'est ce qui arriverait, par exemple, si, dans l'équation (7), on posait $\nu = 0$; je dirai seulement que le nombre des points d'intersection situés à l'infini est dans tous les cas le même sur les deux asymptotes imaginaires; du reste il peut être égal à trois ou à quatre.

Troisième cas.

7. Il y a quatre directions différentes et réelles suivant lesquelles une ligne droite coupe la courbe en trois points seulement, et il y a quatre asymptotes rectilignes et réelles, correspondant à ces quatre directions, qui coupent la courbe dans le cas général, dépendant de 14 constantes, en deux points. L'équation général est

$$pqrs + \nu tu + \mu = 0. \tag{8}$$

Les quatre asymptotes deviennent osculatrices suivant différents ordres dans les espèces suivantes les seules possibles:

(9) $$pqrs + \nu(p+\pi)t + \mu = 0,$$

(10) $$pqrs + \nu pt + \mu = 0,$$

(11) $$pqrs + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$$

(12) $$pqrs + \nu p(q+\varkappa) + \mu = 0,$$

(13) $$pqrs + \nu pq + \mu = 0,$$

(14) $$pqrs + \nu t = 0,$$

(15) $$pqrs + \nu p + \mu = 0,$$

(16) $$pqrs + \mu = 0.$$ *)

Quatrième cas.

8. A. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en trois points seulement, mais il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Il existe un nombre infini d'asymptotes paraboliques dont les diamètres ont la direction en question et parmi lesquelles il y en a une d'osculatrice. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires. Espèce générale dépendant de 13 constantes:

(17) $$(p^2 + \lambda q)(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)t + \mu = 0.$$

B. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque coupe la courbe en deux points seulement, sans pour cela être une asymptote de la courbe. En général il y a deux asymptotes parallèles qui, suivant cette même direction, coupent la courbe en un point unique. La courbe, en d'autres termes, a un point double qui est infiniment éloigné suivant la direction en question et dont les asymptotes sont les deux tangentes. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires. Nombre des constantes 12. B se subdivise en α, β, γ.

*) On voit que les ordres du contact sur les quatre asymptotes ne sont pas entièrement indépendants l'un de l'autre. En désignant les ordres de contact sur P, Q, R et S respectivement par le nombre des points passés à l'infini, l'on aura les symboles suivants pour représenter les neuf espèces que nous venons d'énumérer:

2222, 3222, 4222, 3322, 4322, 4422, 3333, 4333, 4444.

D'après Euler, existerait encore l'espèce suivante:

4433;

c'est sa 23e, l'intermédiaire entre (15) et (16). Mais on n'a qu'à compter le nombre des constantes de ces deux espèces, pour voir que celle d'Euler n'existe pas. En effet, ce nombre diminue en passant de (15) à (16) d'une unité seulement et descend de 10 à 9.

α. Les deux asymptotes parallèles sont imaginaires; le point double situé à l'infini est un point isolé. L'équation est

$$(18) \qquad (p^2 + \xi^2)(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0.$$

β. Les deux asymptotes parallèles sont réelles; deux branches réelles de la courbe se coupent à l'infini. L'équation est

$$(19) \qquad (p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0.$$

Le contact peut s'élever sur l'une des deux asymptotes parallèles, ou sur toutes les deux, au second ordre; c'est ce qui fournit les deux espèces suivantes:

$$(20) \qquad (p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p \pm \xi)t + \mu = 0,$$

$$(21) \qquad (p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma^2 s^2 + \varkappa) + \nu p + \mu = 0.^*)$$

γ. Les deux asymptotes parallèles coïncident en une seule, la courbe a sur cette asymptote double un point de rebroussement de première espèce et infiniment éloigné. Son contact avec l'asymptote est de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement. Nombre des constantes 11. L'équation est

$$(22) \qquad p^2(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0.$$

Si l'on a $\pi = 0$, le contact s'élève au premier ordre; le point double est le point de contact à l'infini de deux branches de la courbe sur l'asymptote double. L'équation devient

$$(23)\ (24) \qquad p^2(r^2 + \gamma^2 s^2) + \nu p t + \mu = 0.$$

Cette équation contient deux espèces différentes; les deux branches qui se touchent à l'infini peuvent être réelles ou imaginaires. La première de ces espèces a quatre branches infinies, qui s'approchent de l'asymptote double comme les quatre branches de deux hyperboles quelconques, ayant toutes les deux cette même asymptote. Il peut y avoir différentes positions de ces quatre branches par rapport à l'asymptote double. L'autre espèce n'a pas de branches infinies. Pour distinguer les deux espèces entre elles et surtout pour voir ce qui arrive dans le cas intermédiaire, j'ajouterai les développements suivants.

Posons

$$r^2 + \gamma^2 s^2 = t^2 + 2\alpha p t + \beta p^2 + 2\xi t + 2\eta p + \vartheta$$

et négligeons ensuite ρ par rapport aux constantes et celles-ci par rapport à t. Nous tirons alors de la dernière équation, pour les points infiniment éloignés de la courbe, l'équation suivante:

*) Euler n'a pas reconnu l'existence de l'espèce (20), où l'ordre du contact est différent sur les deux asymptotes parallèles. Cette espèce doit trouver sa place entre sa dixième et sa onzième espèce.

$$p^2t^2 + \nu pt + \mu = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(pt + \sigma)(pt + \sigma') = 0.$$

Cette équation représente deux hyperboles qui se confondent sensiblement avec la courbe sur l'asymptote P. Elles sont réelles si

(23) $$\nu^2 - 4\mu > 0,$$

imaginaires si

(24) $$\nu^2 - 4\mu < 0,$$

et coïncident enfin si

(25) $$\nu^2 - 4\mu = 0.$$

Dans ce dernier cas l'équation de la courbe devient

$$(pt + \sigma)^2 + 2(\alpha p^2 + \xi p)pt + \beta p^4 + 2\eta p^3 + \vartheta p^2 = 0,$$

et peut s'écrire ainsi (en posant pour abréger $\vartheta - 2\alpha\sigma = \xi$)

(25) $$(pt+\sigma)^2 + 2(\alpha p^2 + \xi p)(pt+\sigma) + \beta p^4 + 2\eta p^3 + \xi p^2 - 2\xi\sigma p = 0.$$

En négligeant p^2, on obtient

$$(pt + \sigma)^2 + 2\xi p(pt + \sigma) - 2\xi\sigma p = 0,$$

et en résolvant cette équation par rapport à $(pt + \sigma)$, il vient

$$(pt + \sigma) = \pm\sqrt{2\xi\sigma p}.$$

Cette équation fait voir que l'espèce (25) n'a que deux branches infinies situées sur le même côté de l'asymptote double P et formant à l'infini un point de rebroussement de seconde espèce. Ces deux branches infinies ont avec leur asymptote commune un contact du premier ordre, mais entre elles et avec l'hyperbole dont l'équation est la suivante:

$$pt + \sigma = 0,$$

un contact de l'ordre $\frac{3}{2}$ *).

Toute change de forme si dans l'équation (25) on pose $\xi = 0$; on obtient alors pour les points infiniment éloignés de la courbe

$$(pt + \sigma) = \pm p\sqrt{-\xi},$$

et l'on retombe sur les deux cas (23) et (24); deux branches infinies de la courbe, réelles ou imaginaires, se touchent. Dans le premier cas cependant les quatre branches de la courbe ont nécessairement, par rapport à leur asymptote double, deux à deux la même position, que les deux branches d'une hyperbole, avec lesquelles elles ont ainsi qu'entre elles un contact du second ordre.

*) L'espèce (25) n'a pas été aperçue par Euler.

Enfin si ξ disparaît, il y a de nouveau un changement de forme. On obtient alors pour les points de la courbe infiniment éloignés

$$(pt + \sigma) = \pm\sqrt{2\eta p^3}.$$

La courbe forme alors comme dans l'espèce (25) un point de rebroussement de seconde espèce, situé à l'infini et dont les deux branches ont entre elles un contact de l'ordre $\frac{5}{2}$.

L'ordre du contact des branches infinies de la courbe avec leur asymptote commune restant toujours le même, nous n'avons pas d'espèces nouvelles à consigner.

Cinquième cas.

9. Au lieu des deux asymptotes rectilignes et imaginaires, la courbe a deux asymptotes réelles, auxquelles répondent deux directions suivant lesquelles la courbe est coupée par une ligne droite quelconque en trois points seulement. Si des différentes branches infinies l'une n'influait pas sur la nature des autres, nous obtiendrions en combinant chacun des *six* cas particuliers relatifs à deux asymptotes rectilignes et énumérés dans le numéro (6) avec chacun des *neuf* cas particuliers relatifs aux asymptotes réelles et consignés dans le numéro précédent, *cinquante-quatre* espèces du cas présent. Mais ce nombre se réduit à *trente-neuf*, les autres espèces étant impossibles.

A. Asymptotes paraboliques:

(26) $(p^2 + \lambda q)rs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0,$

(27) $(p^2 + \lambda q)rs + \nu(p + \pi)(r + \varrho) + \mu = 0,$

(28) $(p^2 + \lambda q)rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0,$

(29) $(p^2 + \lambda q)rs + \mu t = 0,$

(30) $(p^2 + \lambda q)rs + \nu r + \mu = 0,$

(31) $(p^2 + \lambda q)rs + \mu = 0.$

B. Deux asymptotes parallèles et imaginaires:

(32) $(p^2 + \xi^2)rs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0,$

(33) $(p^2 + \xi^2)rs + \nu(p + \pi)(r + \varrho) + \mu = 0,$

(34) $(p^2 + \xi^2)rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0,$

(35) $(p^2 + \xi^2)rs + \mu t = 0,$

(36) $(p^2 + \xi^2)rs + \nu r + \mu = 0,$

(37) $(p^2 + \xi^2)rs + \mu = 0.$

C. Deux asymptotes parallèles réelles et non osculatrices:

(38) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu\,(p + \pi)t + \mu = 0,$

(39) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \pi)(r + \varrho) + \mu = 0,$

(40) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0,$

(41) $(p^2 - \xi^2)rs + \mu t = 0,$

(42) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu r + \mu = 0.$

D. Deux asymptotes parallèles et réelles, dont l'une osculatrice:

(43) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \xi)t + \mu = 0,$

(44) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \xi)(r + \varrho) + \mu = 0,$

(45) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \xi)r + \mu = 0.$

E. Deux asymptotes parallèles, réelles et osculatrices:

(46) $(p^2 - \xi^2)(rs + \varkappa) + \nu p + \mu = 0,$

(47) $(p^2 - \xi^2)rs + \nu p = 0.$ [1])

F. Un point de rebroussement de première espèce à l'infini:

(48) $p^2rs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0,$

(49) $p^2rs + \nu(p + \pi)(r + \varrho) + \mu = 0,$

(50) $p^2rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0,$

(51) $p^2rs + \nu t = 0,$

(52) $p^2rs + \nu r + \mu = 0.$

G. H. I. Deux branches de la courbe ont à l'infini un contact ou réel ou imaginaire, ou elles forment un point de rebroussement de seconde espèce:

(53) (57) (61) $p^2rs + \nu pt + \mu = 0,$

(54) (58) (62) $p^2rs + \nu p(r + \varrho) + \mu = 0,$

(55) (59) (63) $p^2rs + \nu pr + \mu = 0,$

(56) (60) (64) [2]) $p^2rs + \mu = 0$ *).

Sixième cas.

10. A. Il y a deux systèmes d'asymptotes paraboliques. Nombre des constantes 12. L'équation est

(65) $(p^2 + \lambda q)(r^2 + \gamma s) + \nu(p + \pi)(r + \varrho) + \mu = 0.$

*) Ne connaissant que 7 des 9 espèces du quatrième cas, Euler indique, au lieu de 54 espèces, 42 seulement, et reconnaît que deux de celles-ci sont impossibles, ce qui fait qu'il en compte 40. Mais sur ce nombre il y en a encore 8 qui n'existent pas, ce qui le réduirait à 32. Enfin, les 7 espèces suivantes ont échappé à ses recherches: (43), (44), (45), (61), (62), (63), (64), ce qui donne, comme nous l'avons annoncé plus haut, 39 espèces du cinquième cas.

B. Il y a un système d'asymptotes paraboliques et deux asymptotes parallèles, ou imaginaires, ou réelles, ou coïncidentes. Nombre des constantes du cas général 11. L'équation est

(66) $(p^2+\lambda q)(r^2+\gamma^2)+\nu(p+\pi)(r+\varrho)+\mu=0,$

(67) $(p^2+\lambda q)(r^2-\gamma^2)+\nu(p+\pi)(r+\varrho)+\mu=0,$

(68) $(p^2+\lambda q)(r^2-\gamma^2)+\nu(p+\pi)(r+\gamma)+\mu=0,$

(69) $(p^2+\lambda q)(r^2-\gamma^2)+\nu r+\mu=0,$

(70) $(p^2+\lambda q)r^2+\nu(p+\pi)(r+\varrho)+\mu=0,$

(71) (72) (73) $(p^2+\lambda q)r^2+\nu(p+\pi)r+\mu=0.$

C. Il y a deux systèmes de deux asymptotes parallèles ou imaginaires, ou réelles ou coïncidentes. Nombre des constantes du cas général 10. C se subdivise en α, β, γ, δ, ε, ζ.

α. Deux paires d'asymptotes imaginaires:

(74) $(p^2+\xi^2)(q^2+\gamma^2)+\nu(p+\pi)(q+\varkappa)+\mu=0.$

β. Deux paires d'asymptotes parallèles dont l'une imaginaire et l'autre réelle:

(75) $(p^2+\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu(p+\pi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(76) $(p^2+\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu(p+\pi)(q+\gamma)+\mu=0,$

(77) $(p^2+\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu q+\mu=0.$

γ. Deux paires d'asymptotes parallèles et réelles:

(78) $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu(p+\pi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(79) $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu(p+\xi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(80) $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu(p+\xi)(q+\gamma)+\mu=0,$

(81) $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\nu p+\mu=0,$

(82) $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2)+\mu=0.$

δ. Deux asymptotes parallèles et imaginaires, et deux coïncidant en une seule:

(83) $(p^2+\xi^2)q^2+\nu(p+\pi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(84) (85) $(p^2+\xi^2)q^2+\nu(p+\pi)q+\mu=0,$

(86) $(p^2+\xi^2)q^2+2\mu(p+\pi)q+\mu^2=0.$

ε. Deux asymptotes parallèles et réelles, et deux coïncidant en une seule:

(87) $(p^2-\xi^2)q^2+\nu(p+\pi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(88) $(p^2-\xi^2)q^2+\nu(p+\xi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(89) $(p^2-\xi^2)q^2+\nu p+\mu=0,$

(90) (91) $(p-\xi^2)\,q^2+\nu(p+\pi)q+\mu=0,$

(92) $(p^2-\xi^2)q^2+2\mu(p+\pi)q+\mu^2=0,$

(93) (94) $(p^2-\xi^2)q^2+\nu(p+\xi)q+\mu=0,$

(95) $(p^2-\xi^2)q^2+2\mu(p+\xi)q+\mu^2=0.$

Deux branches qui se touchent à l'infini sont incompatibles avec deux asymptotes parallèles et toutes les deux osculatrices. [3])

ξ. Deux paires de deux asymptotes coïncidentes:

(96) $p^2q^2+\nu(p+\pi)(q+\varkappa)+\mu=0,$

(97) (98) $p^2q^2+\nu p(q+\varkappa)+\mu=0,$

(99) $p^2q^2+2\mu p(q+\varkappa)+\mu^2=0.$

Il ne peut pas y avoir simultanément deux couples de branches qui se touchent à l'infini sur deux asymptotes doubles et différentes.*)

Septième cas.

11. La courbe a une asymptote rectiligne R et n'est coupée par une ligne droite, menée parallèlement à l'asymptote, qu'en trois points seulement.

A. En général, il y a en outre une seconde direction suivant laquelle la courbe est rencontrée par une ligne droite quelconque en trois points seulement. Une parabole quelconque dont les diamètres ont cette même direction, ne coupe la courbe qu'en six points. Malgré cela il n'y a ni asymptote rectiligne ni asymptote parabolique; mais il y a une infinité d'asymptotes semi-cubi-paraboliques, toutes indiquées par une équation de la forme suivante:

$$p^3+\lambda(q+\varkappa)^2=0,$$

*) Euler compte 47 espèces du sixième cas; mais dans ce nombre, il faut d'abord rectifier une erreur de calcul. Dans la supposition que la nature d'une branche infinie est absolument indépendante de la nature des autres, Euler fixe ce nombre à $7^2=49$, c'est-à-dire qu'il le croit égal au carré du nombre adopté par lui des différentes espèces du quatrième cas, dans l'énumération desquelles les asymptotes imaginaires ne sont pour rien, au lieu qu'il aurait dû prendre le nombre $\frac{7\,.\,8}{1\,.\,2}$. Dans la même supposition $\frac{9\,.\,10}{1\,.\,2}=45$ espèces se présenteraient à nous. Ensuite Euler reconnaît que deux de ses espèces n'existent pas; son vrai nombre serait donc 26. Mais d'un côté il y a encore trois autres espèces qui n'existent pas, ce qui baisserait le nombre à 23, tandisque d'un autre côté les 12 espèces suivantes:

68, 73, 76, 79, 80, 86, 88, 92, 93, 94, 95, 99

sont omises, ce qui définitivement nous fournit le nombre 35. Sur les 45 espèces indiquées plus haut, il y en a 10 d'impossibles.

si l'on y donne à x successivement toutes les valeurs possibles. Six points d'intersection ayant passé à l'infini, chacune de ces asymptotes coupe la courbe proposée en six points seulement; et même il en est toujours une qui en général et au plus ne coupe la courbe qu'en cinq points; je l'apellerai *osculatrice*. Par rapport à elle l'ordre du contact s'élève à $\frac{2}{3}$, tandisque, pour une autre parabole quelconque de cette espèce, il ne s'élève que jusqu'à $\frac{1}{3}$. Dans l'équation suivante, contenant 12 constantes, l'asymptote osculatrice est mise en évidence:

$$(p^3 + \lambda q^2)r + \nu(p + \pi)s + \mu = 0. \tag{100}$$

Comme l'ordre du contact de la courbe avec son asymptote R peut monter, l'on obtient les deux espèces suivantes:

$$(p^3 + \lambda q^2)r + \nu(p + \pi)(r + \varrho) + \mu = 0, \tag{101}$$

$$(p^3 + \lambda q^2)r + \nu(p + \pi)r + \mu = 0. \tag{102}$$

B. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque coupe la courbe en deux points seulement, sans toutefois être son asymptote. De plus toutes les paraboles d'un paramètre déterminé et dont les diamètres ont cette même direction ne coupent la courbe qu'en quatre points, sans toutefois être ses asymptotes. Mais au nombre des lignes droites en question, il en est une seule P, asymptote de la courbe, qui la coupe en général et au plus en un seul point, et au nombre des paraboles en question, il en est une série infinie dont les axes coïncident et qui, asymptotes de la courbe, ne la coupent qu'en trois points; parmi ces paraboles, il y en a toujours une seule, asymptote osculatrice de la courbe, qui la coupe en général et au plus en deux points. Nombre des constantes 11. B contient α et β.

α. L'asymptote P est une asymptote ordinaire:

$$p(p^2 + \lambda q)r + \nu p^2 + \mu s = 0, \tag{103}$$

$$p(p^2 + \lambda q)r + \mu s = 0, \tag{104}$$

$$p(p^2 + \lambda q)r + \nu r + \mu = 0. \tag{105}$$

β. L'asymptote P est une asymptote osculatrice:

$$p(p^2 + \lambda q)r + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \tag{106}$$

$$p(p^2 + \lambda q)r + \nu p + \mu = 0, \tag{107}$$

$$p(p^2 + \lambda q)r + \mu = 0. \tag{108}$$

C. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en deux points seulement, mais cette droite n'est jamais asymptote de la courbe. Toute parabole dont les

diamètres ont cette même direction, ne coupe la courbe qu'en cinq points; mais aucune transformation, aucun déplacement d'une telle parabole ne peut la rendre asymptote de la courbe. Il y a seulement une infinité d'asymptotes cubi-paraboliques, représentées par l'équation suivante:

$$p^3 + \lambda(q + \varkappa) = 0,$$

en y regardant $\varkappa$ comme une quantité indéterminée. Neuf points d'intersection ayant passé à l'infini, chacune de ces asymptotes ne coupe la courbe qu'en trois points. Parmi elles il y en a une, que j'appellerai *osculatrice*, qui ne coupe la courbe qu'en deux points. En général, l'ordre du contact est $\frac{2}{3}$; pour chaque point nouveau passant à l'infini il s'élève de $\frac{1}{3}$. Nombre des constantes 10. C'est l'asymptote osculatrice qui est mise en évidence dans les équations suivantes:

(109) $$(p^3 + \lambda q)r + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0,$$

(110) $$(p^3 + \lambda q)r + \nu p + \mu = 0,$$

(111) $$(p^3 + \lambda q)r + \mu = 0.$$

Dans les deux cas B et C, la courbe a un point double situé à l'infini. Dans le premier cas, des deux tangentes de ce point l'une est l'asymptote P, et l'autre est située tout entière à l'infini. Dans le second cas, les deux tangentes sont situées à l'infini.

D. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque ne coupe la courbe qu'en un point unique. En général une telle ligne droite est asymptote de la courbe dans trois positions différentes, et alors elle ne la coupe pas du tout. La courbe a un point triple situé à l'infini, dont les trois tangentes ne sont autre chose que les trois asymptotes parallèles de la courbe. Nombre des constantes 9. D se subdivise en α, β, γ, δ.

α. Deux des trois asymptotes parallèles sont imaginaires:

(112) $$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0,$$

(113) $$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \nu p + \mu = 0,$$

(114) $$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \mu = 0.$$

β. Les asymptotes parallèles sont réelles toutes les trois:

(115) $$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0,$$

(116) $$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \nu p + \mu = 0,$$

(117) $$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \mu = 0.$$

γ. Deux des trois asymptotes parallèles coïncident en une seule. Par rapport à elles, l'ordre du contact se réduit à $\frac{1}{2}$.

(118) $$(p+\pi)p^2q+\sigma p^2+\nu p+\mu=0,$$

(119) $$(p+\pi)p^2q+\nu p+\mu=0,$$

(120) $$(p+\pi)p^2q+\mu=0.$$

δ. Les asymptotes parallèles se confondent en une seule, toutes les trois; l'ordre du contact s'abaisse à $\frac{1}{3}$.

(121) $$p^3q+\sigma p^2+\nu p+\mu=0,$$

(122) $$p^3q+\nu p+\mu=0,$$

(123) $$p^3q+\mu=0.$$

Huitième cas.

12. A. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en trois points seulement. Si l'on détermine la constante arbitraire d'une telle ligne droite de manière qu'elle ne coupe la courbe qu'en deux points, on verrait qu'alors cette ligne droite passe à l'infini. Il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Toute parabole dont les diamètres ont cette même direction, coupe la courbe en six points seulement, mais elle passe à l'infini si, afin qu'elle devienne asymptote, l'on dispose de ses deux constantes arbitraires de manière qu'elle ne coupe la courbe qu'en quatre points. Il n'y a pas d'asymptote parabolique. Il n'y a pas non plus une asymptote courbe du troisième degré. Enfin, il n'y a pas même une asymptote parabolique du quatrième degré. Nombre des constantes 11.

(124) $$p^4+q(\varkappa p^2+\lambda q^2)+\nu(p+\pi)r+\mu=0.\ ^*)$$

B. Il y a une infinité de paraboles du degré $\frac{1}{3}$, asymptotes de la courbe, et représentées par l'équation

$$p^4+\lambda(q+\varkappa)^3=0,$$

en y regardant $\varkappa$ comme une quantité indéterminée. En général, une telle parabole coupe la courbe en huit points, mais il y en a une qui la coupe en sept points seulement. En général l'ordre du contact est $\frac{1}{4}$, pour celle-ci $\frac{1}{2}$, et si, dans des cas particuliers des points d'inter-

*) L'espèce générale du huitième cas est échappée à Euler, qui paraît supposer qu'une courbe d'un degré quelconque a nécessairement pour asymptote une courbe donnée par une équation à deux termes:

$$p^m+\lambda q^n=0;$$

ce qui, passé le troisième degré, n'est plus vrai.

section nouveaux passent à l'infini, il s'élève pour chacun d'eux de $\frac{1}{4}$. Nombre des constantes 10.

(125) $$p^4 + \lambda q^3 + \nu(p+\pi)r + \mu = 0.$$

C. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en deux points seulement; c'est parce que celle-ci a un point double situé à l'infini. En déterminant les deux tangentes de ce point, on n'en trouve qu'une seule, asymptote de la courbe, l'autre ayant passé tout entière à l'infini. Il y a avec cette asymptote rectiligne une série infinie d'asymptotes semi-cubi-paraboliques. Nombre des constantes 10. Suivant que l'asymptote rectiligne est une asymptote ordinaire ou osculatrice, on obtient les deux espèces suivantes:

(126) $$(p+\pi)(p^3 + \lambda q^2) + \sigma p^2 + \mu r = 0,$$

(127) $$(p+\pi)(p^3 + \lambda q^2) + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0.$$

D. Il y a une direction unique suivant laquelle la courbe est coupée par une ligne droite quelconque en deux points seulement. Il y a un point double situé à l'infini suivant cette direction. Les deux tangentes de ce point ayant passé à l'infini toutes les deux, il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Toute parabole quelconque dont les diamètres se confondent avec cette direction coupe la courbe en quatre points seulement. Une telle parabole dépend encore de trois constantes arbitraires. En disposant convenablement de deux de ces constantes, on obtient deux séries infinies de paraboles, dont le paramètre et la position de l'axe sont déterminés, et qui sont les asymptotes de la courbe qu'elles coupent en deux points seulement. Enfin dans chacune des deux séries, il y a une asymptote osculatrice qui coupe la courbe en général et au plus en un point unique. Ces deux asymptotes sont mises en évidence dans l'équation suivante. Nombre des constantes 9.

$$(p^2 + \lambda q)(p^2 + \gamma r) + \nu p + \mu = 0.$$

Mais comme les deux séries d'asymptotes paraboliques sont ou réelles ou imaginaires, il faut distinguer deux espèces indiquées dans l'équation suivante (qui est équivalente à la précédente) par le double signe:

(128) (129) $$[(p^2 + \lambda q)^2 \mp \gamma^2 r^2] + \nu p + \mu = 0.$$

Pour déterminer l'espèce limite entre ces deux-là, examinons ce qui arrive dans le cas de paramètres égaux: r se réduit alors à $(p+\pi)$, ce qui fait disparaître deux constantes à la fois de l'équation précé-

dente. Cette circonstance indique une espèce intermédiaire. Dans celle-ci, en effet, les deux séries d'asymptotes paraboliques s'éloignent à l'infini, il n'y a pas d'asymptote parabolique proprement dite. De même que deux asymptotes rectilignes et infiniment éloignées sont remplacées par une parabole, deux asymptotes paraboliques infiniment éloignées sont remplacées par une asymptote unique du quatrième degré. L'équation de cette espèce est la suivante:

$$(130) \qquad (p^2 + \lambda q)^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0.\ ^4)$$

Dans le cas de paramètres égaux les équations (128) et (129) deviennent:

$$(p^2 + \lambda q)^2 \mp \gamma^2(p + \pi)^2 + \mu = 0,$$

et peuvent s'écrire sous la forme suivante, pour faire ressortir les deux asymptotes osculatrices dans le cas où celles-ci sont réelles:

$$(p^2 + \lambda q)[(p + \pi)^2 + \lambda(q + \varkappa)] + \mu = 0.$$

Dans ce cas, il faut que les huit points d'intersection passent tous à l'infini, pour que le contact de la courbe et d'une parabole soit du premier ordre, tandis que dans le cas général il suffit que cinq points et, dans le cas de l'équation (128), que sept points d'intersection passent à l'infini. Pour les courbes du quatrième degré, les axes des deux asymptotes paraboliques à paramètres égaux ne peuvent pas coïncider. Cela exigerait qu'on pût faire disparaître π dans l'équation précédente, sans la rendre décomposable en deux facteurs du second degré. A plus forte raison, il est impossible que deux asymptotes paraboliques de la courbe coïncident en une seule.*)

*) Euler compte également trois espèces du cas D, désignées par lui comme la 139°, 140° et 141°. Mais toutes ses conclusions sont erronées. En partant de l'équation

$$(y^4 + ay^2x + ex^2) + cy^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

il décompose son premier terme en deux facteurs du second degré de la manière suivante:

$$(y^2 + px)(y^2 + p'x);$$

ce produit égalé à zéro représente deux paraboles ayant même axe et même sommet. Ces deux paraboles sont d'après lui les deux asymptotes de la courbe. Comme partout il ne voit que deux asymptotes paraboliques là où il y en a une infinité. Mais ces deux asymptotes dépendent en partie du choix arbitraire des axes des coordonnées, et d'autres asymptotes en effet vont se présenter, si, par exemple, la courbe proposée est rapportée à un autre axe des y, parallèle au premier. Je dis plus, aucune des deux paraboles d'Euler n'est une asymptote de la courbe. Pour le faire voir, désignons, en donnant à l'abscisse x une valeur infinie, la valeur de l'ordonnée, répondant aux points de l'une des deux paraboles, par y, de manière qu'on ait

E. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite rencontre la courbe en un point unique. Il y a à l'infini suivant cette direction un point triple. Des trois tangentes de ce point, l'une est infiniment éloignée; les deux autres sont les deux asymptotes rectilignes de la courbe et peuvent être ou imaginaires, ou réelles, ou confondues en une seule. A l'autre tangente répond une série infinie d'asymptotes paraboliques qui coupent la courbe en général en deux points. Dans ce nombre se trouve une parabole osculatrice qui rencontre la courbe en général et au plus en un point unique. Nombre des constantes 8.

$$(p^2 + \xi^2)(p^2 + \lambda q) + \nu p + \mu = 0, \tag{131}$$

$$(p^2 - \xi^2)(p^2 + \lambda q) + \nu p + \mu = 0, \tag{132}$$

$$p^2(p^2 + \lambda q) + \nu p + \mu = 0. \tag{133}$$

F. La courbe a un point triple comme dans le cas précédent; deux de ses trois tangentes ont passé à l'infini. Il y a une seule asymptote rectiligne, ne coupant point la courbe. En outre, il y a une série infinie d'asymptotes cubi-paraboliques rencontrant la courbe en général en un seul point, tandis que l'une d'elles ne la coupe pas du tout. L'ordre du contact qui en général est $\frac{2}{3}$ s'élève pour celle-ci à l'unité. Nombre des constantes 7.

$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q) + \mu = 0. \tag{134}$$

G. Les tangentes du point triple à l'infini sont situées elles-mêmes, toutes les trois, tout entières à l'infini. Il y a une infinité

$$y^2 + px = 0,$$

et la valeur correspondant à un point de la courbe par $(y + \beta)$, il viendra

$$(y + \beta)^2 + px = -\frac{c(y+\beta)^2 + d(y+\beta)x + f(y+\beta) + gx + h}{(y+\beta)^2 + p'x}$$

et de là on tire, en ayant égard à l'équation précédente et en négligeant convenablement

$$\beta = \frac{d}{2(p - p')} = \frac{d}{\sqrt{a^2 - 4e}}.$$

Donc, pour que la parabole en question devienne une asymptote de la courbe, il faut la déplacer parallèlement à ses diamètres d'une distance égale à la valeur de β. Si l'on a

$$a^2 - 4e = 0,$$

Euler en conclut que les deux asymptotes paraboliques coïncident, ce qui ne peut jamais arriver. Dans ce cas le déplacement de la parabole déterminée par lui doit être infiniment grand, pour qu'elle devienne asymptote; c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'asymptote parabolique dans ce cas.

d'asymptotes paraboliques du quatrième ordre, qui coupent toutes la courbe proposée en deux points. L'ordre de ces asymptotes, toutes comprises dans l'équation suivante, en y regardant q comme une fonction linéaire absolument arbitraire,

$$p^4 + \lambda q = 0,$$

s'élève a $\frac{1}{4}$; mais en général il n'y a pas une de ces asymptotes pour laquelle cet ordre monte plus haut. Nombre des constantes 6.

(135) $$p^4 + \lambda q + \nu p^2 = 0.$$

23.

Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues.

(Crelle's Journal, Band 16, S. 47—57. 1836.)

1.

Soit

$$\varphi_n(x, y) = 0 \tag{1}$$

l'équation générale d'un degré n quelconque entre les deux inconnues x et y. Une telle équation contient $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1\right)$ coefficients qui à leur tour sont complètement déterminés, quand on connaît $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1\right)$ couples de valeurs de x et y qui satisfont à l'équation proposée; car il est évident que chacun de ces couples fournit une équation linéaire entre les coefficients en question.

Ajoutons maintenant à l'équation précédente une autre équation quelconque du même degré que nous représenterons par

$$\psi_n(x, y) = 0. \tag{2}$$

L'ensemble des équations (1) et (2) donne n^2 couples de valeurs de x et y qui satisfont non seulement à ces deux équations, mais encore à toute équation qui en résulte, par quelle combinaison algébrique que ce soit. On peut, en désignant par μ un coefficient arbitraire, représenter toutes les équations du $n^{\text{ième}}$ degré qui résultent ainsi des deux équations (1) et (2), de la manière suivante:

$$\varphi_n(x, y) + \mu\psi_n(x, y) = 0. \tag{3}$$

Les n^2 couples de valeurs qui satisfont non seulement à l'équation (1) mais encore à l'équation (2) et toutes les équations (3), ne suffisent donc pas pour déterminer les coefficients de l'équation (1). Cette détermination devient complète, si l'on connaît un nouveau couple de valeurs. Soient y_0 et x_0 ces valeurs qui satisfont à l'équation (1) sans satisfaire à l'équation (2), de sorte qu'on ait:

$$\varphi_n(x_0,\ y_0) = 0, \quad \psi_n(x_0,\ y_0) \lesseqgtr 0.$$

Ces mêmes valeurs ne pourront jamais satisfaire à l'équation (3), pourvu qu'on n'y pose $\mu = 0$, ce qui la réduit à l'équation (1).

Il suit de ce qui précède que $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} - 2\right)$ couples de valeurs pris au hazard et qui satisfont à l'équation (1) sont, quant à la détermination des coefficients de cette équation, tout-à-fait équivalents à n^2 couples choisis de manière qu'ils satisfont en même temps à une seconde équation *quelconque* du même degré. Car dans les deux cas cette détermination est complète et linéaire, si l'on ajoute aux couples donnés un couple nouveau. Ainsi nous sommes parvenus aux deux théorèmes suivants qui, quant au fond, reviennent au même.

I. *Si l'on donne à deux quantités variables successivement* $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} - 2\right)$ *couples de valeurs quelconques et si l'on suppose que ces valeurs satisfassent à une équation quelconque du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre les deux variables, il y aura*

$$n^2 - \left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} - 2\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}$$

couples de valeurs nouveaux qui satisfont à la même équation et qui dépendent uniquement des couples précedents.

II. *Si l'on connaît* $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} - 2\right)$ *couples de racines de deux équations du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre deux inconnues, l'on obtiendra les* $\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}$ *couples de racines restantes, sans avoir recours à ces équations.*

2.

Il est évident que ces racines inconnues dépendent d'une équation du $\frac{(n-1)(n-2)^{\text{ième}}}{1\,.\,2}$ degré. Ensuite l'on entrevoit la forme d'équations symétriques qui doivent subsister entre les n^2 couples de racines des deux équations d'un même degré; car de quelle manière qu'on choisisse parmi ces n^2 couples $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} - 2\right)$ pour en déterminer les autres, cette détermination ne doit nullement changer.

3.

Pour rendre l'énoncé de nos théorèmes aussi clair que possible, je m'arrêterai un moment au cas de $n = 3$.

Huit couples de valeurs qui satisfont à une équation du troisième degré entre deux variables comportent un neuvième couple qui s'obtient linéairement au moyen des autres.

Soient $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots . x_8, y_8$ les huit couples de valeurs qui comportent le neuvième couple que nous désignerons par x_9, y_9. Il faut alors, d'après le théorème précédent, que des huit équations:

$$Ay_1^3+Bx_1y_1^2+Cx_1^2y_1+Dx_1^3+Ey_1^2+Fx_1y_1+Gx_1^2+Hy_1+Kx_1+J=0,$$
$$Ay_2^3+Bx_2y_2^2+Cx_2^2y_2+Dx_2^3+Ey_2^2+Fx_2y_2+Gx_2^2+Hy_2+Kx_2+J=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Ay_8^3+Bx_8y_8^2+Cx_8^2y_8+Dx_8^3+Ey_8^2+Fx_8y_8+Gx_8^2+Hy_8+Kx_8+J=0,$$

se déduise l'équation suivante:

$$Ay_9^3+Bx_9y_9^2+Cx_9^2y_9+Dx_9^3+Ey_9^2+Fx_9y_9+Gx_9^2+Hy_9+Kx_9+J=0;$$

c'est-à-dire, il faut que nous parvenions à cette dernière équation en ajoutant les huit équations qui précèdent, après les avoir respectivement multipliées par des coefficients convenables $\mu_1, \mu_2 \ldots . \mu_8$. Ceci suppose qu'on ait:

$$\begin{aligned} \Sigma\mu &= 1, & \Sigma\mu y^2 &= y_9^2, \\ \Sigma\mu x &= x_9, & \Sigma\mu x^3 &= x_9^3, \\ \Sigma\mu y &= y_9, & \Sigma\mu x^2 y &= x_9^2 y_9, \\ \Sigma\mu x^2 &= x_9^2, & \Sigma\mu x y^2 &= x_9 y_9^2, \\ \Sigma\mu xy &= x_9 y_9, & \Sigma\mu y^3 &= y_9^3, \end{aligned}$$

en nous servant pour abréger du signe Σ et en l'étendant de μ_1, $\mu_1 x_1$, $\mu_1 y_1$ etc. jusqu'à μ_8, $\mu_8 x_8$, $\mu_8 y_8$ etc. Les dix équations sont nécessaires et suffisantes pour déterminer x_9 et y_9, après avoir déterminé préalablement les huit coefficients $\mu_1, \mu_2, \ldots . \mu_8$. Ici je n'entreprendrai pas de faire ressortir des équations ci-dessus qu'on obtient des valeurs uniques pour x_9 et y_9; il me suffira d'avoir vérifié le théorème général pour le troisième degré, en suivant une marche différente.

4.

Nous pouvons, par des considérations extrêmement simples, généraliser les théorèmes du numéro 1., pour en multiplier les applications et pour les étendre au cas de $n = 2$ et même au cas de $n = 1$. En effet, s'il y en a parmi les $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1\right)$ coefficients de l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré un nombre m quelconque qui sont donnés, ou, plus généralement, s'il y a m équations linéaires de condition entre les $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1\right)$ coefficients, chaque coefficient donné ou chaque équation linéaire de condition remplacera complètement,

quant à la détermination des $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1\right)$ coefficients, l'une des équations que fournit chaque couple des variables supposées données. Donc:

III. *Si m des coefficients de l'équation d'un degré n quelconque entre deux variables sont donnés, ou bien encore, s'il existe m équations linéaires de condition entre ces coefficients, il suffira de connaître* $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - (m+2)\right)$ *couples de valeurs des deux variables qui satisfont à l'équation du* $n^{ième}$ *degré, pour en déduire* $\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + m\right)$ *couples nouveaux.*

Le nombre m peut être pris arbitrairement entre les limites 0 et $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 2\right)$.

Pour particulariser, je choisirai les exemples suivants qui sont de première simplicité.

Si entre les coefficients A, B et C de l'équation linéaire

$$Ay + Bx + C = 0$$

il existe une équation de condition également linéaire, un même couple de valeurs de x et y satisfera toujours à l'équation précedente, quelles que soient du reste les valeurs des coefficients de cette équation.

Si l'on connaît trois couples de valeurs de x et y qui satisfont à l'équation suivante:

$$A(y^2 - x^2) + Bxy + Dy + Ex + F = 0,$$

l'on déduira linéairement de ces trois couples un quatrième qui satisfera également à la même équation.

Si quatre équations linéaires de condition sont données entre les coefficients de l'équation suivante:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

il y aura toujours les mêmes quatre couples de valeurs de x et y qui satisferont à cette équation.

5.

Il y a un autre mode de généraliser les théorèmes I et II et d'en multiplier les applications.

Parmi les $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 2\right)$ couples de valeurs qui satisfont à l'équation générale du $n^{ième}$ degré:

(1) $$\varphi_n(x, y) = 0,$$

et qui dans les théorèmes que nous venons de citer sont pris arbitrairement, choisissons en à volonté $\left(\frac{(p+1)(p+2)}{1.2}-1\right)$ qui détermineront complètement une équation du $p^{\text{ième}}$ degré, que nous représentrerons par

$$\varphi_p(x, y) = 0, \tag{2}$$

et qui est satisfaite par chacun de ces couples. Supposons en outre, en faisant

$$n = p + q,$$

que les couples restants, au nombre de

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 2 - \left(\frac{(p+1)(p+2)}{1.2} - 1\right) = nq - \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$$

satisfassent tous à une même équation quelconque du $q^{\text{ième}}$ degré:

$$\varphi_q(x, y) = 0. \tag{3}$$

Tout ceci admis, il est évident que l'équation générale (1) comprendra en particulier l'équation suivante:

$$\varphi_p(x, y)\varphi_q(x, y) = 0. \tag{4}$$

Donc tous les autres couples qui, d'après nos théorèmes, satisfont à l'équation générale (1), satisferont également à l'équation (4), c'est-à-dire ou à l'équation (2) ou à l'équation (3). Le nombre des couples qui satisfont en même temps aux deux équations (1) et (3) s'élevant à nq, il suit que les $\left(nq - \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\right)$ couples qui, d'après nos suppositions, sont de ce nombre, en comportent $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ couples nouveaux. Le théorème ainsi démontré peut s'énoncer de la manière suivante.

IV. *Si l'on connaît* $\left(nq - \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\right)$ *couples des racines de deux équations du* $n^{\text{ième}}$ *et du* $q^{\text{ième}}$ *degré entre deux inconnues,* n *étant plus grand que* q *et* q *plus grand que* 2, *l'on en déduira les* $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ *couples des racines restantes sans recourir aux équations proposées, en fonction des racines connues et par la resolution de deux équations du* $\left(\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\right)^{\text{ième}}$ *degré.*

En faisant $n = q$, nous retombons sur les théorèmes du numéro 4.

6.

Passons maintenant à l'équation générale d'un degré quelconque entre les *trois* inconnues x, y et z, que nous représenterons par

$$\varphi_n(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Le nombre de ses constantes est égal à $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 1\right)$; et on peut les déterminer par des équations linéaires, quand on connait un pareil nombre de groupes de trois valeurs (prises au hazard) qui vérifient l'équation proposée. Mais si, en particulier, ces groupes de trois valeurs sont choisis de manière à vérifier en même temps une autre équation *quelconque* du même degré:

$$\psi_n(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

ce nombre n'est plus suffisant pour déterminer les coefficients de l'équation (1). Il est évident même que le nombre infini des groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à l'équation (2), ne suffisent point pour ce but; parceque tous satisferont également à l'équation suivante du même degré:

$$\varphi_n(x, y, z) + \mu\psi_n(x, y, z) = 0,$$

en y donnant à μ une valeur quelconque. Mais si l'on connait en outre un groupe nouveau de valeurs qui satisfont à l'équation (1), sans satisfaire à l'équation (2), ce groupe complétera la détermination linéaire des coefficients de l'équation (1); d'où l'on conclut que, quant à cette détermination, $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 2\right)$ groupes, pris au hazard, sont équivalents à une infinité de pareils groupes, qui conviennent également à une seconde équation quelconque du même degré entre x, y et z.

Ajoutons aux deux équations (1) et (2) une troisième équation du même degré, que nous représenterons par

$$\chi_n(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Alors il y a n^3 groupes de valeurs des trois inconnues qui satisfont non seulement à ces trois équations (1), (2) et (3), mais encore à toutes les équations du même degré que contient l'expression suivante, en y regardant μ et ν comme arbitraires:

$$\varphi_n(x, y, z) + \mu\psi_n(x, y, z) + \nu\chi_n(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

En connaissant les n^3 groupes de valeurs en question, l'on retombe donc indifféremment sur l'une quelconque de ces équations. Si l'on veut que ce soit en particulier l'équation (1), il suffit de connaître en outre *deux* groupes de valeurs quelconques x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 qui satisfont à l'équation (1) sans satisfaire à aucune des deux équations (2) et (3). Car alors on a

$$\varphi_n(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \psi_n(x_1, y_1, z_1) \gtrless 0, \quad \chi_n(x_1, y_1, z_1) \gtrless 0;$$

$$\varphi_n(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad \psi_n(x_2, y_2, z_2) \gtrless 0, \quad \chi_n(x_2, y_2, z_2) \gtrless 0;$$

et pour que les deux mêmes groupes vérifient l'équation (4), il faut que les indéterminées μ et ν deviennent zéro. De là on conclut que, quant à la détermination de l'équation (1), $\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 3\right)$ groupes de valeurs, pris au hazard, sont équivalents à n^3 groupes, choisis tels qu'ils satisfont également à deux autres équations *quelconques* du même degré entre x, y et z.

Nous sommes parvenus ainsi aux théorèmes suivants, en posant pour abréger

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 1 = N.$$

V. *Si l'on donne à trois quantités variables successivement* $(N-1)$ *groupes de valeurs quelconques et si l'on suppose que ces valeurs satisfont à une équation quelconque du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre les trois variables, il y aura une infinité de tels groupes, dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont tous à cette même équation.*

VI. *Si l'on donne à trois quantités variables successivement* $(N-2)$ *groupes de valeurs, pris à volonté, et si l'on suppose que ces groupes satisfont à une équation quelconque du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre les trois variables, il y aura toujours* $(n^3 - N + 2)$ *groupes de valeurs nouveaux et dépendant uniquement des groupes donnés qui satisferont à cette même équation.*

VII. *Si l'on connaît* $(N-1)$ *groupes de valeurs qui satisfont en même temps à deux équations du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre trois inconnues, l'on obtiendra une infinité de tels groupes, sans avoir recours aux deux équations proposées.*

VIII. *Si l'on connaît* $(N-2)$ *groupes de racines de trois équations données du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre trois inconnues, l'on en déduira les* $(n^3 - N + 2)$ *groupes de racines restantes sans avoir recours aux équations données.*

7.

D'après le mode de généralisation du numéro (4) nous obtenons sur le champ les théorèmes suivants.

IX. *Si parmi les coefficients de l'équation générale du* $n^{\text{ième}}$ *degré entre trois variables il y en a m de donnés, ou bien encore, si m équations linéaires de condition ont lieu entre ces coefficients, il en résultera*

1°. *Que* $(N-m-1)$ *groupes donnés des trois variables qui vérifient l'équation générale en comportent un nombre infini;*

2°. *Que* $(N-m-2)$ *groupes donnés en comportent* $(n^3 - N + m + 2)$ *groupes nouveaux.*

L'on peut prendre le nombre m arbitrairement, dans le premier

cas, entre les limites 0 et $(N-2)$, et dans le second cas entre les limites 0 et $(N-3)$.

8.

Faisons

$$n = p + q \text{ et } \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3} - 1 = P,$$

et supposons que l'on prenne à volonté parmi les $(N-1)$ groupes du théorème V qui vérifient l'équation

$$\varphi_n(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

un nombre P, suffisant pour déterminer une équation du $p^{\text{ième}}$ degré, que nous représenterons par

$$\varphi_p(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Supposons en outre que les groupes restants, au nombre de $(N-P-1)$, satisfassent tous à une même équation du $q^{\text{ième}}$ degré, représentée par

$$\varphi_q(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Dans ce cas l'équation (1) comprendra comme cas particulier la suivante:

$$\varphi_p(x, y, z)\,\varphi_q(x, y, z) = 0, \tag{4}$$

d'où l'on conclut que l'infinité des groupes qui, d'après le théorème cité, satisfont à toutes les équations (1), vérifient également soit l'équation (2) soit l'équation (3), et de là on tire le théorème suivant:

X. *Si l'on connaît* $N - P - 1 =$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1.2.3} - 1$$

groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à deux équations entre x, y et z, dont l'une s'élève au $n^{\text{ième}}$ *et l'autre au* $q^{\text{ième}}$ *degré, l'on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations.*

9.

Faisons en outre

$$n = r + s, \quad \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3} - 1 = R,$$

et supposons que les équations suivantes:

$$\varphi_n(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi_p(x, y, z)\varphi_q(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi_r(x, y, z)\,\varphi_s(x, y, z) = 0,$$

qui s'élèvent toutes les trois au $n^{\text{ième}}$ degré, aient $(N-2)$ groupes de racines données. Il en suit, d'après le théorème VI, qu'alors tous leurs groupes de racines, au nombre de n^3, sont déterminés. Sur ces

n^3 groupes de racines, il y en a nqs qui appartiennent aux trois équations suivantes:

$$(5) \qquad \varphi_n(x, y, z) = 0, \quad \varphi_q(x, y, z) = 0, \quad \varphi_s(x, y, z) = 0.$$

Distribuons les $(N - 2)$ groupes de racines en question de manière qu'ils viennent

$$P \text{ sur l'équation: } \varphi_p(x, y, z) = 0,$$
$$R \text{ „ „ } \varphi_r(x, y, z) = 0.$$

Ces nombres de groupes sont suffisants pour déterminer ces deux équations. Des $(N - 2)$ groupes restent donc

$$(N - P - 2) \text{ pour l'équation: } \varphi_q(x, y, z) = 0,$$
$$(N - R - 2) \text{ „ „ „ } \varphi_s(x, y, z) = 0,$$

de sorte qu'il y en a $(N - P - R - 2)$ qui appartiennent aux trois équations (5). De là le théorème suivant.

XI. *Si l'on connait*

$$N - P - R - 2 =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$- \frac{(n-s+1)(n-s+2)(n-s+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1$$

groupes des racines de trois équations entre trois inconnues et dont les degrés s'élèvent respectivement à n, q et s, l'on en déduira tous les autres groupes sans avoir recours aux trois équations proposées.

Ainsi par exemple, sur les 60 groupes des racines de trois équations du 3ième, 4ième et 5ième degré, 41, pris à volonté, comportent les 19 qui restent.

10.

Nous pouvons maintenant étendre sans difficulté les résultats auxquels nous sommes parvenus jusqu'ici à des équations d'un degré quelconque et entre un nombre quelconque d'inconnues. Nous parvenons ainsi en généralisant le théorème IX qui, si l'on pose $m = 0$, comprend les précédents au théorème suivant, en désignant, pour abréger, par S le nombre des coefficients de l'équation d'un degré n quelconque entre g inconnues et par h un nombre arbitraire > 1 et $< g$.

XII. *Si, parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ième}$ degré entre g variables, il y en a m de donnés, ou bien encore, si m équations linéaires de condition ont lieu entre ces coefficients, il en résultera:*

1°. *Que $(S - m - (g - h))$ groupes donnés des g variables qui vérifient l'équation générale, en comportent un nombre infini de pareils*

groupes, de sorte que dans tous ces groupes l'on peut prendre à volonté les valeurs de $(h-1)$ *des* g *variables;*

2°. *Que* $(S - m - (g-1))$ *groupes donnés en comportent* $(n^g - S + m + g - 1)$ *groupes nouveaux.*

Pour appliquer ces théorèmes, cherchons d'abord le nombre S, égal au nombre des termes de l'équation générale moins *un*. L'on voit aisément que les colonnes horizontales suivantes indiquent le nombre des termes dans lesquels les variables, au nombre de g, s'élèvent respectivement aux degrés $1, 2, 3, 4, \ldots . n$.

$$g$$

$$g + \frac{g(g-1)}{1.2}$$

$$g + 2\frac{g(g-1)}{1.2} + \frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$

$$g + 3\frac{g(g-1)}{1.2} + 3\frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3} + \frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$g + (n-1)\frac{g(g-1)}{1.2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \cdot \frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Le nombre cherché est donc la somme de tous ces termes pour laquelle on obtient:

$$S = ng + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{g(g-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{g(g-1)(g-2)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

En nous bornant au second degré, nous aurons

$$S = \frac{(g+1)(g+2)}{1.2} - 1.$$

Le dernier théorème, en y posant $m = 0$, fait voir que, dans ce cas, des 2^g groupes des racines de g équations entre g inconnues, un nombre de groupes égal à

$$\frac{(g+1)(g+2)}{1.2} - g = \frac{g(g+1)}{1.2} + 1,$$

en comportent les groupes restants au nombre de

$$2^g - \frac{g(g+1)}{1.2} - 1.$$

Ainsi donc

7	groupes	en	comportent	1	pour $g = 3$,
11	„	„	„	5	„ $g = 4$,
16	„	„	„	16	„ $g = 5$,
22	„	„	„	42	„ $g = 6$,

etc. etc.

11.

Enfin, pour généraliser le théorème XI, désignons la valeur de S qui se rapporte à un degré n quelconque de la manière suivante: S_n. Nous aurons alors le théorème suivant.

XIII. *Si l'on connaît*

$$S_n - S_{(n-p)} - S_{(n-q)} - \cdots - (g-1)$$

groupes de racines de g équations entre g inconnues et s'élévant respectivement aux degrés n, p, q, ... l'on en déduit tous les autres, sans avoir recours à ces équations qui restent incomplètement déterminées.

24.

Note sur les points singuliers des courbes.

(Liouville's Journal de Mathématiques, Band 2, S. 11—15. 1836.)

Une courbe quelconque étant proposée, je désignerai

1°. Par n son degré, ou le nombre de ses points d'intersection avec une ligne droite;

2°. Par m sa classe (mot introduit par M. Gergonne) ou le nombre de ses tangentes, passant par un même point;

3°. Par x le nombre de ses points doubles;

4°. Par y celui de ces points de rebroussement;

5°. Par u le nombre de ses tangentes doubles; et enfin

6°. Par v celui de ses tangentes (ou points) d'inflexion.

Dans ce qu'on va lire, je supposerai en outre que la courbe n'ait ni points multiples, ni tangentes multiples.

I. Pour toutes les courbes algébriques quelconques, il existe une équation générale et unique qui lie entre eux les nombres 1°. des points doubles (x), 2°. des points de rebroussement (y), 3°. des tangentes doubles (communes à deux branches différentes de la courbe) (u), et 4°. des points d'inflexion (v). Cette équation est la suivante:

$$(v-y)^4 - 9(v-y)^2[6(v+y) + 4(u+x) - 45] + 756(v-y)(u-x) + 324(u-x)^2 = 0.$$

II. Les courbes générales d'un degré quelconque n'ont ni point double ni point de rebroussement. Pour elles on obtient, en posant $y = 0$ et $x = 0$,

$$v^4 - 54v^3 - 36uv^2 + 405v^2 + 756uv + 324u^2 = 0.$$

III. On obtient pour les courbes générales d'une classe quelconque (qui n'ont ni tangentes doubles ni points d'inflexion) l'équation analogue suivante:

$$y^4 - 54y^3 - 36xy^2 + 405y^2 + 756xy + 324x^2 = 0.$$

IV. Si le nombre des points de rebroussement est égal à celui des points d'inflexion, le nombre des points doubles est nécessairement égal à celui des tangentes doubles. De plus la courbe est coupée alors par une ligne droite en autant de points qu'il y a des tangentes de la courbe, aboutissant à un même point. On a simultanément

$$v = y, \quad u = x, \quad n = m, \quad 2x + 3y = n(n-2).$$

Pour obtenir les différents cas où les courbes d'un degré donné n sont de la même classe, on n'a qu'à résoudre la dernière équation en nombres entiers, en satisfaisant en même temps à la condition

$$x + y < \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

V. Dans le cas général, on a

$$(v - y) = 3(m - n),$$
$$(u - x) = \tfrac{1}{2}(m - n)(m + n - 9),$$

équations simples qui donnent encore la suivante:

$$(m + n) - 6\left(\frac{u - x}{v - y}\right) = 9.$$

VI. L'un des deux nombres n et m étant donné, l'on peut prendre l'autre entre les deux limites déterminées par les deux équations

$$m \leqq n(n-1), \quad n \leqq m(m-1);$$

excepté toutefois qu'on n'a jamais

$$\text{ni } m = n(n-1) - 1 \text{ ni } n = m(m-1) - 1.$$

On a généralement

$$m = n(n-1) - 2x - 3y,$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v.$$

VII. Enfin l'on a les quatre équations suivantes:

$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y,$$
$$y = 3m(m-2) - 6u - 8v,$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - [n(n-1) - 6](2x + 3y) + 2x(x-1) + 6xy + \tfrac{9}{2}y(y-1),$$
$$x = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - [m(m-1) - 6](2u + 3v) + 2u(u-1) + 6uv + \tfrac{9}{2}v(v-1).$$

L'interprétation géométrique de ces équations est facile. Ainsi, la première d'entre elles, par exemple, indique que, si par une détermination spéciale des constantes de l'équation générale d'un degré quelconque, la courbe correspondante acquiert des points doubles ou de rebroussement, le nombre des points d'inflexion diminue de *six*

unités pour chaque point double et de *huit* pour chaque point de rebroussement. J'ajouterai que sur les six points d'inflexion qui disparaissent, il y a *deux* de réels et *quatre* d'imaginaires, si c'est un point double proprement dit et supposé réel qui les remplace, mais que tous sont imaginaires, si c'est un point conjugué. Dans le cas d'un point réel de rebroussement, il y a, sur les huit points d'inflexion qui disparaissent, *deux* de réels et *six* d'imaginaires.[1])

VIII. Les courbes des degrés 3, 4, 5 offrent les différents cas suivants, les seuls possibles, par rapport au nombre des points et tangentes singulières dont il est question ici.

$n = 3$.

m	x	y	u	v
6	—	—	—	9
4	1	—	—	3
3	—	1	—	1

$n = 4$.

m	x	y	u	v
12	—	—	28	24
10	1	—	16	18
9	—	1	10	16
8	2	—	8	12
7	1	1	4	10
6	3	—	4	6
6	—	2	1	8
5	2	1	2	4
4	1	2	1	2
3	—	3	1	—

$n = 5$.

m	x	y	u	v
20	—	—	120	45
18	1	—	92	39
17	—	1	78	37
16	2	—	68	33
15	1	1	56	31
14	3	—	48	27
14	—	2	45	29
13	2	1	38	25
12	4	—	32	21
12	1	2	29	23
11	3	1	24	19
11	—	3	21	21
10	5	—	20	15
10	2	2	17	17
9	4	1	14	13
9	1	3	11	15
8	6	—	12	9
8	3	2	9	11
8	—	4	6	13
7	5	1	8	7
7	2	3	5	9
6	4	2	5	5
6	1	4	2	7
5	3	3	3	3
5	—	5	—	5
4	2	4	2	1

On peut dans les tableaux qui précèdent changer réciproquement n en m, x en u, y en v.

IX. En représentant une courbe par une équation entre deux coordonnées ordinaires, on la regarde comme engendrée par le mouve-

ment d'un point dont les différentes positions sont données par l'équation. Soient p et q des fonctions linéaires des deux coordonnées et

$$\varphi(p, q) = \Omega = 0$$

l'équation d'une courbe quelconque, ou algébrique, ou transcendante. On sait qu'un point double de la courbe est alors indiqué par les deux équations suivantes

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q} = 0.$$

De plus ce point double est, ou l'intersection de deux branches réelles de la courbe, ou un point conjugué, ou enfin (en général) un point de rebroussement, selon qu'on a

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p\, \partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^2} > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p\, \partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^2} < 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p\, \partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^2} = 0.$$

De ces équations l'on déduit facilement, pour les courbes du troisième degré, le théorème suivant que j'ai démontré avec d'autres théorèmes semblables, dans un autre endroit: „Les trois asymptotes étant données, le lieu géométrique des points de rebroussement de ces courbes est l'ellipse *maximum*, inscrite au triangle formé par les trois asymptotes; le lieu des points conjugués est l'intérieur, et le lieu des points doubles, proprement dits, l'extérieur de cette ellipse *maximum*.“ *)

X. L'équation générale de la ligne droite renferme deux constantes, que nous supposons y entrer au premier degré seulement. Nous désignerons deux fonctions linéaires quelconques de ces deux constantes par r et s. Alors des valeurs données de r et s déterminent une ligne droite unique, et l'équation

$$\Psi(r, s) = \Psi = 0,$$

en y considérant r et s comme variables, représente une courbe: cette courbe est regardée comme enveloppée par une ligne droite en mouvement dont les différentes positions sont données par l'équation précédente.

Pour une tangente double l'équation de la courbe doit subsister simultanément avec les deux équations suivantes

*) [Vgl. System der analytischen Geometrie, S. 196.]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0.$$

De plus, cette tangente double touche deux branches réelles de la courbe, ou elle est isolée de la courbe (conjugée), ou enfin elle touche la courbe dans un point d'inflexion, selon qu'on a

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r\, \partial s}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r\, \partial s}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} < 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r\, \partial s}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = 0.$$

25.

Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.

(Crelle's Journal, Band 19, S. 1—44 und S. 91—92. 1838.)

1. Dans ce premier mémoire sur la théorie des ondes lumineuses, je me propose de traiter, sous le seul rapport géométrique, la forme la plus générale que prend, d'après l'illustre Fresnel*), une telle onde dans l'intérieur des crystaux, doués de la double réfraction. Il n'est nullement mon but de m'occuper ici du détail des questions d'optique, j'emprunterai seulement son langage. Avant d'entrer en matière, je développerai quelques formules d'un usage général et qui par suite nous serviront, soit pour trouver l'équation de l'onde, soit pour la discuter.

2. *Une surface étant coupée par un plan donné, déterminer analytiquement la courbe d'intersection dans son propre plan.* Soit, dans la supposition de coordonnées rectangulaires,

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface proposée; désignons par φ l'angle que fait le plan coupant avec le plan des xy et par α l'angle que l'intersection des deux plans fait avec l'axe des x. Le plan coupant, passant d'ailleurs par l'origine des coordonnées, sera alors complètement déterminé par les deux angles φ et α. Nous nous proposerons de trouver l'équation de la courbe d'intersection dans le plan même de cette courbe, en choisissant pour axes des coordonnées (v et w) deux lignes droites de ce plan, rectangulaires entre elles et dont l'une (l'axe des v) coïncide avec l'intersection dans le plan des xy.

Pour y parvenir faisons d'abord tourner, dans leur plan, les axes des y et des x jusqu'à ce que l'un d'eux se confonde avec l'axe des v,

*) [Die Arbeiten von Fresnel, auf die hier Bezug genommen wird, sind das *Mémoire sur la théorie de la double réflexion*, sowie die Supplemente dazu. Vgl. Werke, herausgegeben von Verdet, Band II, S. 261 ff.]

l'autre lui étant perpendiculaire. Nous aurons alors, en distinguant les coordonnées nouvelles par des accents,

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$
$$z = z'.$$

Le plan coupant est perpendiculaire au plan des $y'z'$ parce qu'il passe par l'axe des x'. L'intersection des deux plans sera donc l'axe des w, tandis que l'axe des v se confond avec l'axe des x'. De là résultent pour un point quelconque du plan coupant les relations suivantes:

$$x' = v, \quad y' = w\cos\varphi, \quad z' = w\sin\varphi;$$

et en combinant ces équations avec les équations précédentes nous obtenons:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = v\cos\alpha - w\sin\alpha\cos\varphi, \\ y = v\sin\alpha + w\cos\alpha\cos\varphi, \\ z = w\sin\varphi. \end{cases}$$

Enfin, pour avoir l'équation cherchée de la courbe d'intersection, nous n'avons qu'à substituer ces valeurs dans l'équation de la surface proposée.

Si nous représentons le plan coupant par l'équation suivante:

$$Ax + By + Cz = 0$$

il est, d'après les formules connues:

$$\sin^2\alpha = \frac{A^2}{A^2+B^2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{B^2}{A^2+B^2},$$
$$\cos^2\varphi = \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2};$$

d'où nous tirons encore:

$$\sin^2\alpha\sin^2\varphi = \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \cos^2\alpha\sin^2\varphi = \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

3. *Singularités des surfaces.* Tout ce que je trouve dans les Traités sur les points singuliers des surfaces courbes, me paraît très peu satisfaisant. Pour ne pas perdre de vue mon but spécial, je dois être court dans ce qu'on va lire, en réservant pour une autre occasion l'exposition d'une théorie générale.

D'abord il ne faut pas confondre deux sortes de singularités; les unes se rapportent à des points où la surface est touchée par un nombre infini de plans, et les autres à des plans qui touchent la surface en un nombre infini de points. Les plans tangents dans un *point singulier* enveloppent en général un cône du *deuxième* degré, qui se réduit à un seul point, si les plans tangents deviennent imaginaires.

Alors le point singulier est un point isolé et conjugué à la surface. Dans le cas intermédiaire où le cône se réduit à une ligne droite, le point singulier constitue en général une *pointe* de la surface. D'un autre côté les points dans lesquels une surface est touchée par un plan singulier, forment en général une section conique. Si cette conique devient imaginaire, le plan tangent est un plan isolé et conjugué à la surface. Avant de disparaître, la conique se réduit à un point, ce qui indique une inflexion de la surface en ce point. [1])

4. Occupons nous d'abord des *points singuliers*. Pour que la surface dont l'équation est

$$V = F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

ait un tel point, il faut que les coordonnées de ce point satisfassent, outre à l'équation proposée, encore aux trois équations suivantes:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Dans ce cas les coefficients de l'équation du plan tangent se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

l'équation d'un plan quelconque passant par ce point, ce plan coupera la surface proposée suivant une courbe qui a un point singulier coïncidant avec le point singulier de la surface. En général on peut donner à volonté à ce plan une position telle que ce point devienne, par rapport à la courbe d'intersection, ou un point double proprement dit, avec deux tangentes réelles, ou un point conjugué. Dans le cas intermédiaire le point singulier devient un point de rebroussement de la courbe, et en même temps, le plan coupant devient un des plans *tangents* de la surface en ce point. En éliminant z entre les équations (1) et (2) on obtient pour la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy l'équation suivante:

$$F\left[x, y\left(-\frac{Ax + By + D}{C}\right)\right] = U = 0, \tag{3}$$

et comme on ne fait pas perdre à une courbe son point de rebroussement en la projettant d'une manière quelconque, il suffit que le point double de la courbe représentée par la dernière équation soit un point de rebroussement, pour que le plan (2) touche la surface proposée. J'ai fait voir dans mon *Système de Géométrie analytique* *) que, dans le cas d'un point de rebroussement de la courbe (3), l'on a l'équation suivante:

*) System der analytischen Geometrie. 1835. Troisième section. § 6, p. 246.

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

où il faut rapporter les coefficients différentiels partiels à ce point dont les coordonnées x et y sont les mêmes que les coordonnées analogues du point singulier de la surface proposée. En remarquant qu'on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{A}{C}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{B}{C},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{A}{C} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\cdot\frac{A^2}{C^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{B}{C} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\cdot\frac{B^2}{C^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{B}{C} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{A}{C} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\cdot\frac{AB}{C^2},$$

l'équation (4) se transformera dans la suivante:

$$(5) \qquad \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] C^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] B^2$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] A^2 - 2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] BC$$

$$- 2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] AC$$

$$- 2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] AB = 0.$$

Si les coefficients A, B, C du plan (2) satisfont à cette équation, le plan touchera la surface proposée. Tous ces plans tangents, passant en outre par le point singulier, enveloppent un cône du second degré qu'on peut dire être représenté par l'équation (5), en y regardant A, B, C comme variables. C'est le cône tangent à la surface dans le point singulier.

5. Supposons maintenant que la surface soit déterminée par ses plans tangents et soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

un de ces plans qui, si nous posons $D = 1$, ne dépend que des trois quantités A, B et C. Ces quantités signifient les valeurs réciproques et prises avec le signe contraire des trois segments que le plan coupe sur les trois axes des coordonnées. Nous pouvons alors représenter la surface par une équation de la forme

$$(1) \qquad F(A, B, C) = W = 0$$

qui suffit à sa détermination tout aussi complètement que son équation entre x, y et z. De même l'équation

(2) $$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

en y regardant A, B et C comme variables, représentera un point. Les coordonnées de ce point seront les trois constantes x, y et z. En éliminant C entre les équations (1) et (2) l'on obtient:

(3) $$F\left[A, B\left(-\frac{Ax + By + 1}{z}\right)\right] = S = 0.$$

Cette équation doit être satisfaite pour tous les plans qui passant par le point (2) touchent la surface proposée; c'est l'équation de la courbe d'intersection avec le plan des xy du cône circonscrit à cette surface et ayant le point (2) pour sommet, cette courbe étant déterminée par ses tangentes. Lorsqu'on prend le point (2) dans le plan singulier de la surface, il est évident qu'en général cette courbe doit avoir une tangente double et coïncidant avec l'intersection du plan singulier et de celui des xy. Selon qu'on prend le point à l'extérieur ou à l'intérieur de la courbe de contact dans le plan singulier, la tangente double touchera ou deux branches réelles ou deux branches imaginaires de la courbe (3). Dans ce dernier cas, c'est une ligne droite isolée et conjugée à cette courbe. Si le point se trouve sur la courbe de contact elle même, la courbe (3) aura une inflexion indiquée par l'équation suivante, tout-à-fait analogue à l'équation (4) du numéro précédent:

(4) $$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial A \partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial A^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial B^2} = 0.$$

En la développant de la même manière, nous obtiendrons:

(5) $$\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial A \partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial A^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right] z^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial A \partial C}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial A^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial C^2}\right] y^2$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial C}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial B^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial C^2}\right] x^2 - 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial A \partial B} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial A \partial C} - \frac{\partial^2 W}{\partial B \partial C} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial A^2}\right] yz$$
$$- 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial A} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial B \partial C} - \frac{\partial^2 W}{\partial A \partial C} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right] xz$$
$$- 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial C \partial A} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial C \partial B} - \frac{\partial^2 W}{\partial A \partial B} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial C^2}\right] xy = 0.$$

C'est l'équation d'un cône dont le sommet est à l'origine des coordonnées. Son intersection avec le plan singulier sera la courbe suivant laquelle la surface proposée est touchée par ce plan.

6. Si, en prenant $C = 1$, on détermine un plan par les trois constantes A, B et D de son équation

$$z + Ax + By + D = 0,$$

l'on peut remplacer l'équation (1) par une équation de la forme

$$F(A, B, D) = W = 0,$$

d'où, en éliminant D, il vient

$$F[A,\ B,\ (-(Ax+By+z))] = S' = 0.$$

Par un raisonnement tout à-fait analogue à celui du numéro précédent, l'on obtient entre les coordonnées des points dans lesquels le plan singulier touche la surface, l'équation de condition:

$$\left(\frac{\partial^2 S'}{\partial A\,\partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 S'}{\partial A^2}\cdot\frac{\partial^2 S'}{\partial B^2} = 0,$$

qui se transforme dans la suivante:

$$(6)\qquad \left[\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 W'}{\partial A^2}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial B^2}\right] + \left[\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial D}\right)^2 - \frac{\partial^2 W'}{\partial A^2}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial D^2}\right] y^2$$

$$+\left[\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial B\,\partial D}\right)^2 - \frac{\partial^2 W'}{\partial B^2}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial D^2}\right] x^2 - 2\left[\frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial B}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial D} - \frac{\partial^2 W'}{\partial B\,\partial D}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial A^2}\right] y$$

$$-2\left[\frac{\partial^2 W'}{\partial B\,\partial A}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial B\,\partial D} - \frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial D}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial B^2}\right] x$$

$$-2\left[\frac{\partial^2 W'}{\partial D\,\partial A}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial D\,\partial B} - \frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial B}\cdot\frac{\partial^2 W'}{\partial D^2}\right] xy = 0.$$

C'est donc l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe de contact dans le plan singulier.

Pour ce qu'il peut y avoir d'inusité dans les développements des deux derniers numéros je renvoie à la *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes* qui a été publiée dans le neuvième volume de ce même Journal.*)

7. *Détermination des axes d'une ellipse.* — Soit, dans la supposition de coordonnées rectangulaires,

$$\mu y^2 + 2\nu xy + \varrho x^2 = 1$$

l'équation de l'ellipse, alors on obtient, pour déterminer les valeurs réciproques de ses demi-axes, l'équation suivante:

$$(1)\qquad V^4 - (\mu+\varrho)V^2 + (\mu\varrho - \nu^2) = 0.$$

En me contentant ici de transcrire simplement cette équation qui trouve sa place dans les ouvrages où l'on traite des sections coniques, je citerai seulement mes *Développements.***)

En désignant les valeurs réciproques des deux demi-axes par $V_{,}$ et $V_{,,}$, nous obtenons par la résolution de l'équation (1) la relation suivante:

$$(2)\qquad V_{,}^2 - V_{,,}^2 = \pm\sqrt{(\mu+\varrho)^2 - 4(\mu\varrho - \nu^2)}.$$

8. *Surfaces polaires réciproques.* - L'on a nommé surfaces polaires

*) [Vgl. S. 224 dieser Ausgabe.]

**) Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1828. Vol. 1 p. 251.

réciproques deux surfaces telles que les points de l'une sont les pôles des plans tangents de l'autre, par rapport à une surface quelconque du second ordre que je nommerai *directrice*. En prenant comme directrice une sphère dont le rayon est égal à l'unité, le plan polaire d'un point donné quelconque dont x', y' et z' sont les trois coordonnées rectangulaires (l'origine étant le centre de la sphère) a pour équation:

$$x'x + y'y + z'z = 1.$$

En déterminant la position de ce plan moyennant les trois quantités A, B et C, prises dans la signification du numéro (5), nous avons:

$$x' = -A, \quad y' = -B, \quad z' = -C;$$

d'où il résulte que l'une quelconque de deux surfaces polaires réciproques étant donnée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'on obtient, pour déterminer l'autre, l'équation suivante:

$$F(-A, -B, -C) = 0;$$

et réciproquement.

9. Si l'on prend comme directrice un ellipsoïde quelconque que je représenterai par l'équation suivante

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

le plan polaire d'un point quelconque (x', y', z') a pour équation

$$\frac{x'x}{bc} + \frac{y'y}{ac} + \frac{z'z}{ab} = 1,$$

d'où l'on obtient, en conservant les dénominations précédentes:

$$\frac{x'}{bc} = -A, \quad \frac{y'}{ac} = -B, \quad \frac{z'}{ab} = -C.$$

L'une de deux surfaces polaires réciproques étant donnée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'autre sera déterminée par l'équation suivante:

$$F(-bcA, \ -acB, \ -abC) = 0;$$

et réciproquement.

10. Deux ellipsoïdes concentriques sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant le même centre, si le produit des demi-axes correspondants est égal au carré du rayon de la sphère. Les deux ellipsoïdes représentés par les deux équations suivantes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

sont polaires réciproques, si le rayon de la sphère directrice est égal à l'unité.

11. Si la surface directrice est un ellipsoïde quelconque, le produit de deux demi-axes correspondants de deux ellipsoïdes polaires réciproques est égal au carré du demi-axe correspondant de la surface directrice. Ainsi par exemple les deux ellipsoïdes:

$$\frac{(a^2+b^2)x^2}{(a^2+c^2)b^2}+\frac{2y^2}{(a^2+c^2)}+\frac{(c^2+b^2)z^2}{(a^2+c^2)b^2}=1,$$
$$\frac{(a^2+c^2)x^2}{(a^2+b^2)c^2}+\frac{(a^2+c^2)y^2}{2a^2c^2}+\frac{(a^2+c^2)z^2}{(c^2+b^2)a^2}=1,$$

sont deux surfaces polaires réciproques par rapport à l'ellipsoide:

$$\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ac}+\frac{z^2}{ab}=1.$$

12. *Deux lignes droites sont polaires réciproques* par rapport à une directrice quelconque, si l'une d'elles passe par les deux points où les deux plans tangents passant par l'autre touchent la surface directrice. Deux lignes droites polaires réciproques par rapport à une sphère ont des directions perpendiculaires entre elles.

13. L'on a nommé *pôles conjugués* par rapport à une surface du second ordre deux points tels que l'un d'eux est le point où la ligne droite qui passe par le centre de la surface et l'autre point, rencontre le plan polaire de ce dernier. Par rapport à une sphère, deux points qui sont tellement situés sur un même diamètre que le produit de leurs distances du centre est égal au carré du rayon, sont deux points conjugués. On obtient l'un en abaissant du centre une perpendiculaire sur le plan polaire de l'autre.

14. *Sections circulaires d'un ellipsoïde.* — Un ellipsoïde dont les trois demi-axes sont a, b et c est représenté par l'équation suivante:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

En combinant cette équation avec celle d'une sphère de rayon indéterminé:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

l'on peut toujours parvenir à une équation, qui ne contient que les carrés de deux quelconques des trois variables. Une telle équation représentera le système de deux plans (réels ou imaginaires) perpendiculaires à l'un des plans des coordonnées qui, passant par l'intersection de la sphère et de l'ellipsoïde, vont couper celui-ci suivant deux cercles. Nous ne déterminerons ici que les deux plans réels. En supposant pour cela que $c>b$ et $b>a$, nous n'avons qu'à prendre

$r = b$ et à retrancher ensuite de la première équation, après l'avoir multipliée par b^2, l'équation de la sphère. Ainsi on obtient

$$c^2(b^2 - a^2)x^2 - a^2(c^2 - b^2)z^2 = 0,$$

équation qui se réduit aux deux équations suivantes:

$$c\sqrt{b^2 - a^2}\,x \pm a\sqrt{c^2 - b^2}\,z = 0. \tag{2}$$

Pour déterminer les sections circulaires de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \tag{3}$$

l'on n'a qu'à mettre $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ à la place de a^2, b^2, c^2 dans les résultats précédents, ce qui donne pour les plans des sections en question:

$$\sqrt{b^2 - a^2}\,x \pm \sqrt{c^2 - b^2}\,z = 0. \tag{4}$$

On parvient également à l'équation (2), en posant, avant l'élimination, y égal à zéro dans les équations de la sphère et de l'ellipsoïde (1); d'où l'on conclut que les deux plans (2) sont perpendiculaires aux plans des xz et le coupent suivant les deux diamètres communs à l'ellipse et au cercle d'intersection; ou bien dans des directions perpendiculaires à ces diamètres communs, si l'on fait tourner d'abord, dans son plan, l'ellipse de sorte que son axe c tombe sur l'axe des x et son axe a sur l'axe des z.

Dans cette position l'équation de l'ellipse devient:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

et les quatre tangentes qui lui sont communes avec le cercle en question:

$$x^2 + z^2 = b^2,$$

ont pour équations:

$$\sqrt{b^2 - a^2}\,x \pm \sqrt{c^2 - b^2}\,z \pm b\sqrt{c^2 - a^2} = 0.$$

Elles sont donc parallèles aux plans (4).

L'on voit donc que les sections circulaires (2) et (4) des deux ellipsoïdes (1) et (3) vont passer toutes les quatre par l'axe des y, étant perpendiculaires au plan des xz; que celles de l'ellipsoïde (1) coupent ce plan suivant deux lignes droites perpendiculaires aux diamètres communs $M'M_{,}$ et $M''M_{,,}$ (Fig. 52,*) tandis que celles de l'ellipsoïde (3) le coupent parallèlement aux deux tangentes communes $T,T_{,,}$ ou $T'T''$ et T,T'' ou $T_{,,}T'$.

*) [Die Figur enthält die um 90° gedrehte Ellipse. Vgl. Fig. 54, 55, 56, Seite 358.]

15. *Surface d'élasticité de Fresnel.* — En considérant les actions moléculaires, Fresnel a prouvé que dans le cas le plus général, l'élasticité de l'éther suivant les différentes directions dans l'intérieur d'un crystal est complètement déterminée par l'élasticité suivant trois directions fixes, perpendiculaires entre elles et dépendantes de la forme et de la nature du crystal. Il les nomme *axes d'élasticité*, et ensuite il construit la *surface d'élasticité*, en prenant ses rayons vecteurs proportionels aux racines carrées des élasticités suivant ces mêmes rayons. Pour l'équation de cette surface il trouve:

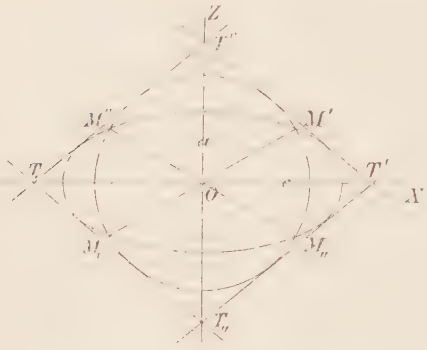

Fig. 52.

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

qui, si l'on appelle r son rayon vecteur, peut s'écrire ainsi:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = r^4.$$

Dans tout ce qui va suivre nous supposerons

$$c^2 > b^2, \quad b^2 > a^2,$$

de manière que l'élasticité suivant l'axe des z est un *maximum*, et un *minimum* suivant l'axe des x.

Dans les crystaux *à un seul axe* deux des trois élasticités a^2, b^2, c^2 sont égales entre elles. Il y a ici deux cas à distinguer. Dans les crystaux nommés *positifs* on a

$$c^2 = b^2 > a^2,$$

et dans les crystaux nommés négatifs

$$a^2 = b^2 < c^2.$$

Si les trois élasticités sont égales entre elles toutes les trois, il n'y a pas de double réfraction.

16. *Rapport de la surface d'élasticité avec deux ellipsoïdes.* — La surface d'élasticité a des rapports intimes avec les deux ellipsoïdes représentés par les deux équations suivantes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1. \tag{3}$$

L'ellipsoïde (2) que je nommerai partout dans ce qu'on va lire le *premier*, a pour axes les trois axes de la surface d'élasticité; les axes

de l'autre que je nommerai le *second ellipsoïde*, en ont les valeurs inverses.

Par un calcul analytique très simple M. Magnus*) a déjà prouvé *que, si du centre l'on abaisse des perpendiculaires sur les plans tangents du premier ellipsoïde, le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires est la surface d'élasticité.*

L'on a ce second théorème. *Les longueurs de deux rayons vecteurs de la surface d'élasticité et du second ellipsoïde dont la direction coïncide dans une même ligne droite quelconque sont l'inverse l'une de l'autre, de sorte que leur produit est égal à l'unité.*

Pour le prouver, désignons les deux rayons vecteurs par r et r', et écrivons les équations de la surface d'élasticité et du second ellipsoïde sous les formes suivantes:

$$\frac{a^2x^2}{r^2} + \frac{b^2y^2}{r^2} + \frac{c^2z^2}{r^2} = r^2,$$

$$\frac{a^2x^2}{r_1^2} + \frac{b^2y^2}{r_1^2} + \frac{c^2z^2}{r_1^2} = \frac{1}{r_1^2}.$$

Comme les deux rayons coïncident dans une même ligne droite, les trois membres de la première partie de la première équation sont égaux aux trois membres correspondants de la seconde, et en égalant les seconds membres on obtient:

$$r^2 r_1^2 = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. Nous pourrons énoncer ce même théorème de la manière suivante:

Les points de la surface d'élasticité sont les pôles conjugués des points du second ellipsoïde et réciproquement, par rapport à une sphère dont le rayon est égal à l'unité. [13.]

Il suit de ce théorème que, dans les deux courbes d'intersection de la surface d'élasticité et du second ellipsoïde la direction des axes se confond, mais de sorte que le plus grand de l'une correspond au plus petit de l'autre. Si une des deux courbes est un cercle, l'autre le sera également.

D'après le numéro (10) les deux ellipsoïdes (2) et (3) sont polaires réciproques par rapport à la même sphère. Ce théorème lie entre eux les deux théorèmes du présent numéro. Car, en prenant à volonté un point quelconque sur la surface du second ellipsoïde, le plan polaire de ce point touchera le premier ellipsoïde, et pour obtenir du même point le pôle conjugué qui appartient à la surface d'élasticité, l'on n'a

*) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, von L. J. Magnus. Erste Abtheilung. 1837. p. 402.

qu'à abaisser du centre une perpendiculaire sur le plan polaire. Ainsi s'est présentée à nous une démonstration nouvelle du premier théorème de ce numéro.

17. *Détermination de l'onde lumineuse par* Fresnel. — En conduisant un plan quelconque par le centre de la surface d'élasticité, tout mouvement vibratoire dans ce plan peut se décomposer en deux vibrations rectilignes, ayant lieu suivant les deux axes de la courbe d'intersection qui en général est un oval du quatrième ordre. Le mouvement de propagation a lieu perpendiculairement au sens des vibrations, avec une vitesse proportionelle aux deux demi-axes, ces axes eux-mêmes étant proportionels aux racines carrées des élasticités (15). Fresnel conclut de là *que les plans parallèles au plan coupant et à une distance de lui égale aux axes de la courbe d'intersection, sont tangents à l'onde lumineuse.*

A deux plans tangents parallèles et situés du même côté du centre, répondent des vibrations dans des plans qui sont perpendiculaires à ces plans tangents et en même temps perpendiculaires entre eux. Les plans de vibration sont perpendiculaires aux plans de *polarisation.*

18. *Détermination analytique de l'onde lumineuse par des plans tangents.* — D'après le numéro (16), la construction de Fresnel peut se traduire ainsi:

Qu'on fasse passer un plan quelconque par le centre du *second ellipsoïde*

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \tag{3}$$

et qu'on élève à ce plan des perpendiculaires égales aux valeurs inverses des deux demi-axes de l'ellipse d'intersection, les plans parallèles au plan coupant et passant par les extrémités de ces perpendiculaires sont tangents à l'onde lumineuse.

Déterminons d'abord l'ellipse d'intersection. En fixant, comme nous l'avons fait dans le premier numéro, la position du plan coupant par les deux angles α et φ, nous obtenons, en posant dans l'équation (3)

$$\begin{aligned} x &= v\cos\alpha - w\sin\alpha\cos\varphi, \\ y &= v\sin\alpha + w\cos\alpha\cos\varphi, \\ z &= w\sin\varphi, \end{aligned}$$

pour l'équation de l'ellipse dans son plan:

$$\begin{cases} [a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha]v^2 + 2(b^2 - a^2)\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi\,.\,vw \\ \quad + [a^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi + b^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi]w^2 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

En posant ensuite

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = \mu,\ (b^2 - a^2)\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi = \nu,$$
$$a^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi + b^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi = \varrho,$$

nous aurons après de simples réductions trigonométriques:

$$(5)\quad \begin{cases} (\mu+\varrho) = (a^2+b^2)\cos^2\varphi + (a^2+c^2)\cos^2\alpha\sin^2\varphi + (b^2+c^2)\sin^2\alpha\sin^2\varphi, \\ (\mu\varrho - \nu^2) = a^2b^2\cos^2\varphi + a^2c^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi + b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi, \end{cases}$$

et d'après le numéro (7), pour déterminer les valeurs inverses des deux demi-axes de l'ellipse d'intersection (4), l'équation suivante:

$$(6)\quad \begin{cases} V^4 - [(a^2+b^2)\cos^2\varphi + (a^2+c^2)\cos^2\alpha\sin^2\varphi + (b^2+c^2)\sin^2\alpha\sin^2\varphi]V^2 \\ \quad + a^2b^2\cos^2\varphi + a^2c^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi + b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi = 0. \end{cases}$$

En faisant attention que

$$\cos^2\varphi + \cos^2\alpha\sin^2\varphi + \sin^2\alpha\sin^2\varphi = 1,$$

on peut écrire la même équation de la manière suivante:

$$(7)\quad \begin{cases} (V^2-b^2)(V^2-c^2)\sin^2\alpha\sin^2\varphi + (V^2-c^2)(V^2-a^2)\cos^2\alpha\sin^2\varphi \\ \quad + (V^2-a^2)(V^2-b^2)\cos^2\varphi = 0, \end{cases}$$

ou bien encore sous la forme

$$(8)\qquad \frac{\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{V^2-a^2} + \frac{\cos^2\alpha\sin^2\varphi}{V^2-b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{V^2-c^2} = 0.$$

Lorsque le plan coupant est donné par son équation:

$$Ax + By + Cz = 0,$$

les équations (7) et (8) se transforment sur-le-champ dans les suivantes (num. 1):

$$(9)\quad \begin{cases} (V^2-b^2)(V^2-c^2)A^2 + (V^2-c^2)(V^2-a^2)B^2 \\ \quad + (V^2-a^2)(V^2-b^2)C^2 = 0, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \frac{A^2}{V^2-a^2} + \frac{B^2}{V^2-b^2} + \frac{C^2}{V^2-c^2} = 0.$$

19. Dans ces équations V signifie la vitesse de l'onde lumineuse, c'est-à-dire celle de ses plans tangents. Il est égal à la perpendiculaire abaissée du centre de l'onde sur ses plans tangents dont la direction est donnée par les valeurs de A, B et C. Veut-on que, conformément au numéro (4),

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

soit l'équation de ces plans tangents, l'on a d'après les formules connues:

$$V^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

L'équation (6) se change d'abord, en y introduisant A, B et C dans la suivante:

$$(A^2+B^2+C^2)V^4-[(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)C^2]V^2 + [b^2c^2A^2+c^2a^2B^2+a^2b^2C^2]=0,$$

et puis en chassant V^2 l'on obtient:

$$(11)\left\{\begin{array}{c}[b^2c^2A^2+c^2a^2B^2+a^2b^2C^2][A^2+B^2+C^2]\\ -[(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)C^2]+1=0.\end{array}\right.$$

20. *Par un rayon vecteur quelconque d'un ellipsoïde donné, l'on ne peut faire passer, en général, qu'un seul plan de sorte, que ce rayon vecteur coïncide avec l'un des deux demi-axes de l'ellipse d'intersection.*

Pour le démontrer, faisons coïncider l'axe des x avec le rayon vecteur donné et prenons les axes des y et des z à volonté, mais perpendiculaires entre eux et à l'axe des x. L'ellipsoïde donné est représenté alors par une équation de la forme:

$$Mx^2+Ny^2+Oz^2+2Pzy+2Qzx+2Rxy=1.$$

Faisons passer par l'axe des x un plan coupant, qui fait avec le plan des xy un angle quelconque φ. Nous obtenons alors pour déterminer la courbe d'intersection dans son propre plan, en posant dans les formules (1) du premier numéro

$$\alpha=0,\quad x=v,\quad y=w\cos\varphi,\quad z=w\sin\varphi,$$

l'équation suivante:

$$Mv^2+2(Q\sin\varphi+R\cos\varphi)vw+(N\cos^2\varphi+O\sin^2\varphi + 2P\sin\varphi\cos\varphi)w^2=1.$$

Cette équation étant rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, si l'on veut que l'axe des v, qui coïncide avec l'axe des x ou le rayon vecteur donné, contienne l'un des deux axes de l'ellipse d'intersection, il faut que le second membre de l'équation précédente s'évanouisse, ce qui donne, pour la détermination de l'angle arbitraire φ, l'équation suivante:

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{R}{Q}.$$

L'on voit donc qu'il y a toujours un plan qui satisfait à la condition exigée, et qu'il n'y a qu'un plan coupant unique, pourvu que R et Q ne disparaissent en même temps de l'équation de l'ellipsoïde. Dans ce cas particulier le rayon donné coïncide avec l'un des trois axes de l'ellipsoïde et l'on voit de suite qu'alors tout plan passant par ce rayon a la propriété exigée.

21. *Construction du plan en question.* — Nous observons d'abord qu'il suffit de choisir les axes des coordonnées de manière que R disparaisse de l'équation de la surface, pour que le plan des xy soit le plan cherché. Construisons ensuite le plan tangent à l'extrémité du

rayon vecteur donné, dont nous désignerons la longueur par x', son équation sera

$$M(x - x') + Qz + Ry = 0.$$

Veut-on que R disparaisse, il faut prendre le plan des xz perpendiculaire à ce plan tangent, d'où l'on obtient, en faisant attention que le plan des xy est perpendiculaire à celui des xz, et qu'il passe, ainsi que lui, par le rayon vecteur, la construction suivante.

Construisez le plan tangent à l'extrémité du rayon vecteur donné et abaissez du centre de l'ellipsoïde une perpendiculaire sur ce plan. Le plan à construire sera celui qui, passant par le rayon vecteur, est perpendiculaire au plan qui contient à la fois ce rayon et la perpendiculaire.*)

22. *L'onde lumineuse* (Fig. 53) *est la surface polaire réciproque de celle qu'on obtient, en mettant, dans sa construction, le premier ellipsoïde à la place du second, par rapport à une sphère dont le rayon est égal à la unité.*

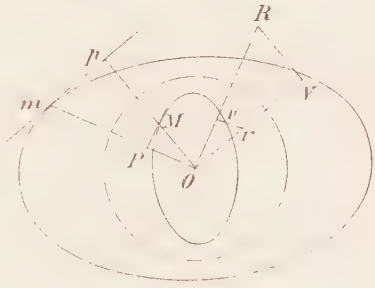

Fig. 53.

Soit M un point quelconque du second ellipsoïde, et P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, en ce point. Le plan polaire de M, également perpendiculaire au plan de la figure, touchera le premier ellipsoïde en un point m qui, étant le pôle du plan tangent en M, se trouvera sur le prolongement de OP, de même que le prolongement de OM sera perpendiculaire au plan tangent en m. Enfin

$$Op = \frac{1}{OM} \text{ et } OP = \frac{1}{Om}.$$

D'après le numéro précédent, le plan passant par le rayon vecteur OM et perpendiculaire au plan de la figure, coupera le second ellipsoïde de manière que, dans l'ellipse d'intersection, l'un des demi-axes se confond avec le rayon vecteur OM. Egalement, le plan passant par le rayon vecteur Om et perpendiculaire au plan de la figure, coupera le premier ellipsoïde de manière que, dans l'ellipse d'intersection, l'un des demi-axes se confond avec le rayon vecteur Om.

Si l'on fait tourner les deux plans tangents et les deux perpendiculaires abaissées sur eux du centre, autour de ce point d'une manière quelconque, rien ne se changera dans leurs relations réciproques par

*) [Vgl. noch S. 385 dieser Ausgabe.]

rapport à la sphère directrice; M sera toujours le pôle du plan mp, ainsi que m continuera d'être celui du plan MP. Tel sera donc aussi le cas, si en particulier on fait faire au système des deux plans le quart d'une révolution autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, de manière que les points m, p, M et P passent respectivement aux positions R, V, r et v. Dans la position nouvelle le plan RV sera tangent à la surface de l'onde lumineuse; quant au plan rv, il touchera une deuxième onde lumineuse, qu'on obtient en remplaçant les deux ellipsoïdes, l'un par l'autre, ou ce qui revient au même, en prenant au lieu des trois élasticités principales a^2, b^2, c^2 leurs valeurs inverses $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. Si l'on donne au point M toutes les positions possibles sur le second ellipsoïde, on obtient tous les plans tangents à la surface de la première onde. Ces plans sont liés aux plans tangents à la surface de la deuxième onde, de manière que les uns contiennent les pôles des autres et réciproquement. D'où l'on voit que les deux ondes sont deux surfaces polaires réciproques, par rapport à la sphère concentrique dont le rayon est égal à l'unité. C'est ce que nous nous sommes proposé à démontrer.

23. *Equation de la surface de l'onde en coordonnées rectangulaires.* — Reprenons l'équation finale du numéro (19), qui donne la détermination de l'onde au moyen de ses plans tangents:

$$(11)\quad \begin{cases} [b^2c^2A^2 + c^2a^2B^2 + a^2b^2C^2][A^2 + B^2 + C^2] \\ -[(b^2+c^2)A^2 + (c^2+a^2)B^2 + (a^2+b^2)C^2] + 1 = 0. \end{cases}$$

Les quantités A, B, C ayant la signification du numéro (4), nous n'avons qu'à mettre à leur place x, y, z, pour obtenir l'équation de la surface polaire réciproque; ainsi il vient:

$$(12)\quad \begin{cases} (b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ -[(b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2] + 1 = 0. \end{cases}$$

C'est donc l'équation de la deuxième onde, consignée dans le numéro précédent, et pour obtenir celle de la première à laquelle se rapporte également l'équation (11), il suffira d'écrire $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ à la place de a^2, b^2, c^2, ce qui donne:

$$(13)\quad \begin{cases} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ -[a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(c^2+a^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2] + a^2b^2c^2 = 0. \end{cases}$$

24. D'après le théorème du numéro (22) on obtient les points de l'une des deux ondes, en cherchant les pôles des plans tangents à l'autre. Ainsi, par exemple, le point R, pôle du plan tangent vr à la

deuxième onde, est celui où la première est touchée par le plan RV. Il suit de cela sur-le-champ la construction due à Fresnel pour trouver directement les points de la surface de l'onde lumineuse:

Après avoir coupé le premier ellipsoïde par un plan diamétral, menons, à partir du centre, deux droites perpendiculaires à ce plan et respectivement égales au plus grand et au plus petit demi-diamètre de l'ellipse d'intersection; le lieu des extrémités de ces perpendiculaires sera la surface de l'onde lumineuse.

Le calcul nécessaire pour tirer de ce théorème l'équation de l'onde est déjà presque entièrement fait dans le numéro (18). En désignant la longueur des perpendiculaires élevées au centre de la section par r, nous n'avons qu'à substituer dans les équations de ce numéro r au lieu de $\frac{1}{V}$ et en même temps a^2, b^2, c^2 au lieu de $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. Faisant cette substitution dans l'équation (10)

$$\frac{A^2}{r^2 - a^2} + \frac{B^2}{r^2 - b^2} + \frac{C^2}{r^2 - c^2} = 0,$$

nous trouvons:

$$\frac{a^2 A^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 B^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 C^2}{c^2 - r^2} = 0.$$

Puis en nommant x, y et z les coordonnées des extrémités de la perpendiculaire r il vient:

$$\frac{A^2 r^2}{A^2 + B^2 + C^2} = x^2, \quad \frac{B^2 r^2}{A^2 + B^2 + C^2} = y^2, \quad \frac{C^2 r^2}{A^2 + B^2 + C^2} = z^2,$$

équations au moyen desquelles la dernière équation se transforme dans la suivante:

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - r^2} = 0. \tag{14}$$

Voilà l'équation cherchée de l'onde lumineuse. En chassant les dénominateurs et divisant par r^2 ou $(x^2 + y^2 + z^2)$ nous retombons dans l'équation (13) du numéro précédent.

25. *Construction du plan de vibration.* — Reprenons un moment la figure 53. Les vibrations qui ont lieu suivant OM, produisent une onde plane (enveloppe de la surface de l'onde lumineuse en question) perpendiculaire au plan du papier et se propageant suivant OV. Le point R où elle touche cette surface donne le rayon lumineux correspondant. De là résulte le théorème suivant:

Le plan de vibration pour un rayon lumineux quelconque est celui qui, passant par ce rayon, est perpendiculaire au plan qui touche la surface dans le point où elle est rencontrée par le rayon lumineux.

En nous rapportant à la figure, l'autre rayon, correspondant à des vibrations suivant l'axe perpendiculaire à OM, qui produisent une onde plane parallèle à celle que nous venons de considérer, se trouvera dans un plan perpendiculaire au plan de la figure et le coupant suivant OV. Ce même plan contiendra le point de contact.

26. *Équation du plan des vibrations.* — Si nous différentions l'équation de l'onde

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - \big(a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2\big) + a^2b^2c^2 = V = 0,$$

nous aurons en posant pour abréger

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = E, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

les équations suivantes:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2[E + a^2(r^2 - b^2 - c^2)]\,x,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2[E + b^2(r^2 - a^2 - c^2)]\,y,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2[E + c^2(r^2 - a^2 - b^2)]\,z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,x + \frac{\partial V}{\partial y}\,y + \frac{\partial V}{\partial z}\,z$$
$$= 4Er^2 - 2[a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2]$$
$$= 2[Er^2 - a^2b^2c^2]$$
$$= 2[a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2 - 2a^2b^2c^2].$$

Soient maintenant x', y' et z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface de l'onde lumineuse, et E' et r' les valeurs correspondantes de E et r, l'équation du plan tangent à ce point sera

$$[E' + a^2(r'^2 - b^2 - c^2)]x'x + [E' + b^2(r'^2 - a^2 - c^2)]y'y + [E' + c^2(r'^2 - a^2 - b^2)]z'z =$$
$$a^2(b^2 + c^2)x'^2 + b^2(a^2 + c^2)y'^2 + c^2(a^2 + b^2)z'^2 - 2a^2b^2c^2,$$

équation que, pour abréger, nous écrirons comme suit:

$$Ax'x + By'y + Cz'z = D.$$

L'équation du plan de vibration passant par l'origine sera de la forme:

$$A'x + B'y + C'z = 0.$$

Pour la déterminer complètement, on a les deux équations de condition:

$$A'x' + B'y' + C'z' = 0,$$
$$A'Ax' + B'By' + C'Cz' = 0,$$

dont l'une exprime que le plan en question passe par le point $(x', y' z')$, et l'autre qu'il est perpendiculaire au plan tangent. Si l'on retranche la dernière équation de la première, après avoir préalablement multiplié celle-ci par A, il vient

$$(A - B)B'y' + (A - C)C'z' = 0;$$

donc

$$\frac{B'}{C'} = -\frac{(A - C)z'}{(A - B)y'} = \frac{A - C}{y'} : \frac{B - A}{z'},$$

et en substituant A', A et x' à la place de B', B et y':

$$\frac{A'}{C'} = \frac{B - C}{x'} : -\frac{B - A}{z'}.$$

L'équation du plan de vibration devient donc la suivante:

$$\frac{B - C}{x'}x + \frac{C - A}{y'}y + \frac{A - B}{z'}z = 0,$$

c'est à-dire en introduisant pour A, B, C leurs valeurs:

$$(15)\quad \frac{(b^2 - c^2)(r'^2 - a^2)}{x'}x + \frac{(c^2 - a^2)(r'^2 - b^2)}{y'}y + \frac{(a^2 - b^2)(r'^2 - c^2)}{z'}z = 0.$$

27. Des considérations du numéro (20), on conclut qu'à une direction donnée des vibrations il ne répondra en général qu'un rayon lumineux unique; qu'il y aura exception cependant lorsque les vibrations se font parallèlement à l'un des axes des coordonnées. Il est évident d'après le numéro cité, que les points correspondants de la surface de l'onde constituent trois cercles décrits dans les trois plans des coordonnées par des rayons respectivement égaux aux trois demi-axes du premier ellipsoïde, perpendiculaires à ces plans.

En posant successivement y, x et z égal à zéro dans l'équation de la surface de l'onde, on trouvera les trois équations suivantes:

$$(a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2)(x^2 + z^2 - b^2) = 0,$$
$$(b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2)(y^2 + z^2 - a^2) = 0,$$
$$(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2)(x^2 + y^2 - c^2) = 0,$$

dont chacune représente le système d'un cercle et d'une ellipse (Fig. 54, 55, 56). Aux rayons lumineux aboutissant aux points de chacun des trois cercles répondent des vibrations parallèles entre elles et perpendiculaires au plan de la figure. On obtient les trois ellipses, situées dans ces mêmes plans, si l'on fait faire à chacune des ellipses d'intersection du premier ellipsoïde (plus faiblement tracées dans les figures) un quart de révolution dans son plan autour du centre. Pour

tous les rayons lumineux qui aboutissent aux points de chacune de ces trois ellipses, le plan de vibration est le plan de la courbe, de manière que toutes les vibrations ont lieu dans ce même plan, perpendiculairement aux différents rayons.

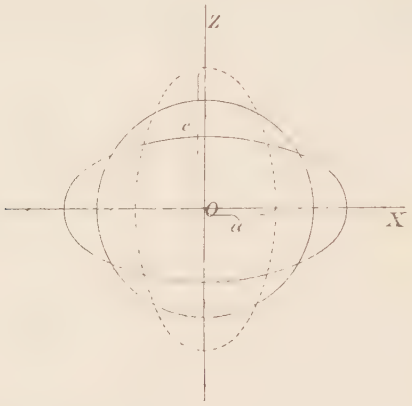

Fig. 54.

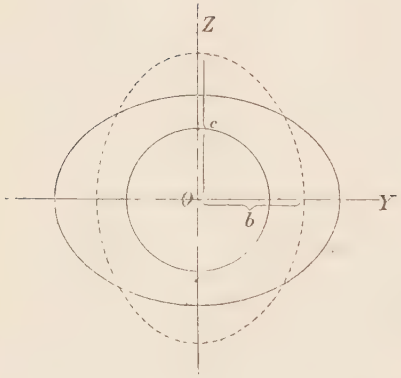

Fig. 55.

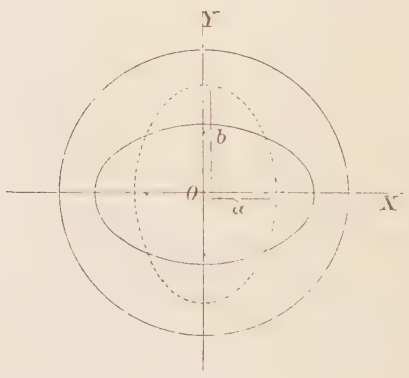

Fig. 56.

28. *Points singuliers de l'onde.* — Il suffit d'observer que l'équation de l'onde lumineuse (13) et l'équation (11) qui sert à la déterminer par ses plans tangents, sont d'un même degré supérieur au second, pour être assuré que la surface ait un plus grand nombre *de points singuliers* et en même temps de *plans singuliers;* avec la restriction cependant que ces points et ces plans singuliers peuvent être imaginaires ou situés dans l'infini. Occupons nous d'abord des points singuliers.

S'il existe un point singulier, ses coordonnées doivent satisfaire en même temps à l'équation de la surface et aux trois équations qui

s'en déduisent, en différentiant successivement par rapport aux trois variables. Cela donne les quatre équations suivantes:

$$V = Er^2 - (a^2b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2) + a^2b^2c^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = (E + a^2(r^2 - b^2 - c^2))x = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y} = (E + b^2(r^2 - a^2 - c^2))y = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial z} = (E + c^2(r^2 - a^2 - b^2))z = 0.$$

Pour satisfaire à ces équations il suffit de poser

$$(16)\quad y = 0,\quad E + a^2(r^2 - b^2 - c^2) = 0,\quad E + c^2(r^2 - a^2 - b^2) = 0;$$

car en retranchant les deux dernières des trois équations l'une de l'autre, il vient:

$$r^2 = b^2,$$

et en les retranchant, après les avoir multipliées respectivement par c^2 et a^2, on obtient

$$E = a^2c^2.$$

Ces deux équations nouvelles sont celles du cercle et de l'ellipse suivant lesquelles la surface est coupée par le plan des xz. Donc quatre points d'intersection de ces deux courbes détermineront quatre points singuliers qui, dans notre supposition que la valeur de b^2 soit intermédiaire entre a^2 et c^2, seront tous réels.

Nous obtenons de cette manière, dans chacun des trois plans des coordonnées, quatre points singuliers de la surface, mais parmi ces 12 points singuliers il y en a huit d'imaginaires.

Pour discuter la nature des quatre points singuliers réels M', $M_{,}$, M'' et $M_{,,}$ dont les coordonnées sont

$$x = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}},\quad z = \pm a\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}},\quad y = 0,$$

nous allons différentier de nouveau, en faisant en même temps attention aux trois équations (16). Il viendra

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4a^2x^2 = \frac{4a^2c^2(b^2 - a^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = E + b^2(r^2 - a^2 - c^2) = -(b^2 - a^2)(c^2 - b^2),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4c^2z^2 = \frac{4a^2c^2(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = 2(a^2+c^2)xz = 2ac(a^2+c^2)\cdot\sqrt{\frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2-a^2}},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (5) du numéro (4), et après avoir divisé tous les membres par

$$\frac{4a^2c^2(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2-a^2},$$

on trouvera l'équation suivante:

$$(17)\qquad \begin{cases} (b^2-a^2)C^2 + (c^2-a^2)B^2 + (c^2-b^2)A^2 \\ \mp\frac{a^2+c^2}{ac}\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}\,.\,AC = 0, \end{cases}$$

qu'on peut écrire ainsi

$$(18)\qquad a^2x''^2C^2 + a^2c^2B^2 + c^2z''^2A^2 - (a^2+c^2)x''z''AC = 0,$$

en distinguant par des accents les coordonnées du point singulier.

Il suit de là que, si l'on fait passer un plan quelconque par ce point, ce plan touchera la surface de l'onde dans le même point, aussitôt que les trois constantes de son équation

$$A(x-x'') + By + C(z-z'') = 0$$

satisfont à l'équation précédente. Tous ces plans enveloppent une surface conique du deuxième degré qui dans le point singulier est tangente à la surface de l'onde. On trouvera sans peine son équation en coordonnées rectangulaires.

29. *Cône lumineux sortant.* — Si l'on élève des perpendiculaires aux plans qui touchent le cône du numéro précédent dans le point singulier, ces perpendiculaires constitueront un cône nouveau de même ordre. Il sera celui que forment les rayons lumineux qui, en sortant sous une incidence perpendiculaire, répondent tous à un seul rayon, et traversent l'intérieur du crystal suivant l'une des deux lignes droites $M'M_{,}$ et $M''M_{,,}$ *) qui, d'après le numéro (14), sont perpendiculaires aux deux sections circulaires du premier ellipsoïde.

En désignant par x, y et z les coordonnées d'un point quelconque d'une telle perpendiculaire, on aura

$$(x-x'') : y : (z-z'') = A : B : C,$$

d'où, l'équation (18) étant homogène par rapport à A, B et C, nous obtenons immédiatement, en remplaçant ces quantités respectivement par $(x-x'')$, y et $(z-z'')$:

*) [Vgl. Fig. 52, S. 348.]

$$(19)\qquad \begin{cases} a^2x''^2(z-z'')^2 + a^2c^2y^2 + c^2z''^2(x-x'')^2 \\ \quad -(a^2+c^2)x''z''(x-x'')(z-z'') = 0. \end{cases}$$

Voilà l'équation du cône lumineux en question; elle se simplifiera comme suit:

$$(20)\qquad \begin{cases} a^2x''^2z^2 + a^2c^2y^2 + c^2z''^2x^2 - (a^2+c^2)x''z''xz \\ \quad +(c^2-a^2)x''z''(x''z-z''x) = 0. \end{cases}$$

30. *Plans de vibration pour les rayons sortants.* — Pour déterminer la direction des vibrations qui répondent aux différents rayons du cône lumineux sortant, nous n'avons, d'après le numéro (21), qu'à abaisser du centre des perpendiculaires sur les plans qui touchent la surface dans le point singulier. Les lignes droites qui, dans ces plans tangents, joignent les pieds des perpendiculaires au point singulier, indiqueront la direction des vibrations correspondantes. Le plan de vibration contient en même temps cette ligne droite, le rayon singulier (celui qui aboutit au point singulier) et le rayon sortant.

Cherchons donc la courbe qui est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires en question, dont nous désignerons les coordonnées par x, y et z. Nous obtenons de suite deux surfaces qui contiennent cette courbe. C'est d'abord le cône qui est formé par ces mêmes perpendiculaires, et qui n'est autre que le cône lumineux transporté parallèlement à lui même, de manière que son centre coïncide avec celui de l'onde. Son équation est par conséquent celle qu'on trouve, si l'on met en (19) x, y, z à la place de $(x-x'')$, y, $(z-z'')$. Donc on obtient immédiatement l'équation suivante:

$$a^2x''^2z^2 + a^2c^2y^2 + c^2z''^2x^2 - (a^2+c^2)x''z''xz = 0,$$

qui peut aussi s'écrire comme suit:

$$(21)\qquad a^2c^2(x^2+y^2+z^2) - (x''x+z''z)(a^2x''x+c^2z''z) = 0.$$

En second lieu la même courbe doit appartenir à une sphère dont l'un des diamètres est le rayon vecteur aboutissant au point singulier. Son équation sera donc

$$\left(x-\frac{x''}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z-\frac{z''}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

ou, en réduisant:

$$(22)\qquad x^2+y^2+z^2 = x''x+z''z.$$

Des équations (21) et (22) on tire

$$(x''x+z''z)(a^2x''x+c^2z''z-a^2c^2) = 0.$$

En négligeant le facteur $(x''x+z''z)$ étranger à la question, l'équation

$$a^2x''x+c^2z''z = a^2c^2$$

est celle du plan tangent qui est perpendiculaire à celui des xz et coupe ce plan suivant la tangente dans le point singulier de l'ellipse d'intersection avec la surface de l'onde dont l'équation est:

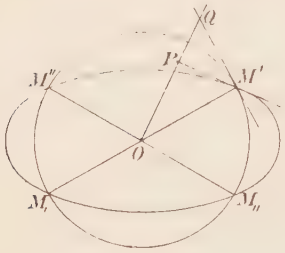

Fig. 57.

$$a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2.$$

Le lieu cherché est donc le cercle suivant lequel la sphère est coupée par ce plan. Pour l'obtenir on n'a qu'à abaisser du centre O une perpendiculaire OP sur la tangente à l'ellipse dans le point singulier M' (Fig. 57 et 58) et à construire ensuite un cercle perpendiculaire au plan de l'ellipse, ayant $M'P$ pour diamètre.

Remarquons encore que le facteur négligé indique que, pour avoir l'autre direction dans laquelle le cône (21), ainsi que le cône

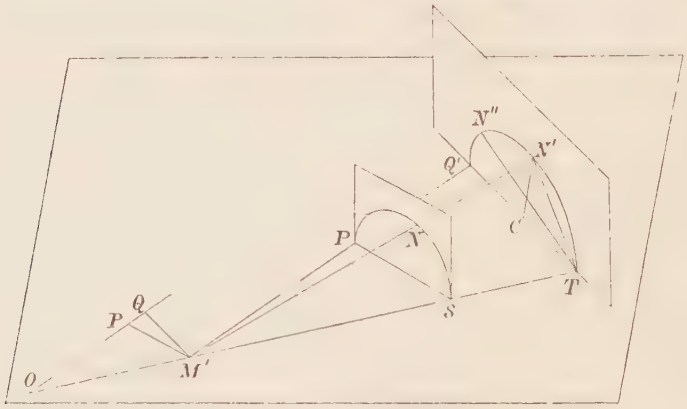

Fig. 58.

(20), est coupé suivant un cercle, il faut prendre les plans coupants perpendiculaires au rayon singulier OM'; ce qui d'ailleurs se voit immédiatement, $M'P$ étant perpendiculaire à OQ.

Considérons maintenant un rayon quelconque du cône lumineux rencontrant les deux sections circulaires qui sont respectivement perpendiculaires à $M'Q'$ et $M'T$ en N et N': le plan de vibration correspondant passera par ce rayon et par le rayon singulier $OM'T$. Son inclinaison au plan de la figure aura pour mesure la moitié de l'arc $Q'N'$ de la seconde section circulaire. Elle est zéro pour le rayon $M'Q'$ et égal à 90^0 pour le rayon $M'T$ qui est le prolongement du rayon singulier OM'.

Si l'on reçoit l'image sur un écran EE perpendiculaire au rayon

singulier, on obtiendra un cercle lumineux $Q'N''N'T$, passant par ce rayon. Il suit de ce qui précède que le plan de vibration décrit autour du rayon singulier OM' un arc de cercle, moitié de celui que décrit le rayon lumineux dans le cercle lumineux, ou, pour me servir des expressions de Physique: lorsqu'on regarde le cercle lumineux à travers une plaque de tourmaline, coupée parallèlement à l'axe, il ne disparait qu'un seul rayon; tandis qu'en tournant la plaque d'un angle quelconque dans son plan le rayon qui disparait décrira l'angle double autour du centre du cercle lumineux, de manière qu'il parcourrera toute la périphérie si la tourmaline tourne de 180 degrés seulement.*)

31. *Détermination analytique des plans singuliers.* — Cherchons ces plans parmi ceux qui sont perpendiculaires aux plans des coordonnées. L'on a, pour déterminer les points de la surface de l'onde dans lesquels elle est touchée par des plans perpendiculaires au plan des xz, les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

en conservant la notation du numéro (26). La dernière de ces équations se décompose dans les deux suivantes:

$$(23) \quad \begin{cases} y = 0, \\ (a^2 + b^2)x^2 + 2b^2y^2 + (c^2 + b^2)z^2 - (a^2 + c^2)b^2 = 0, \end{cases}$$

dont la première exprime, ce qui d'ailleurs est évident, que dans les points de la surface de l'onde qui sont situés dans le plan des xz, les plans tangents sont perpendiculaires à ce plan. L'autre représente un ellipsoïde; d'où il suit, qu'en combinant convenablement l'équation de la surface de l'onde

$$(24) \quad \begin{cases} V = (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ - \left(a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2\right) + a^2b^2c^2 = 0, \end{cases}$$

et l'équation suivante:

*) Mr. Lloyd est parvenu le premier à ce résultat par expérience. Il s'exprime ainsi: (Transactions of the Royal Irish Academy, Bd. 17, S. 149.)

> . . . I discovered the remarkable law, „that the angle between the planes of polarization of any two rays of the cone is half the angle between the planes containing the rays themselves and the axis". (On conical refraction, p. 7.)

Les plans de polarisation sont perpendiculaires à ceux de vibration (17) et l'axe dont il s'agit est l'axe optique, qui est perpendiculaire à l'une des tangentes communes au cercle et à l'ellipse d'intersection dans le plan des xz. L'on voit que ce théorème n'est vrai qu'approximativement; il est prouvé comme tel par analyse dans le cas de l'Arragonite où l'on a à peu près $b^2 = ac$: condition nécessaire à remplir.

$$\left((a^2+b^2)x^2+2b^2y^2+(c^2+b^2)z^2-(a^2+c^2)b^2\right)^2=0,$$

on doit obtenir celle d'un cylindre perpendiculaire au plan des xz et enveloppé par les plans tangents à la surface de l'onde dans les points où il est coupé (de même que l'onde) par l'ellipsoïde en question. L'équation de ce cylindre ne devant point contenir y, l'on atteindra ce but, en retranchant la dernière équation de l'équation de l'onde, après avoir préalablement multiplié celle-ci par $4b^2$. A l'équation résultante nous pouvons donner la forme suivante:

$$\left((b^2-a^2)x^2+(c^2-b^2)z^2-(c^2-a^2)b^2\right)^2-4(b^2-a^2)(c^2-b^2)x^2z^2=0,$$

et la décomposer alors dans les deux équations

$$(b^2-a^2)x^2+(c^2-b^2)z^2-(c^2-a^2)b^2\pm 2\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}\,xz=0.$$

Après avoir écrit ces équations ainsi:

$$[\sqrt{b^2-a^2}\,x\pm\sqrt{c^2-b^2}\,z]^2-(c^2-a^2)b^2=0,$$

on les décomposera de nouveau et on obtiendra les quatre équations suivantes:

$$\sqrt{b^2-a^2}\,x\pm\sqrt{c^2-b^2}\,z\pm\sqrt{c^2-a^2}\,b=0.$$

Le cylindre en question dégenère donc en un système de quatre plans perpendiculaires au plan des xz; chaque point de la courbe d'intersection de l'un quelconque de ces plans avec l'ellipsoïde (23) étant un point où la surface de l'onde est touchée par ce même plan, les quatre plans seront des plans singuliers de l'onde. Il suit des développements du numéro (14) que ces plans singuliers coupent le plan des xz suivant les quatre tangentes communes au cercle et à l'ellipse, courbes d'intersection de l'onde dans le même plan. D'après le même numéro les quatre plans singuliers sont parallèles aux sections circulaires du *second* ellipsoïde:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1.$$

La direction de celles-ci dépendant uniquement de la différence des trois coefficients de x^2, y^2 et z^2, pris deux à deux, et ne changeant nullement si le membre constant change, il est évident qu'elle est la même que celle des sections circulaires de l'ellipsoïde (23). Donc les courbes de contact dans les quatre plans singuliers sont des *cercles*. Pour les trouver l'on n'a qu'à construire les tangentes communes au cercle et à l'ellipse d'intersection, et à décrire ensuite, pour chacune d'elles, un cercle JGH (Fig. 59 et 60) perpendiculaire au plan de la figure et ayant pour diamètre le segment de cette tangente compris entre les

deux points de contact (H et J). Le carré de ce diamètre se trouvera égal à

$$-\frac{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}{b^2}.$$

Un rayon quelconque OG qui vient de l'intérieur du crystal aboutir à un point quelconque de la courbe de contact dans l'un des plans singuliers en sortira perpendiculairement à ce plan suivant GG'. Tous les rayons sortants ainsi constituent un cylindre lumineux circulaire et perpendiculaire au plan singulier ou, ce qui est la même chose, un cylindre dont l'axe est parallèle à l'un des deux axes optiques du crystal. D'un autre côté, un rayon lumineux extérieur, tombant sous l'incidence perpendiculaire sur le crystal, constituera dans l'intérieur un cône lumineux.

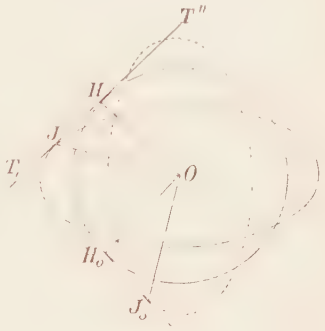

Fig. 59.

Pour un rayon lumineux quelconque OGG', le plan de vibration est celui qui contient en même temps ce rayon et l'axe optique OHH', cet axe étant perpendiculaire au plan

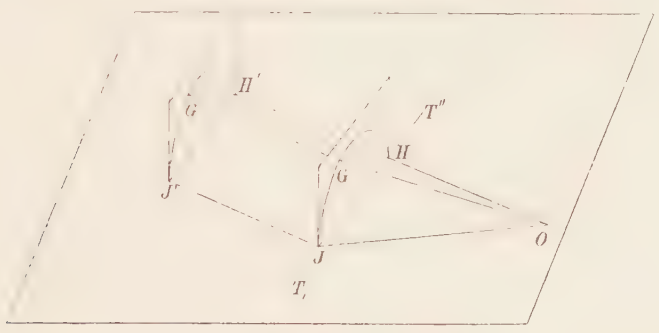

Fig. 60.

singulier (26). L'angle que fait ce plan avec celui des xz a pour mesure la moitié de l'angle JG, de manière que cet angle s'évanouit pour le rayon (refracté extraordinairement dans le plan des xz) OJJ', et qu'il devient égal à 90 degrés pour le rayon (ordinaire) OHH'. Il est donc prouvé *que l'angle formé par les plans de vibration pour deux rayons quelconques est moitié de celui formé par les deux plans, contenant les deux rayons et en même temps l'axe du cylindre.*

Les résultats de ce numéro ont été prédits théoriquement par M. Hamilton, et vérifiés ensuite expérimentalement par M. Lloyd.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que les quatre plans singuliers et perpendiculaires à chacun des plans des xy et zy deviennent imaginaires.

32. *Deuxième manière de déterminer les plans singuliers.* Nous avons pris beaucoup trop l'habitude de ne regarder comme équation d'une courbe ou d'une surface que celle qui exprime une relation entre les coordonnées de leurs points. Je ne trouve nulle part, qu'on ait regardé l'équation

$$\frac{A^2}{V^2-a^2}+\frac{B^2}{V^2-b^2}+\frac{C^2}{V^2-c^2}=0 \tag{10}$$

comme représentant la surface de l'onde lumineuse. Néanmoins on peut déduire de cette équation toutes les propriétés de la surface d'une manière aussi complète et facile que de l'équation suivante entre x, y et z:

$$\begin{cases}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)\\ -\left(a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2\right)+a^2b^2c^2=0.\end{cases} \tag{13}$$

On doit s'en étonner d'autant plus que l'illustre Fresnel n'ait pas réussi à transformer l'une de ces équations dans l'autre et que M. Ampère y soit parvenu le premier en 1828 par un énorme calcul d'élimination. Les considérations théorètiques me font reprendre, dans ce qui va suivre, la discussion des singularités de la surface de l'onde.

Partons de l'équation (10) sous la forme suivante que nous lui avons donnée dans le numéro (19):

$$\begin{cases}W=[b^2c^2A^2+c^2a^2B^2+a^2b^2C^2][A^2+B^2+C^2]\\ -[(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)C^2]+1=0,\end{cases} \tag{11}$$

A, B et C ayant la même signification que dans le numéro (5). S'il existe un plan singulier, il faut que les trois constantes A, B, C de son équation

$$Ax+By+Cz=1$$

satisfassent, outre à l'équation proposée, aux trois équations suivantes:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial A}=[2b^2c^2A^2+c^2(a^2+b^2)B^2+b^2(a^2+c^2)C^2-(b^2+c^2)]A=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial B}=[c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2+a^2(b^2+c^2)C^2-(a^2+c^2)]B=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial C}=[b^2(a^2+c^2)A^2+a^2(b^2+c^2)B^2+2a^2b^2C^2-(a^2+b^2)]C=0.$$

En posant $B=0$, la deuxième de ces trois équations est satisfaite. Pour que la première et la troisième le soient également, il faut qu'on ait:

$$b^2\left(2c^2A^2 + (a^2 + c^2)C^2\right) - (b^2 + c^2) = 0,$$

$$b^2\left((a^2 + c^2)A^2 + 2a^2C^2\right) - (a^2 + b^2) = 0.$$

Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on obtient en négligeant le facteur commun $(c^2 - a^2)$:

$$b^2(A^2 + C^2) = 1, \tag{25}$$

et si l'on les retranche, après avoir préalablement multiplié la première équation par a^2 et la seconde par c^2, il vient après la division par $b^2(a^2 - c^2)$:

$$c^2A^2 + a^2C^2 = 1. \tag{26}$$

Les deux dernières équations sont donc équivalentes à celles dont elles dérivent. Elles donnent pour la détermination des plans singuliers:

$$B = 0, \quad b^2A^2 = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}, \quad b^2C^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}.$$

L'on démontrera aisément que ces mêmes valeurs satisfont à l'équation de la surface. En y posant $B = 0$, on obtiendra pour déterminer le cercle et l'ellipse d'intersection, l'équation suivante:

$$[b^2(A^2 + C^2) - 1]\,[c^2A^2 + a^2C^2 - 1] = 0,$$

qui se décomposera dans les deux équations (25) et (26). On en conclut encore que les plans singuliers coupent le plan des xz suivant les tangentes communes au cercle et à l'ellipse d'intersection qui sont représentées par les équations (25) et (26).

Pour déterminer la courbe de contact dans les plans singuliers dont la position vient d'être déterminée, il faut différentier de nouveau. Ainsi on obtient, en rapportant tout au plan singulier:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial A^2} = 4b^2c^2A^2 = 4\,\frac{c^2(b^2 - a^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} = c^2(a^2 + b^2)A^2 + a^2(b^2 + c^2)C^2 - (a^2 + c^2)$$

$$= b^2(c^2A^2 + a^2C^2) + a^2c^2(A^2 + C^2) - (a^2 + c^2) = -\frac{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{b^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial C^2} = 4a^2b^2C^2 = 4\,\frac{a^2(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial A\,\partial B} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial A\,\partial C} = 2b^2(a^2 + c^2)AC = 2(a^2 + c^2)\,\frac{\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial B\,\partial C} = 0;$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (5) du numéro (5), il en résultera après avoir divisé par $\frac{4(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{b^2(c^2-a^2)}$:

$$(27)\quad \begin{cases} c^2(b^2-a^2)z^2+b^2(c^2-a^2)y^2+a^2(c^2-b^2)x^2 \\ \mp(a^2+c^2)\sqrt{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}\,xz=0. \end{cases}$$

C'est l'équation du cône, ayant son centre à l'origine, qui par son intersection avec le plan singulier, donne dans ce plan la courbe de contact. Le cône en question est le cône lumineux intérieur de la figure 60.

33. On peut, en suivant une marche tout-à-fait analogue, obtenir immédiatement l'équation de la courbe de contact, si l'on remplace l'équation (11) par l'équation suivante:

$$(28)\quad \begin{cases} W'=(b^2c^2A^2+a^2c^2B^2+a^2b^2)(A^2+B^2+1) \\ -[(b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)]D^2+D^4=0, \end{cases}$$

ce qui revient à déterminer les plans tangents à la surface de l'onde par les trois constantes A, B et D de leurs équations mises sous la forme:

$$z+Ax+By+D=0.$$

L'on aura alors:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial A}=[2b^2c^2A^2+c^2(a^2+b^2)B^2-(b^2+c^2)D^2+b^2(a^2+c^2)]A=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial B}=[c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2-(a^2+c^2)D^2+a^2(b^2+c^2)]B=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial D}=\Big[2D^2-\Big((b^2+c^2)A^2+(c^2+a^2)B^2+(a^2+b^2)\Big)\Big]D=0,$$

ce qui donne pour le plan singulier:

$$B=0,\quad A^2=\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2},\quad D^2=b^2\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}.$$

Puis, en différentiant de nouveau et en ayant égard à ces valeurs, il vient:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial A^2}=4b^2c^2A^2=4b^2c^2\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial B^2}=[c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2-(a^2+c^2)D^2+a^2(b^2+c^2)]$$
$$=-(b^2-a^2)(c^2-a^2),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial D^2}=4D^2=4b^2\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial B}=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial A\,\partial D} = -2(b^2+c^2)AD = \mp\frac{2(b^2+c^2)b\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}}{c^2-b^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial B\,\partial D} = 0.$$

En substituant dans l'équation (6) du numéro (6) et en divisant par $b^2(c^2-a^2)(b^2-a^2)$, on obtient:

$$\frac{c^2(b^2-a^2)}{c^2-b^2}+y^2+\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}x^2+\frac{b^2+c^2}{b}\sqrt{\frac{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}{c^2-b^2}}x=0,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme suivante:

$$y^2+\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}\left[x\pm\frac{b^2+c^2}{2b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}}\right]^2=\frac{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}{4b^2}.$$

C'est l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe de contact. A^2 étant le carré de la tangente de l'angle que fait le plan singulier avec le plan des xy, le carré du cosinus de ce même angle sera $\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}$, d'où l'on voit que la courbe de contact est un *cercle*, dont le rayon est égal à

$$\frac{\sqrt{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}}{2b}.$$

34. *Points singuliers.* L'équation

$$(29)\quad c^2(a^2+b^2)A^2+2a^2c^2B^2+a^2(b^2+c^2)C^2-(a^2+c^2)=0$$

détermine un ellipsoïde par ses plans tangents; il sera facile d'obtenir du même ellipsoïde l'équation en coordonnées rectangulaires. Il est évident que, pour les plans tangents parallèles au plan des yz, B et C disparaissent (5) tandis que $\frac{1}{A}$ devient égal au demi-axe de l'ellipsoïde, coïncidant avec l'axe des x. De la même manière s'obtiennent les deux autres demi-axes. L'équation précédente donnant

$$B=0,\quad C=0,\quad \frac{1}{A^2}=\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+c^2},$$

$$A=0,\quad C=0,\quad \frac{1}{B^2}=\frac{2a^2c^2}{a^2+c^2},$$

$$A=0,\quad B=0,\quad \frac{1}{C^2}=\frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2+c^2},$$

l'équation cherchée sera la suivante:

$$\frac{(a^2+c^2)x^2}{(a^2+b^2)c^2}+\frac{(a^2+c^2)y^2}{2a^2c^2}+\frac{(a^2+c^2)z^2}{(b^2+c^2)a^2}=1.$$

Après cette digression je reprends mon objet. Si nous combinons algébriquement l'équation

$$(11)\quad \begin{cases} (b^2c^2A^2 + c^2a^2B^2 + a^2b^2C^2)(A^2 + B^2 + C^2) \\ -\,|(b^2 + c^2)A^2 + (c^2 + a^2)B^2 + (a^2 + b^2)C^2)| + 1 = 0, \end{cases}$$

qui donne l'onde lumineuse par ses plans tangents, avec l'équation suivante:

$$[c^2(a^2 + b^2)A^2 + 2a^2c^2B^2 + a^2(b^2 + c^2)C^2 - (a^2 + c^2)]^2 = 0,$$

l'équation résultante déterminera en général une surface nouvelle. Cette surface a la propriété de toucher la surface de l'onde suivant une courbe, de manière que les plans tangents communs aux deux surfaces enveloppent l'ellipsoïde (29). Retranchons de cette dernière équation l'équation (13) après l'avoir multipliée par $4a^2c^2$; l'équation résultante peut être mise sous la forme:

$$\begin{gathered}\big(c^2(b^2 - a^2)A^2 + a^2(c^2 - b^2)C^2 - (c^2 - a^2)\big)^2 \\ - 4a^2c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)A^2C^2 = 0,\end{gathered}$$

et se décomposera dans les deux suivantes:

$$c^2(b^2 - a^2)A^2 + a^2(c^2 - b^2)C^2 - (c^2 - a^2) \pm 2ac\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}\,AC = 0.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire ainsi:

$$[c\sqrt{b^2 - a^2}\,A \pm a\sqrt{c^2 - b^2}\,C] - (c^2 - a^2) = 0,$$

et se décomposer de nouveau de la manière suivante:

$$c\sqrt{b^2 - a^2}\,A \pm a\sqrt{c^2 - b^2}\,C \pm \sqrt{c^2 - a^2} = 0.$$

Tous les plans dont les constantes A et C satisfont à l'une de ces quatre équations, passent par un des quatre points dont les coordonnées sont

$$y = 0, \quad x = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, \quad z = \pm a\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}.$$

Ces quatre points remplacent donc la surface en question. Il suit de là que ce sont des points singuliers de la surface de l'onde et que les quatre cônes circonscrits à l'ellipsoïde (29) et ayant leurs centres en ces points sont ceux qui y touchent l'onde suivant chacune de leurs arêtes.

35. *Considérations géométriques.* On peut parvenir par des raisonnements purement géométriques et très simples à la détermination complète des deux sortes de singularités de la surface de l'onde lumineuse.

A un point quelconque m du premier ellipsoïde correspond toujours un seul point p de la surface d'élasticité (Fig. 53), de sorte que ce dernier point p est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O

sur le plan tangent à l'ellipsoïde dans le premier point m. Le plan diamétral, passant par les deux points m et p, est, d'après le numéro (25), le plan de vibration; lorsqu'on mène dans ce plan deux lignes droites OR et OV, respectivement perpendiculaires et égales à Om et Op, le rayon lumineux correspondant à des vibrations qui ont lieu suivant Op sera OR, tandis que le front de l'onde est perpendiculaire à OV en V.

Il répondra pareillement à une section diamétrale de la surface d'élasticité, et *vice versa*. Nous nous bornerons ici à considérer plus particulièrement les deux sections circulaires de l'une et de l'autre des deux surfaces. Il est aisé de voir que ces quatre sections appartiennent à une même sphère, ayant pour rayon le demi-axe moyen de l'ellipsoïde. Ceci a été prouvé, quant aux deux sections circulaires de celui-ci, dans le numéro (14). Le rayon des sections circulaires du second ellipsoïde sera donc égal à $\frac{1}{b}$ et celui des sections correspondantes de la surface d'élasticité, pareillement circulaires, égal à b, valeur inverse de $\frac{1}{b}$; ce qu'il fallait démontrer.

Occupons-nous d'abord des deux sections circulaires de la surface d'élasticité. (Fig. 61.) Le cylindre droit qui a pour base l'une quelconque H_0BH^0 de ces deux sections enveloppera le premier ellipsoïde; la courbe de contact J_0BJ^0, nécessairement plane, sera la section correspondante de celui-ci, de sorte que chaque arête du cylindre coupera les deux sections de la surface d'élasticité et de l'ellipsoïde en deux points correspondants. Tels sont, dans la figure, les points h et g. La section de l'ellipsoïde est une ellipse, dont le petit axe, égal à b, se confond, dans l'axe des y, avec un diamètre de la section circulaire. Le plan de vibration passe toujours par le centre O et deux points correspondants, tels que h et g, de sorte qu'il est perpendiculaire à la section circulaire H_0BH^0. Faisons tourner dans ce plan, autour du centre O, le triangle hOg, jusqu'à ce que OH devienne perpendiculaire à Oh, HG sera alors perpendiculaire à hg et parallèle à Oh. Quels que soient donc les deux points correspondants h et g, dans la position nouvelle, le point H sera un même point fixe, tandis que le point G se trouvera toujours dans un même plan parallèle à la section circulaire et distant d'elle d'une quantité $OH = OB = b$. Pour déterminer dans

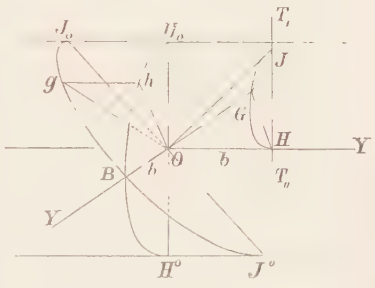

Fig. 61.

ce plan le lieu géométrique des différentes positions du point G, nous observerons qu'on a

$$hg = H_0 J_0 \cos H_0 Oh,$$

ou bien, en substituant:

$$HG = HJ \cos GHJ.$$

De là on conclut que l'angle HGJ est un angle droit. Donc le lieu cherché est un cercle, perpendiculaire au plan des xz et ayant HJ pour l'un de ses diamètres. Les rayons lumineux qui répondent aux différents points de la section $J_0 BJ^0$ forment ainsi un cône lumineux du second ordre. Le front de l'onde est le même pour tous les rayons. Tous leur plans de vibration passent par le point H.

36. Considérons en second lieu les deux sections circulaires du premier ellipsoïde. Suivant l'une quelconque $M_0 BM^0$ (Fig. 62)*) de ces deux sections, l'ellipsoïde est touché par un cylindre circonscrit du second ordre. Si l'on abaisse du centre des perpendiculaires sur les plans tangents à ce cylindre, les pieds de ces perpendiculaires constitueront la courbe correspondante de la surface d'élasticité. Pour la déterminer, conduisons par le centre un plan diamétral et perpendiculaire aux arêtes du cylindre circonscrit. Ce plan coupera le cylindre suivant une ellipse, dont le grand axe, égal à b, se confondra avec l'axe des y. Il contiendra la courbe cherchée, que l'on construira, en abaissant du centre des perpendiculaires sur les tangentes à l'ellipse d'intersection. Soit m un point de la section circulaire de l'ellipsoïde, l'arête du cylindre, passant par m, coupera l'ellipse en n, où celle-ci est touchée par la droite nv. Ov, perpendiculaire à nv, sera également perpendiculaire au plan mnv, qui touche l'ellipsoïde en m; v sera donc le point de la surface d'élasticité correspondant au point m. Faisons faire au triangle vOm un quart de révolution autour du centre O dans son propre plan, qui est celui de vibration. Quels que soient les deux points correspondants m et v dans la position nouvelle, M' sera un même point fixe; Ovm étant un angle droit, $M'V$ deviendra parallèle à Ov, de sorte que le point V doit rester constamment dans un plan passant par M' et parallèle à la section ovale de la surface d'élasticité. L'angle

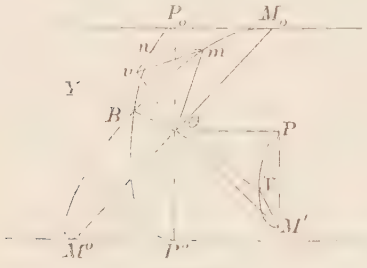

Fig. 62.

*) [Die Figur ist dahin zu berichtigen, dass Punkt v auf der entgegengesetzten Seite der Tangente von n aus liegt.]

OVM' étant pareillement un angle droit, V doit se trouver sur la surface d'une sphère, décrite sur OM' comme diamètre. De là on conclut que le lieu géométrique des points V est un cercle, perpendiculaire au plan des xz et ayant $M'P$ pour l'un de ses diamètres.

A tous les différents points de la section circulaire de l'ellipsoïde ne répond donc qu'un rayon lumineux unique, tandis que le front de l'onde, dépendant des points de la section correspondante de la surface d'élasticité, varie d'un point à l'autre. Il enveloppe, dans ses différentes positions, un cône du second degré, dont les plans tangents touchent le cercle $M'VP$ et sont respectivement perpendiculaires aux rayons vecteurs aboutissant aux points de ce cercle.[2]) Les plans de vibration passent tous par le rayon lumineux OM'.

37. *Vitesse des ondes planes dans l'intérieur du crystal.* Nous avons désigné précédemment par $V_{,}$ et $V_{,,}$ les perpendiculaires abaissées du centre O sur les fronts des ondes planes qui enveloppent la surface de l'onde qui, à partir d'un point quelconque O de l'intérieur du crystal, pris pour centre, se propage dans tous les sens. Deux valeurs correspondantes de $V_{,}$ et $V_{,,}$ se rapportent aux deux ondes planes qui, s'accompagnent toujours l'une l'autre en suivant une même direction. Développons l'équation (2) du numéro (7).

$$V_{,}^2 - V_{,,}^2 = \pm\sqrt{(\mu+\varrho)^2 - 4(\mu\varrho - \nu^2)}$$

au moyen des deux équations (5) du numéro (18), que nous écrirons en égard aux dernières équations du numéro (2), de la manière suivante:

$$(\mu+\varrho) = \frac{(a^2+b^2)C^2 + (a^2+c^2)B^2 + (b^2+c^2)A^2}{A^2+B^2+C^2},$$

$$(\mu\varrho - \nu^2) = \frac{a^2b^2C^2 + a^2c^2B^2 + b^2c^2A^2}{A^2+B^2+C^2};$$

il en résultera après des réductions faciles:

$$(V_{,}^2 - V_{,,}^2)^2 = \frac{[(b^2-a^2)C^2+(c^2-a^2)B^2+(c^2-b^2)A^2]^2 - 4(b^2-a^2)(c^2-b^2)A^2C^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Nommons ξ, η, ϑ les trois angles que fait la perpendiculaire aux fronts parallèles des deux ondes planes avec les trois axes des x, y et z; nous aurons

$$\cos^2\xi = \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \cos^2\eta = \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \cos^2\vartheta = \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$(1)\quad \begin{cases} (V_{,}^2 - V_{,,}^2)^2 = [(b^2-a^2)\cos^2\vartheta + (c^2-a^2)\cos^2\eta + (c^2-b^2)\cos^2\xi]^2 \\ \qquad\qquad - 4(b^2-a^2)(c^2-b^2)\cos^2\xi\cos^2\vartheta, \end{cases}$$

et si l'on décompose son second membre en deux facteurs,

$$V_{,}^{2} - V_{,,}^{2} = [(\sqrt{b^2 - a^2}\cos\vartheta + \sqrt{c^2 - b^2}\cos\xi)^2 + (c^2 - a^2)\cos^2\eta]$$
$$\cdot\,[(\sqrt{b^2 - a^2}\cos\vartheta - \sqrt{c^2 - b^2}\cos\xi)^2 + (c^2 - a^2)\cos^2\eta].$$

Désignons par $\alpha_{,}$ et $\alpha_{,,}$ (Fig. 63) les angles que font les deux tangentes T, T''' et $T, T_{,,}$ communes au cercle et à l'ellipse d'inter-

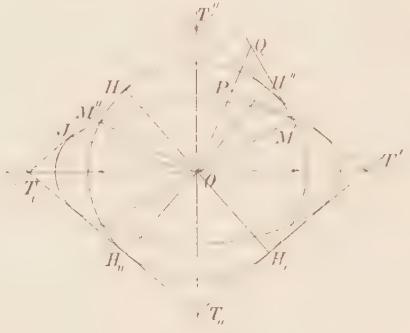

Fig. 63.

section dans le plan des xz, avec l'axe des x et par $\gamma_{,}$ et $\gamma_{,,}$ les angles formés par les mêmes tangentes avec l'axe des z, de sorte qu'on ait:

$$\cos\alpha_{,,} = \cos\alpha_{,} = +\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}, \quad -\cos\gamma_{,,} = \cos\gamma_{,} = +\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}.$$

Alors l'équation précédente peut s'écrire ainsi:

$$(V_{,}^{2} - V_{,,}^{2})^2 = (c^2 - a^2)^2\,[(\cos\gamma_{,}\cos\vartheta + \cos\alpha_{,}\cos\xi)^2 + \cos^2\eta]$$
$$\cdot\,[(\cos\gamma_{,,}\cos\vartheta + \cos\alpha_{,,}\cos\xi)^2 + \cos^2\eta].$$

Mais suivant la formule connue qui donne l'angle de deux droites moyennant les trois angles que chacune d'elles fait avec les trois axes des coordonnées, on a

$$\cos\gamma_{,}\cos\vartheta + \cos\alpha_{,}\cos\xi = \cos\varepsilon, \quad \cos\gamma_{,,}\cos\vartheta + \cos\alpha_{,,}\cos\xi = \varepsilon';$$

en nommant ε et ε' les angles que fait la perpendiculaire au front de l'onde avec la direction des tangentes T, T''' et $T, T_{,,}$. Nommons enfin ψ et ψ' les angles que fait la même perpendiculaire avec les deux axes optiques; ces axes étant respectivement perpendiculaires aux deux tangentes et en même temps à l'axe des y, l'on a

$$\cos^2\eta + \cos^2\varepsilon + \cos^2\psi = 1, \quad \cos^2\eta + \cos^2\varepsilon' + \cos^2\psi' = 1,$$

d'où

$$\cos^2\eta + \cos^2\varepsilon^2 = \sin^2\psi, \quad \cos^2\eta + \cos^2\varepsilon' = \sin^2\psi'.$$

Après avoir fait les substitutions ainsi indiquées et extrait la racine carrée, l'on obtient finalement l'équation qui suit:

$$(2) \qquad V_{,}^{2} - V_{,,}^{2} = (c^2 - a^2)\sin\psi\sin\psi'.$$

On voit que les deux vitesses ne sont jamais égales, excepté le cas où l'un des deux angles ψ et ψ' disparaît. Le front des deux ondes qui suivent la même direction est alors perpendiculaire à l'un des deux axes optiques H,H' et $H_{,,}H''$.

Si le front des deux ondes est perpendiculaire au plan des xz, l'une des deux vitesses est constante et égale à b. Veut-on que ce soit $V_{,,}$ et ne fait-on croître les angles ψ et ψ' que jusqu'à π, il vient

$$V_{,}^2 = b^2 \pm (c^2 - a^2) \sin\psi \sin\psi', \tag{3}$$

où il faut prendre le signe $+$, si la perpendiculaire abaissée du centre sur le front de l'onde tombe entre OH et $OH_{,,}$ ou leurs prolongements, tandis qu'il faut prendre le signe $-$, si elle tombe entre OH et OH' ou entre leurs prolongements. Dans le premier cas l'onde extraordinaire devance l'onde ordinaire, dans le dernier cas le contraire a lieu.

Si le front des deux ondes est perpendiculaire à l'un des deux plans qui bissectent les angles des deux axes optiques, c'est à dire, s'il est perpendiculaire au plan des xy et des yz, l'une des deux vitesses est encore constante. Considérons l'onde perpendiculaire au plan des xy et posons en conséquence dans l'équation (1)

$$\cos\vartheta = 0, \quad \cos^2\zeta + \cos^2\eta = 1,$$

il viendra

$$V_{,}^2 - V_{,,}^2 = \pm [c^2 - (a^2\cos^2\eta + b^2\cos^2\zeta)],$$

où il faut prendre le signe $-$, si l'on veut que $V_{,,}$ soit constante. Il en résulte:

$$V_{,,}^2 = c^2, \quad V_{,}^2 = a^2\cos^2\eta + b^2\cos^2\zeta,$$

de sorte qu'on obtient indépendamment l'une de l'autre la vitesse de l'onde ordinaire et celle de l'onde extraordinaire. L'onde ordinaire devance toujours l'onde extraordinaire. La construction de la vitesse de l'onde extraordinaire est liée par la dernière équation à la propriété suivante de l'ellipse (celle d'intersection dans le plan des xy) „que si l'on projette les deux demi-axes sur l'une quelconque de ses tangentes, la somme des carrés des projections est égale au carré de la perpendiculaire, abaissée du centre sur la même tangente".

Pendant que, perpendiculairement au plan des xy, l'onde ordinaire devance constamment l'extraordinaire, au contraire, les ondes étant perpendiculaires au plan des yz, c'est l'onde extraordinaire qui devance l'ordinaire.

38. Suivant l'équation (1) du numéro (7) on a

$$V_{,}^2 + V_{,,}^2 = \mu + \varrho = \frac{(a^2+b^2)C^2 + (a^2+c^2)B^2 + (b^2+c^2)A^2}{A^2+B^2+C^2}$$
$$= (a^2+b^2)\cos^2\vartheta + (a^2+c^2)\cos^2\eta + (b^2+c^2)\cos^2\zeta.$$

En faisant attention que

$$\cos^2\vartheta + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1,$$

cette équation peut s'écrire ainsi:

$$V_{,}^2 + V_{,,}^2 = (a^2 + c^2) + (b^2 - a^2)\cos^2\zeta - (c^2 - b^2)\cos^2\vartheta$$
$$= (a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)\left(\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}\cos^2\zeta - \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}\cos^2\vartheta\right).$$

Si l'on nomme α' et α'' les deux angles que font les deux axes optiques OH'' et OH' avec l'axe des x et γ' et γ'' les angles que font les mêmes axes avec l'axe des z, l'on a

$$\cos\alpha'' = \cos\alpha' = +\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, \quad -\cos\gamma'' = \cos\gamma' = +\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}.$$

Il suit de là

$$V_{,}^2 + V_{,,}^2 =$$
$$= (a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)[\cos\alpha'\cos\zeta + \cos\gamma'\cos\vartheta][\cos\alpha''\cos\zeta + \cos\gamma''\cos\vartheta]$$

et enfin

$$V_{,}^2 + V_{,,}^2 = (a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)\cos\psi\cos\psi'. \tag{4}$$

Si successivement l'on ajoute à cette équation et en retranche l'équation (2) du numéro précédent, on obtient:

$$V_{,}^2,\ V_{,,}^2 = \tfrac{1}{2}[(a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)(\cos\psi\cos\psi' \mp \sin\psi\sin\psi')]$$

et par des transformations trigonométriques faciles,

$$\begin{cases} V_{,}^2,\ V_{,,}^2 = \tfrac{1}{2}[(a^2 + c^2) + (c^2 - a^2)\cos(\psi \mp \psi')] \\ \qquad = c^2 - (c^2 - a^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(\psi \mp \psi'). \end{cases} \tag{5}$$

Cette équation donne séparément la vitesse de chacune des deux ondes; sa discussion n'offre aucune difficulté.

39. *Vitesse des rayons lumineux dans l'intérieur du crystal.* — En mettant dans les développements des deux numéros précédents à la place de a^2, b^2, c^2 leurs valeurs inverses $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, il faut substituer à la direction de la perpendiculaire abaissée du centre sur le front de l'onde celle du rayon lumineux, à la vitesse de l'onde l'unité divisée par la vitesse du rayon et enfin aux deux axes optiques les deux lignes droites $M_{,}M'$ et $M_{,,}M''$, diamètres communs au cercle et à l'ellipse d'intersection dans le plan des xz. Ainsi on obtient, si l'on nomme $P_{,}$ et $P_{,,}$ les vitesses des deux rayons, qui se confondent dans une même direction, et φ et φ' les deux angles que fait cette direction avec les deux lignes droites $M_{,}M'$ et $M_{,,}M''$:

$$\frac{1}{P_{,}^2} - \frac{1}{P_{,,}^2} = \pm\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin\varphi\sin\varphi'. \tag{6}$$

Ce théorème est dû a Mr. Biot. Je le trouve énoncé sans démonstration dans le *Traité de la lumière* de Mr. Herschel No. 1018, ainsi que dans les *Mathematical Tracts* de Mr. Airy, 2me éd. p. 352.

Dans chacun des plans des coordonnées la vitesse de l'un des rayons est constante et égale à la vitesse de l'onde correspondante; c'est ce qui constitue l'onde ordinaire. La vitesse de l'autre rayon est déterminée par les rayons vecteurs de l'ellipse d'intersection dans ce même plan. L'on a ainsi, par exemple pour les rayons lumineux renfermés dans le plan des axes optiques:

$$P_{,}^{2} = b^2, \quad \frac{1}{P_{,,}^{2}} = \frac{1}{b^2} \pm \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin\varphi \sin\varphi',$$

ou bien encore

$$\frac{1}{P_{,}^{2}} = \frac{\cos^2\eta}{a^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{c^2}.$$

Remarquons enfin qu'il peut arriver que la vitesse du rayon extraordinaire surpasse celle du rayon ordinaire qui suit la même route, tandis que l'onde extraordinaire correspondante marche plus lentement que l'onde ordinaire. C'est ce qui a lieu pour les rayons situés entre OJ et OM''. D'un autre côté il peut arriver que des deux ondes qui suivent la même route, l'ordinaire surpasse en vitesse l'extraordinaire, tandis que le rayon ordinaire correspondant retarde sur le rayon extraordinaire. C'est ce qui a lieu, si la perpendiculaire abaissée du centre sur les deux ondes parallèles est située entre OQ et OH''.

40. Les formules obtenues dans le numéro (38), se transforment par les mêmes substitutions dans les suivantes:

$$\frac{1}{P_{,}^{2}} + \frac{1}{P_{,,}^{2}} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) \cos\varphi \cos\varphi',$$

$$\frac{1}{P_{,}^{2}}, \quad \frac{1}{P_{,,}^{2}} = \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) \sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi \pm \varphi').$$

Ce dernier résultat appartient à l'illustre Fresnel (Biot, *Précis élémentaire de physique.* Troisième éd. vol. II p. 259).

41. *Le front d'une onde étant donné, déterminer les plans de vibration au moyen des deux axes optiques.* — Soit l'ovale de la figure 64 une section diamétrale quelconque de la surface d'élasticité, VV son diamètre *maximum*, $V'V'$ son diamètre *minimum*. Les deux plans de vibration seront alors ceux qui, étant perpendiculaires au plan de la figure, le coupent suivant VV et $V'V'$. Les deux sections circulaires de la surface coupent l'ovale suivant deux diamètres KK et $K'K'$ qui, étant tous les deux égaux à $2b$, feront nécessairément des

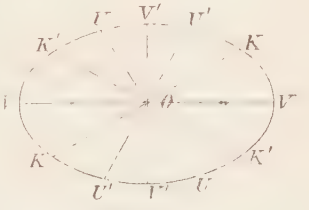

Fig. 61.

angles égaux avec chacune des deux lignes droites VV et $V'V'$. Les axes optiques sont perpendiculaires à ces sections circulaires, l'inclinaison de celles-ci sur le plan de l'ovale étant dépendante de la position de ce plan. Si l'on construit deux plans respectivement perpendiculaires aux diamètres KK et $K'K'$, chacun de ces plans passera par la normale au plan de la figure et en outre par un des deux axes optiques. Ils couperont l'ovale à laquelle ils sont perpendiculaires suivant les deux lignes droites UU et $U'U'$, qui font des angles égaux avec chacun des deux diamètres VV et $V'V'$.

Le front d'une onde étant donné, les deux plans de vibration correspondants divisent en deux parties égales les angles que forment les deux plans dont chacun contient, outre la normale au front, un des deux axes optiques.

Cet élégant théorème est dû à la sagacité de Mr. Biot; on en trouve une démonstration à l'endroit cité de l'ouvrage de Mr. Airy.

42. *Un rayon lumineux étant donné, déterminer les plans de vibration au moyen des deux normales aux sections circulaires du premier ellipsoïde.* — Dans un numéro précédent nous avons fait voir que le plan de vibration passe en même temps et par le rayon lumineux et par la perpendiculaire abaissée du centre sur le front de l'onde, et qu'en second lieu, il coupe les deux sections correspondantes de la surface d'élasticité et du premier ellipsoïde, chacune suivant l'un de leurs diamètres *maximum — minimum*, en étant perpendiculaire à toutes les deux. L'on obtient donc, en remplaçant dans les considérations du numéro précédent la section diamétrale de la surface d'élasticité par une section diamétrale du premier ellipsoïde, cet autre théorème:

Un rayon lumineux étant donné, les deux plans de vibration correspondants divisent en deux parties égales les angles formés par les deux plans dont chacun contient, outre le rayon, une des deux normales aux sections cirulaires du premier ellipsoïde.

Conformément au numéro précédent, les plans de vibration des deux rayons dans lesquels se divise un rayon extérieur, en entrant sous l'incidence perpendiculaire dans le crystal, se coupent à angles droits. D'après le présent numéro la même chose a lieu, quant aux deux rayons dans lesquels se divise un rayon intérieur, en sortant du crystal.*)

43. *Double réfraction suivant le principe de Huygens.* — Lorsqu'une onde lumineuse, se propageant dans l'air, vient frapper la surface d'un crystal, elle excitera dans tous les points où son front la rencontre

*) [Auch hier ist senkrechte Incidenz die nothwendige Voraussetzung.]

des ondes partielles, tant à l'extérieur du crystal dans l'air que dans son intérieur. Les unes, de forme sphérique, seront enveloppées dans un même instant quelconque par un plan; c'est le front correspondant de l'onde réfléchie. Les autres prennent des formes dépendantes de la position des trois axes d'élasticité dans le crystal et de la grandeur des élasticités suivant ces axes. Dans un instant quelconque les surfaces de ces ondes seront enveloppées par deux plans différents qui constituent les fronts correspondants des deux ondes réfractées. Il suit de ce principe originairement dû à Huygens que, dans un même instant quelconque, le front de l'onde incidente et ceux des ondes réfléchies et réfractées, vont couper la surface du crystal que nous supposons plane suivant une même ligne droite.

Soit AA (Fig. 65) la surface du crystal, FO le front de l'onde incidente, tous les deux perpendiculaires au plan du papier, de sorte que ce plan soit celui d'incidence pour le rayon lumineux RO, perpendiculaire au front de l'onde en O. Désignons par $\tau_1 - \tau$ l'intervalle du temps qu'emploie le front de l'onde pour passer de FO à la position nouvelle $F'O'$. Après cet intervalle, à l'époque τ_1, les ondes partielles excitées dans l'air autour de chaque point de la ligne droite, perpendiculaire au plan du papier en O, seront des sphères dont le rayon est égal à OG, c'est-à-dire égal à $\tau_1 - \tau$, si nous prenons pour unité de longueur la vitesse avec laquelle la propagation a lieu dans l'air. Pendant ce même intervalle une onde lumineuse s'est formée dans l'intérieur du crystal autour de chaque point de la perpendiculaire en O, ayant pour vitesses, suivant les trois axes d'élasticité, $a(\tau_1 - \tau)$, $b(\tau_1 - \tau)$, $c(\tau_1 - \tau)$. Les dimensions des deux séries d'ondes partielles, extérieures et intérieures, telles qu'elles sont à l'époque τ, diminueront donc proportionellement à $\tau_1 - \tau$, c'est-à-dire à mesure que le front de l'onde primitive s'approche de la position $F'O'$ de manière que les ondes, excitées dans les différents points de la perpendiculaire en O',

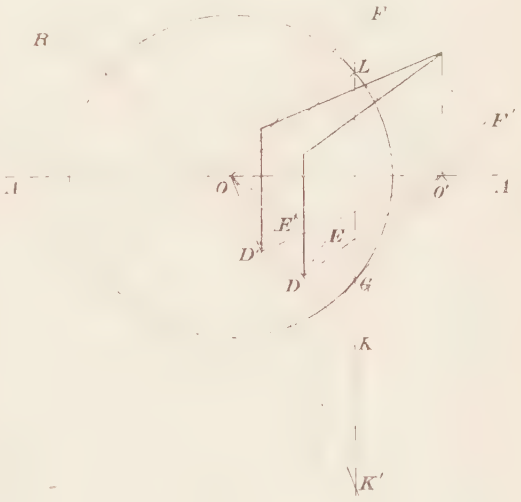

Fig. 65.

se réduisent à des simples points. Il en résulte, les équations des ondes étant homogènes, qu'à l'époque τ_1, toutes ces ondes sont enveloppées par des plans, passant par la perpendiculaire en O'. Pour les obtenir, l'on n'a qu'à construire les plans qui, passant par cette perpendiculaire, touchent la surface d'une onde partielle quelconque. Nous prendrons, en nous bornant aux ondes intérieures, celle décrite autour du point O. Les deux plans tangents $O'ED$, $O'E'D'$ perpendiculaires au plan d'incidence, sont à l'époque τ_1 les fronts des deux ondes réfractées, tandis que les deux rayons vecteurs OE, OE', passant par les deux points de contact E, E', sont les deux rayons dans lesquels se divise, par la réfraction, le rayon incident RO.

Dans le cas général aucun des deux rayons réfractés ne se trouvera dans le plan d'incidence. Les deux plans de vibration ODE, $OD'E'$ sont ceux qui passent par les deux rayons OE, OE' et les deux perpendiculaires OD, OD', abaissées du centre O (dans le plan d'incidence) sur les fronts des deux ondes réfractées.

Lorsque le plan d'incidence contient ou les deux axes optiques, ou fait des angles égaux avec ces axes (c'est-à-dire lorsque ce plan coïncide avec l'un des plans des coordonnées), les deux rayons réfractées se trouveront tous les deux dans le plan d'incidence. La vitesse de l'un sera constante, de quelle manière qu'on incline le rayon incident sur la surface du crystal; le plan de vibration correspondant sera perpendiculaire à celui d'incidence. La vitesse de l'autre rayon changera avec l'inclinaison; le plan de vibration correspondant se confondra avec celui d'incidence. Pour les deux rayons réfractés les plans de vibration seront donc perpendiculaires entre eux.

Quant à l'incidence perpendiculaire, la construction précédente se réduit à celles des deux plans tangents à la surface de l'onde partielle, décrite autour du point O, parallèles entre eux et au front de l'onde incidente. Les deux plans de vibration pour les deux rayons réfractés sont, dans ce cas, perpendiculaires entre eux, quelle que soit la sursurface du crystal.

44. *Surface of wave slowness.* — Nous avons trouvé plus haut l'équation

$$(b^2c^2A^2 + a^2c^2B^2 + a^2b^2C^2)(A^2 + B^2 + C^2)$$
$$- \left((b^2 + c^2)A^2 + \left((a^2 + c^2)B^2 + (a^2 + b^2)C^2\right)\right. + 1 = 0.$$

pour déterminer, dans le cas le plus général, la surface de l'onde par ses plans tangents, A, B, C désignant les valeurs inverses des segments qu'un tel plan intercepte sur les trois axes des coordonnées.

En remplaçant ces variables par x, y, z, l'équation résultante en coordonnées rectangulaires

$$(b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- \left((b^2 + c^2)x^2 + (a^2 + c^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2\right) + 1 = 0,$$

représentera, suivant le numéro (8), la surface polaire réciproque de celle de l'onde, par rapport à une sphère dont le rayon est égal à l'unité. L'on parvient à la même équation si dans l'équation de l'onde

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- \left(a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2\right) + a^2b^2c^2 = 0$$

on remplace les trois constantes a^2, b^2, c^2 par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. De là on tire le théorème suivant:

Les surfaces de deux ondes telles, que les trois axes (vitesses principales) de l'une soient l'inverse des axes de l'autre, sont polaires réciproques, par rapport à une sphère dont le rayon est égal à l'unité.

Tandis que les rayons vecteurs de l'une des deux surfaces représentent la vitesse des différents rayons lumineux, ceux de l'autre sont égaux à l'unité divisée par la vitesse des ondes planes correspondantes. Tandis que les perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à l'une réprésentent la vitesse des ondes planes, celles abaissées sur les fronts de l'autre sont égales à l'unité divisée par la vitesse des rayons correspondants. Ces relations sont tout-à-fait réciproques.*)

*) Je dois conclure des indications données par Mr. Lloyd dans son excellent „*Report on the progress and present state of physical optics*“ (Report of the British Association for the advancement of science, London, 1835) que la surface polaire réciproque de l'onde lumineuse, par rapport à une sphère dont le rayon est égal à l'unité, soit précisément celle que Mr. Hamilton a nommé „*surface of wave slowness.*“ N'ayant aucune connaissance du mémoire de M. Hamilton, je me borne à emprunter du *Report* la construction suivante, dont je n'y trouve que le simple énoncé (S. 388.)

„. . . they lead to a very elegant construction for the reflected or refracted ray, which is, in most cases, more convenient then that of Huyghens. Thus when a ray proceeds from air into any crystal, we have only to construct *the surfaces of wave slowness* belonging to the two media and having their common centre at the point of incidence. Let the incident ray be then produced to meet the sphere, which represents the normal slowness of the wave in air; and from the point of intersection let a perpendicular be drawn to the reflecting or refracting surface. This will cut the surface of slowness of the reflected or refracted waves in general in two points. The lines connecting these points with the centre, will represent the direction and normal slowness of the *waves*; while the perpendiculars

45. *Construction de M. Hamilton.* — La détermination des deux rayons réfractés exige, d'après le numéro (43), qu'on construise les deux plans qui, passant par la ligne droite, perpendiculaire au plan d'incidence en O' (Fig. 65), touchent la surface de l'onde. En général, il sera plus facile à construire les poles de ces plans tangents. On obtient ces poles, en cherchant les points où la ligne droite, polaire réciproque de la perpendiculaire contenue dans les plans tangents, coupe la surface polaire réciproque de l'onde. Prenons pour unité le rayon $OG = OL$ de l'onde sphérique, décrite autour du point d'incidence O. Par rapport à cette sphère, la ligne droite GL, contenue dans le plan d'incidence et passant par les deux points G et L, où le rayon incident RO et le rayon OL coupent la sphère, est polaire réciproque de celle qui, en O', est perpendiculaire au plan d'incidence (numéro 12). De là résulte la construction suivante.

Construisez autour du point d'incidence la surface sphérique de l'onde propagée dans l'air, et, par rapport à cette sphère, la surface polaire réciproque de l'onde, décrite autour du même point dans l'intérieur du crystal. La ligne droite, passant par les deux point G et L où le rayon incident ROG et le rayon réfléchi OL rencontrent la sphère, coupera en général la surface polaire en deux points K et K'. Les fronts des deux ondes réfractées sont perpendiculaires aux rayons vecteurs OK, OK'; leur vitesse (OD, OD') est égale à l'unité divisée par ces rayons vecteurs. Les perpendiculaires, abaissées du centre sur les plans tangents à la surface polaire de l'onde, donnent la direction des deux rayons réfractés, dont la vitesse (OE, OE') est égale à l'unité divisée par ces perpendiculaires.

46. *La surface de l'onde est sa propre polaire réciproque.* Si de l'équation rapportée dans le numéro (44):

$$(b^2c^2A^2 + a^2c^2B^2 + a^2b^2C^2)(A^2 + B^2 + C^2)$$
$$- \left((b^2 + c^2)A^2 + (a^2 + c^2)B^2 + (a^2 + b^2)C^2\right) + 1 = 0,$$

nous éliminons A, B, C au moyen des trois équations suivantes:

$$(1) \qquad b^2c^2A^2 = x^2, \quad a^2c^2B^2 = y^2, \quad a^2b^2C^2 = z^2,$$

l'équation résultante en x, y et z représentera, d'après le numéro 9, la surface polaire de celle de l'onde, par rapport à l'ellipsoïde

from the centre on the tangent planes, at the same points, will represent the direction and slowness of the *rays* themselves."

L'on verra que cette construction revient à celle du numéro suivant, si l'on entend par *slowness* l'unité divisée par la vitesse.

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1, \tag{2}$$

dont les trois demi-axes sont égaux à $\sqrt{(bc)}$, $\sqrt{(ac)}$, $\sqrt{(ab)}$. Mais l'équation obtenue par l'élimination indiquée:

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- \left(a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2\right) + a^2b^2c^2 = 0,$$

n'est autre chose que celle de la surface de l'onde elle même. Ainsi se présente à nous le théorème élégant suivant:

La surface de l'onde est sa propre réciproque, par rapport à un ellipsoïde dont les trois axes sont moyennes proportionelles entre les produits des trois axes du premier ellipsoïde, pris deux à deux.

Ce théorème constitue, quant à l'optique des crystaux, une espèce de duplicité, ou (pour me servir du mot de Mr. Gergonne, sans lui prêter cependant aucune signification métaphysique) de *dualité*: les phénomènes se présentent par couples, de sorte que l'un de chaque couple se déduit de l'autre au moyen de l'ellipsoïde directeur (2). Il répond à chaque point de la surface de l'onde un plan unique qui la touche, et par conséquent à chaque rayon lumineux intérieur, aboutissant à ce point, le front d'une onde intérieure unique, ou encore un rayon extérieur unique perpendiculaire à ce front dans le point de contact. Aux points singuliers de l'onde répondent ses plans singuliers; ce qui se voit directement, les points en question étant déterminés par les équations

$$c\sqrt{(b^2 - a^2)}\,A \pm a\sqrt{(c^2 - b^2)}\,C \pm \sqrt{(c^2 - a^2)} = 0,$$

qui moyennant les équations (1) se transforment dans les suivantes:

$$\sqrt{(b^2 - a^2)}\,x \pm \sqrt{(c^2 - b^2)}\,z \pm b\sqrt{(c^2 - a^2)} = 0,$$

qui sont celles des plans singuliers. Les perpendiculaires aux plans singuliers jouent donc, par rapport aux rayons lumineux sortants, le même rôle que les diamètres passant par les points singuliers, par rapport aux rayons entrants. Les uns et les autres, souvent confondus, se disputent le nom d'axes optiques. Aux cônes tangents dans les quatre points singuliers, répondent les courbes de contact dans les quatre plans singuliers, de même qu'à l'ellipsoïde unique, enveloppée par les quatre cônes, l'ellipsoïde contenant les quatre courbes de contact (numéro 11). Les deux belles expériences de Mr. Mr. Hamilton et Lloyd se déterminent l'un par l'autre au moyen de l'ellipsoïde directeur (2).

47. *Troisième construction des deux rayons réfractés.* Je terminerai ce mémoire par déduire du théorème du numéro précédent une construction nouvelle des rayons réfractés, qui me paraît la plus simple possible parmi celles qui se lient au principe de Huyghens.

Construisez, par rapport à l'ellipsoïde directeur, la ligne droite polaire de celle qui est perpendiculaire au plan d'incidence en O'. Elle coupera la surface de l'onde, décrite autour du point O, en deux points. Les deux lignes droites qui vont du point O aboutir à ces points, seront les deux rayons réfractés; tandis que les deux plans qui, contenant la perpendiculaire en O', passent par ces deux mêmes points, seront les fronts des deux ondes planes correspondantes. Enfin il a été démontré dans ce qui précède, que les deux plans de vibration sont ceux qu'on obtient en conduisant par les rayons lumineux des plans perpendiculaires aux fronts des ondes correspondantes.

Le mémoire qu'on vient de lire fera naître d'autres, ayant pris naissance lui-même dans le beau Mémoire intitulé „*On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxial crystals by the rev. Humphrey Lloyd etc. From the seventeenth vol. of the Transactions of the royal Irish Academy. Dublin, 1837.*“ que je dois à l'extrême bienveillance de l'auteur.

Aucune expérience de physique n'a fait tant d'impression sur mon esprit que celle de la réfraction conique. Un rayon de lumière unique entrant dans un crystal et en sortant sous l'aspect d'un cône lumineux: c'était une chose inouie et sans aucune analogie. Mr. Hamilton l'annonça, en partant de la forme de l'onde, qui avait été déduite par de longs calculs d'une théorie abstraite. J'avoue que j'aurais désespéré de voir confirmé par l'expérience un résultat si extraordinaire, prédit par la seule théorie que le génie de Fresnel avait nouvellement créée. Mais Mr. Lloyd ayant démontré que les expériences étaient en parfaite concordance avec les prédictions de Mr. Hamilton, tout préjugé contre une théorie, si merveilleusement soutenu, a dû disparaître. En même temps la forme générale, indiquée aux ondes lumineuses par Fresnel a dû acquérir une importance toute particulière. C'est seulement dans ce dernier temps que j'ai pu m'en occuper. D'après le *Report*, cité plus haut outre M. Hamilton, un autre géomètre irlandais s'en est également occupé, je n'ai pu me procurer le travail ni de l'un ni de l'autre de ces géomètres. J'ai cité tout ce qui était à ma connaissance.

Note au mémoire précédent.

Dans le mémoire qu'on vient de lire nous sommes parvenus, en partant du principe de Fresnel, à la détermination suivante de l'onde lumineuse.

En un point quelconque m) de la surface du premier ellipsoïde construisez le plan tangent, et abaissez du centre O une perpendiculaire Op sur ce plan. Faites tourner ensuite le triangle MOP dans son propre plan autour du centre O, de manière qu'il décrive un angle de 90 degrés. Dans la position nouvelle ROV du triangle mOp le point R appartiendra à la surface de l'onde lumineuse, tandis que le plan perpendiculaire à OV en V (plan qui, dans la position primitive du triangle, touchait l'ellipsoïde) sera tangent à l'onde en R. Enfin le plan même du triangle sera celui de vibration.*

On sait que Fresnel a donné deux constructions isolées, celle des plans tangents à l'onde qui résulte immédiatement de ses principes, et celle des points de l'onde à laquelle il est parvenu par une sorte de divination. Il jugeait impraticable à effectuer les calculs nécessaires pour lier la deuxième construction à la première. M. Ampère**), en remplissant cette lacune, déduisit le premier, d'une manière rigoureuse, l'équation de l'onde en coordonnées ordinaires. La construction nouvelle, en renfermant à la fois les deux constructions de Fresnel, rend inutiles les calculs immenses de M. Ampère. Nous l'avons fondée sur des considérations de première simplicité; le but de cette Note est de faire voire qu'on peut en bannir la dernière trace de calcul. Il suffit pour cela de remplacer les développements analytiques qui nous ont fourni la solution du problème suivant:

> „Un ellipsoïde et un de ses points M étant donnés, conduire par ce point un plan diamétral tel que l'un des deux axes de l'ellipse d'intersection se confonde avec OM"

par des considérations directes. Rien de plus facile. Les tangentes en M à chacune des ellipses d'intersection dont le plan passe par le rayon vecteur OM, forment en général avec ce rayon des angles différents; dans l'ellipse à construire cet angle est droit. Chaque ligne droite qui, dans le plan qui touche l'ellipsoïde en M, passe par ce point, est du nombre des tangentes en question; il s'agit donc de

*) [Vgl. Fig. 52 auf S. 348. Die Plücker'sche Bezeichnung ist dieser Figur entsprechend geändert worden.]

**) [Vgl. Annales de chim. et de phys. Bd. 39, S. 113, sowie Poggend. Ann. Bd. 30, S. 261.]

choisir parmi ces droites celle qui est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Pour cela abaissons du centre O une perpendiculaire OP sur le plan tangent, joignons les deux points M et P par une ligne droite MP et menons par M, dans le plan tangent, une ligne droite et perpendiculaire à MP. Cette ligne droite sera la tangente demandée. L'on n'aura donc qu'à faire passer un plan par le rayon vecteur OM et la ligne droite que nous venons de construire, pour que ce rayon vecteur coïncide avec un des deux axes de l'ellipse d'intersection.

26.

Aphorismen aus der Geometrie des Raumes.

(Crelle's Journal, Band 24, S. 60—68 und 283—290. 1842.)

I. Die Axen der Flächen zweiter Ordnung.

§ 1.

1. Die Absicht dieses Paragraphen ist, auf möglichst einfache Weise eine für Anwendungen wichtige Aufgabe zu behandeln, welche früher schon verschiedene Lösungen gefunden hat, die Aufgabe nämlich, der Lage und Grösse nach die Axen der Flächen zweiter Ordnung zu bestimmen, wenn diese Flächen durch ihre allgemeine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind. Wir setzen hierbei voraus, dass die Fläche einen Mittelpunkt habe und wollen diesen Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen. Dann können wir der allgemeinen Gleichung die folgende Form geben:

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = C.$$

Wenn C verschwindet, so stellt diese Gleichung insbesondere Kegelflächen dar; abstrahiren wir von diesen, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit $C = 1$ nehmen.

2. Wenn wir nach beliebiger Richtung die Fläche durch parallele Ebenen schneiden, so liegen die Mittelpunkte der Durchschnittscurven in allen diesen Ebenen auf einem Durchmesser der Fläche; und wenn dieser Durchmesser auf den Schnittebenen senkrecht steht, so ist er eine *Axe* der Fläche. Um die Richtung einer solchen Axe zu finden, brauchen wir also bloss eine übrigens beliebige Schnittebene so zu führen, dass ein vom Mittelpunkt der Fläche auf diese Ebene gefälltes Perpendikel den Mittelpunkt der Durchschnittscurve trifft.

Die Gleichung einer solchen Schnittebene sei:

$$(2) \qquad z + by + ax = c;$$

die Gleichungen des Perpendikels sind alsdann:

$$(3) \qquad x = az, \quad y = bz.$$

Wir wollen die analytischen Bedingungen entwickeln, unter welchen dieses Perpendikel den Mittelpunkt der Durchschnittscurve in der Ebene (2) trifft. Um zuvörderst diesen Mittelpunkt zu bestimmen, brauchen wir bloss die Gleichung der Fläche (1) einmal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y zu differentiiren und hierbei, in Folge der Gleichung (2), z als Function von x und y zu betrachten, so dass

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -b.$$

Auf diese Weise ergeben sich unmittelbar die folgenden beiden Gleichungen:

$$(Ax + B''y + B'z) - (B'x + By + A''z)a = 0,$$
$$(B''x + A'y + Bz) - (B'x + By + A''z)b = 0,$$

welche eine gerade Linie darstellen, die die Ebenen (2) in dem gesuchten Mittelpunkte schneidet. *) Mit ihnen *zugleich* müssen also die beiden Gleichungen (3) bestehen, wenn die bezügliche gerade Linie eine Axe der Fläche sein soll. Eliminiren wir hiernach zwischen diesen vier Gleichungen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, so kommt:

$$(4) \qquad \begin{cases} (Aa + B''b + B') - (B'a + Bb + A'')a = 0 \\ (B''a + A'b + B) - (B'a + Bb + A'')b = 0. \end{cases}$$

Durch diese beiden Gleichungen, welche drei Werthepaare für b und a geben, sind die Richtungen der drei Axen gegeben. Von diesen Richtungen ist eine offenbar reell, und es ist leicht zu zeigen, dass die beiden andern es ebenfalls sind. Wenn wir zu diesem Ende annehmen, dass die notorisch reelle Axenrichtung mit der Axe der z zusammenfalle, so müssen die beiden Gleichungen (4) befriedigt werden, wenn a und b zugleich verschwinden. Dies fordert $B = 0$ und $B' = 0$. Dann reduciren sich aber gleichzeitig diese beiden Gleichungen auf den ersten Grad; was anzeigt, dass ein zweites Werthepaar von a und b unendlich wird (wir erkennen auch unmittelbar, dass die Gleichungen (4) befriedigt werden, wenn $\frac{1}{a} = 0$ und $\frac{1}{b} = 0$ ist), und dass also eine zweite Axe in die Ebene xy fällt. Die auf den ersten Grad

*) Wenn wir zwischen den Gleichungen (1) und (2) z eliminiren, so erhalten wir die Projection der Durchschnittscurve auf die Ebene xy. Um das x und y des Mittelpunktes dieser Projection und also auch der Durchschnittscurve selbst zu finden, brauchen wir bekanntlich nur die resultirende Gleichung nach einander in Beziehung auf x und y zu differentiiren. Wir können hierbei auch wie im Texte verfahren und nach der Differentiation aus den Gleichungen (4) vermittelst (2) z eliminiren.

reducirten Gleichungen (4) werden aber nur befriedigt, wenn a und b beide unendlich gross werden oder wenn beide verschwinden. Die dritte Axe kann hiernach also nur entweder ebenfalls in der Ebene xy liegen oder mit der Axe der z zusammenfallen. Den letzteren Fall können wir sogleich als unstatthaft ausschliessen. Um hiernach die Richtung der beiden in der Ebene xy liegenden Axen zu bestimmen, brauchen wir nur aus den beiden Gleichungen (4) die folgende abzuleiten:

$$(Aa + B''b + B')b - (B''a + A'b + B)a = 0,$$

welche durch das Verschwinden von B und B' auf die Gleichung

$$B''\left(\frac{b}{a}\right)^2 - (A' - A)\frac{b}{a} - B'' = 0 \tag{5}$$

sich reducirt und anzeigt, dass diese beiden Axen reell sind und auf einander senkrecht stehen.

Jede Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte hat also drei paarweise genommen auf einander senkrechte reelle Axen.

3. Nachdem wir die Richtungen der drei Axen gefunden haben, ist es leicht ihre Grösse zu bestimmen. Für den Durchschnittspunkt einer Axe und der Fläche bestehen gleichzeitig die drei Gleichungen (1) und (3). Hieraus ergiebt sich, wenn wir zugleich $C = 1$ setzen:

$$(Aa^2 + A'b^2 + A'' + 2Bb + 2B'a + 2B''ab)z^2 = 1$$

und wenn wir das Quadrat der halben Axenlängen durch r^2 und den reciproken Werth desselben durch s^2 bezeichnen,

$$\frac{1}{s^2} = r^2 = (1 + a^2 + b^2)z^2,$$

und hiernach

$$Aa^2 + A'b^2 + A'' + 2Bb + 2B'a + 2B''ab = (1 + a^2 + b^2)s^2 \tag{5'}$$

Addiren wir ferner die Gleichungen (4), nachdem wir die erste derselben mit a, die zweite mit b multiplicirt haben, so kommt:

$$Aa^2 + A'b^2 + Bb + B'a + 2B''ab - (Bb + B'a + A'')(a^2 + b^2) = 0$$

und wenn wir diese Gleichung von der vorhergehenden abziehen und zugleich den Factor $(1 + a^2 + b^2)$ weglassen:

$$B'a + Bb + (A'' - s^2) = 0. \tag{6}$$

Auf gleiche Weise oder auch durch blosse Buchstabenvertauschung ergiebt sich:

$$\begin{cases} B''a + B + (A' - s^2)b = 0 \\ B' + B''b + (A - s^2)a = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Endlich erhalten wir, wenn wir a und b zwischen den drei letzten Gleichungen eliminiren:

$$(8)\qquad \begin{cases} (A-s^2)(A'-s^2)(A''-s^2) - B^2(A-s^2) \\ -B'^2(A'-s^2) - B''^2(A''-s^2) + 2BB'B'' = 0, \end{cases}$$

oder auch, wenn wir in Beziehung auf s^2 ordnen:

$$(9)\qquad \begin{cases} s^6 - (A+A'+A'')s^4 \\ \quad + [(AA'-B''^2) + (AA''-B'^2) + (A'A''-B^2)]s^2 \\ \quad - [AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''] = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung giebt drei Werthe für s^2, den drei Werthepaaren von a und b entsprechend, welche, wie diese, in Folge der Gleichungen (6) und (7) alle drei reell sind. Hiernach bestimmen die Zeichen der Werthe der drei Coefficienten dieser Gleichung unmittelbar, ob die Werthe von s^2 alle drei positiv, oder alle drei negativ oder zwei positiv und einer negativ, oder endlich einer positiv und zwei negativ sind. Diesem entsprechend ist dann die Fläche ein Ellipsoïd, eine imaginäre Fläche, ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloïd.

4. Das letzte, von s^2 unabhängige Glied in der Gleichung (9) ist dem reciproken Werthe des Produktes der Quadrate der drei halben Axen der Fläche gleich. Ist diese ein Cylinder, so verschwindet dieses Glied, und dann hat die Gleichung:

$$s^4 - (A+A'+A'')s^2 + [(AA'-B''^2) + (AA''-B'^2)(A'A''-B^2)] = 0$$

die reciproken Werthe der Quadrate der halben Axen derjenigen Schnitte, welche senkrecht gegen seine Seiten geführt werden, zu ihren Wurzeln. Steht der Cylinder auf einer der drei Coordinatenebenen, etwa der Ebene xy senkrecht, so verschwinden aus der allgemeinen Gleichung die drei Coefficienten A'', B und B', und die letzte Gleichung reducirt sich auf folgende:

$$(10)\qquad s^4 - (A+A')s^2 + (AA'-B''^2) = 0,$$

welche nun noch die reciproken Werthe der beiden halben Axen der Basis des Cylinders, oder, was dasselbe ist, der durch die Gleichung

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 1$$

bei Abstraction von der dritten Dimension dargestellten Curve zweiter Ordnung zu Wurzeln hat. Für dieselbe Curve ist die Axenrichtung durch die Gleichung (5) gegeben.

5. Wenn wir derselben Fläche nach einander verschiedene Lagen gegen die Coordinatenaxen geben, indem wir diese um ihren Anfangspunkt irgendwie drehen, so erhalten die Coefficienten ihrer Gleichung (1) verschiedene Werthe, während die Gleichung (9) unverändert dieselbe bleibt. A, A', A'' bedeuten die Quadrate der reciproken Werthe

der jedesmaligen Halbdurchmesser, welche in die drei Coordinatenaxen fallen. Ihre Summe ist also constant.

Wenn man ein System dreier auf einander senkrechter, im Mittelpunkt einer Fläche zweiter Ordnung sich schneidender gerader Linien um den Mittelpunkt beliebig sich drehen lässt, so ist für alle Lagen die Quadratsumme der reciproken Werthe der in die jedesmaligen drei geraden Linien fallenden Halbdurchmesser der Fläche dieselbe.

Nach der Gleichung (10) bedeutet $(AA' - B''^2)$ den reciproken Werth des Produkts der Quadrate der beiden halben Axen der Durchschnittscurve, also (für den Fall des Ellipsoïdes), wenn wir noch durch π^2 dividiren, den reciproken Werth des Quadrats der Fläche dieser Curve. Aehnliche Bedeutung haben die Ausdrücke $(AA'' - B'^2)$ und $(A'A'' - B^2)$, und somit giebt die Betrachtung des zweiten Coefficienten in der Gleichung (9) den folgenden Satz:

Wenn man ein System dreier auf einander senkrechter und im Mittelpunkte eines Ellipsoïds sich schneidender Ebenen um diesen Mittelpunkt beliebig sich drehen lässt, so ist für alle Lagen die Quadratsumme der reciproken Werthe des Flächeninhalts der drei Durchschnittscurven constant.

Für den Fall eines geraden Cylinders können wir für die drei schneidenden Ebenen irgend drei auf einander senkrecht stehende nehmen, die constante Summe ist alsdann dem Quadrate des reciproken Werthes der Fläche seiner Basis gleich.

§ 2.

6. Mit derselben Leichtigkeit, wie wir eine Fläche zweiter Ordnung durch ihre Punkte bestimmen, indem wir sie auf gewöhnliche Weise durch eine Gleichung ausdrücken, können wir dieselbe auch durch die sie berührenden Ebenen bestimmen, indem wir sie durch die folgende Gleichung ausdrücken:

(1) $$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2Buv + 2B'tv + 2B''tu = w^2.$$ *)

*) Vergl. Note sur une théorie nouvelle des surfaces. Crelle's Journal Band IX, pag. 124. [S. 224 dieser Ausgabe.] Eine Ebene, welche durch die gewöhnliche Gleichung:

$$tx + uy + vz = w$$

dargestellt wird, ist durch die vier Constanten t, u, v, w (von denen wir jede beliebige gleich Eins setzen können, und welche wir Coordinaten der Ebene nennen) bestimmt. Ist zwischen diesen vier Coordinaten bloss eine homogene Gleichung gegeben, so entsprechen dieser unendlich viele Ebenen, welche eine bestimmte Fläche umhüllen. Ist die homogene Gleichung bloss vom ersten Grade, und folgende

$$x't + y'u + z'v = w,$$

Dies ist die allgemeine Gleichung von Flächen, welche einen Mittelpunkt haben; und dieser ist hier zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen.

Die Absicht dieses zweiten Paragraphen ist, nach der neuen analytischen Bezeichnungsweise wiederum die Lage und die Grösse der Axen zu bestimmen; was hier mit noch grösserer Leichtigkeit geschehen kann. —

7. Wir wollen dabei von der Anschauung ausgehen, dass, wenn wir eine Schnittebene durch den Mittelpunkt legen, der Pol dieser Ebene nach bestimmter Richtung unendlich weit liege, und dass, wenn diese Richtung auf der Schnittebene senkrecht steht, dieselbe ein *Hauptschnitt* der Fläche zweiter Ordnung sei.

Die Gleichung der Schnittebene in gewöhnlichen Coordinaten sei

$$t'x + u'y + v'z = 0; \tag{2}$$

wonach die beiden Gleichungen einer auf derselben im Anfangspunkte senkrechten geraden Linie die folgenden sind:

$$x = \frac{t'}{v'}z, \quad y = \frac{u'}{v'}z. \tag{3}$$

Für die Gleichung des Poles der Schnittebene, deren Coordinaten t', u', v', 0 sind, erhalten wir unmittelbar:

$$\begin{cases} (At' + B''u' + B'v')t + (B''t' + A'u' + Bv')u \\ \qquad + (B't' + Bu' + A''v')v = 0). \text{*)} \end{cases} \tag{4}$$

Der Pol liegt unendlich weit, weil w fehlt. Die Richtung, nach welcher er unendlich weit liegt, muss also mit der Richtung der Linie (3) zusammenfallen, wenn (2) ein Hauptsschnitt der Fläche sein soll. Dies geschieht, wenn

so umhüllen alle Ebenen einen *Punkt*, dessen Coordinaten x', y' und z' sind. Fehlt w, so liegt der Punkt in der Richtung

$$x = \frac{x'}{z'}z, \qquad y = \frac{y'}{z'}z$$

unendlich weit. —

*) Wenn wir nämlich der Kürze wegen die Gleichung (1) durch $\Omega = 0$ darstellen, so ist die Gleichung des Poles einer gegebenen Ebene, deren Coordinaten t', u', v', w' sind,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}t' + \frac{\partial\Omega}{\partial u}u' + \frac{\partial\Omega}{\partial v}v' + \frac{\partial\Omega}{\partial w}w' = 0;$$

eine Gleichung, die sich nicht ändert, wenn wir die Constanten t', u', v' und w' bezüglich mit den Variabeln t, u, v, w vertauschen. Das letzte Glied fällt aus, wenn $w' = 0$ ist.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{At' + B''u' + B'v'}{B't' + Bu' + A''v'} = \dfrac{t'}{v'}, \\ \dfrac{B''t' + A'u' + Bv'}{B't' + Bu' + A''v'} = \dfrac{u'}{v'} \end{cases}$$

ist. Schaffen wir aus diesen Gleichungen die Nenner fort, und setzen überdies $v' = 1$, so kommt

$$(6)\qquad \begin{cases} At' + B''u' + B' - (B't' + Bu' + A'')t' = 0, \\ B''t' + A'u' + B - (B't' + Bu' + A'')u' = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind drei Werthepaare für t' und u' und dadurch die drei Hauptschnitte der Fläche bestimmt. Diese, und also auch die drei Axen, sind reell, weil die vorstehenden Gleichungen genau dieselben Coefficienten haben wie die Gleichungen (4) der zweiten Nummer.

8. Wenn wir, wie in der Note zur vorigen Nummer, die Gleichung der Fläche durch

$$\Omega = 0$$

darstellen, so können wir die Gleichungen (5) durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} t = \frac{\partial \Omega}{\partial t} v, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} u = \frac{\partial \Omega}{\partial u} v.$$

Die durch diese beiden Gleichungen gegebenen Werthe von $\frac{t}{v}$ und $\frac{u}{v}$ bestimmen die Lage der drei Hauptschnitte.

9. Wenn wir in der Gleichung der Fläche

$$t = t', \quad u = u', \quad v = 1$$

setzen, so ergiebt sich

$$At'^2 + A'u'^2 + A'' + 2Bu' + 2B't' + 2B''t'u' = w^2,$$

wo alsdann w dasjenige Segment bedeutet, welches eine mit einem Hauptschnitte parallele Tangentialebene der Fläche von der Axe der z abschneidet. Der senkrechte Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten von dieser Tangentialebene ist eine halbe Axe der Fläche. Bezeichnen wir die Länge derselben durch r, so ergiebt sich

$$w^2 = (1 + t'^2 + u'^2)\, r^2,$$

und mithin

$$At'^2 + A'u'^2 + A'' + 2Bu' + 2B't' + 2B''t'u' = (1 + t'^2 + u'^2)\, r^2.$$

Diese Gleichung hat wiederum genau dieselbe Form, wie die Gleichung (5′) der dritten Nummer. Wenn wir sie daher mit den Gleichungen (6) zusammenstellen, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} B't' + Bu' + (A'' - r^2) = 0, \\ B''t' + B + (A' - r^2)u' = 0, \\ B' + B''u' + (A - r^2)t' = 0, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} (A - r^2)(A' - r^2)(A'' - r^2) - B^2(A - r^2) - B'^2(A' - r^2) \\ \qquad - B''^2(A'' - r^2) + 2BB'B'' = 0, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} r^6 - (A + A' + A'')r^4 \\ \quad + [(AA' - B''^2) + (AA'' - B'^2) + (A'A'' - B^2)]r^2 \\ \quad - [AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'']) = 0. \end{cases}$$

die wir unmittelbar hinschreiben können, weil auch sie dieselbe Form haben müssen, wie die entsprechenden Gleichungen der dritten Nummer.

Die Gleichungen (7) können wir, analog wie in der 8. Nummer, indem wir die partiellen Differentialcoefficienten auf die Coordinaten der Hauptschnitte beziehen, auch in folgender Form schreiben:

$$r^2 = \tfrac{1}{2}\frac{1}{v'}\frac{\partial \Omega}{\partial v'} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{u'}\frac{\partial \Omega}{\partial u'} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{t'}\frac{\partial \Omega'}{\partial t}.$$

10. An die vorstehende Gleichung (9) knüpfen sich ähnliche Bemerkungen, wie an die Gleichung (9) in der 4. Nummer. Die neue Gleichung hat genau dieselben Coefficienten. Ihre drei Wurzeln sind also reell; ob ihre Werthe positiv oder negativ und demnach die drei Axen der Fläche bezüglich reell oder imaginär sind, hängt von denselben Bedingungen ab wie früher. Wir erhalten also auch, gleichviel ob wir die Flächen zweiter Ordnung durch die Gleichung (1) der ersten oder durch die Gleichung (1) der sechsten Nummer darstellen, genau dieselben Bedingungen zwischen den Coefficienten, um die verschiedenen Hauptarten von Flächen dieser Ordnung zu unterscheiden. Wenn insbesondere das constante Glied in der vorstehenden Gleichung (9) verschwindet, so geht die Fläche, indem eine Axe derselben (die früher bei dieser Voraussetzung unendlich wurde) verschwindet, in eine *ebene Curve* über, welche insbesondere in der Ebene der xy liegt, wenn aus der allgemeinen Gleichung die Coefficienten A'', B und B' ganz verschwinden. Diese Gleichung geht alsdann in die folgende über:

$$(10)\qquad At^2 + A'u^2 + 2B''tu = 1,$$

und zur Bestimmung der beiden halben Axen der bezüglichen Curve ergiebt sich:

$$(11)\qquad r^4 - (A + A')r^2 + (AA' - B''^2) = 0.$$

11. Wenn wir der Fläche nach einander verschiedene Lagen geben, so ändern sich die Coefficienten ihrer Gleichung; diese Aende-

rung aber muss von der Art sein, dass die drei Coefficienten in der Gleichung (9) *unverändert* bleiben. Es bedeuten aber A, A', A'' in der allgemeinen Gleichung die Quadrate derjenigen Perpendikel, welche vom Mittelpunkte der Fläche aus auf die drei den jedesmaligen Coordinatenebenen parallelen Berührungsebenen gefällt werden können. Die Summe dieser Quadrate und also auch die Entfernung des gemeinsamen Durchschnittspunktes der drei Tangentialebenen vom Mittelpunkte ist constant.

Der geometrische Ort für körperliche Ecken, welche von drei beliebigen, paarweise auf einander senkrechten und eine gegebene Fläche (und insbesondere auch Curve) zweiter Ordnung berührenden Ebenen gebildet werden, ist eine Kugel, für welche das Quadrat des Radius der Quadratsumme der drei halben Axen gleich ist.

Es bedeutet ferner, in Folge der Gleichungen (11), der Ausdruck $(AA' - B''^2)$ das Produkt der Quadrate der beiden halben Axen der Curve (10), welche die Basis des der Fläche umschriebenen, auf der Ebene xy senkrechten Cylinders, oder, was dasselbe ist, die Projection des Ellipsoïds auf diese Ebene ist. Das Quadrat dieser Projection wird also durch $\pi^2(AA' - B''^2)$ dargestellt.

Ebenso bedeuten $\pi^2(AA'' - B'^2)$ und $\pi^2(A'A'' - B^2)$ die Projectionen des Ellipsoïds auf die Ebenen xz und yz. Hiernach ergiebt sich, wenn wir den Coefficienten von r^2 in der Gleichung (9) betrachten, der folgende Satz:

Die Quadratsumme der drei Projectionsflächen eines gegebenen Ellipsoïds auf irgend drei auf einander senkrechten Ebenen ist constant.

§ 3.*)

1. Nachdem wir im ersten Paragraphen die Richtung und Grösse der Axen der durch die Gleichung:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 1$$

*) Erst nachdem bereits die beiden ersten Paragraphen dieser Aphorismen unter der Presse waren, wurde Moth's deutsche Bearbeitung von Cauchy's lithographirtem Mémoire „Ueber die Theorie des Lichtes" versandt. Hier wird in Abtheilung II „Ueber Flächen der zweiten Ordnung" derselbe Gegenstand, aber, was zu erwarten stand, auf anderem Wege behandelt. Aus bloss persönlicher Veranlassung, die durch das Erscheinen der angeführten Schrift weggefallen ist, sind jene beiden Paragraphen für den Druck ausgewählt worden.

Auf dem jetzigen Standpunkte der Wissenschaft ist insbesondere eine neue Behandlung der Flächen zweiter Ordnung zur Reife gediehen und gleichzeitige Bearbeiter müssen sich nothwendig in den Resultaten begegnen. Ich erlaube mir hier bloss zu erwähnen, dass ich damit beschäftigt bin, eine systematische analytische Behandlung der krummen Oberflächen für den Druck vorzubereiten.

dargestellten Fläche zweiter Ordnung bestimmt haben, ist es leicht, die Bedingungen aufzustellen, unter welchen diese Fläche eine *Umdrehungsfläche* ist. Wir brauchen zu diesem Ende nur auszudrücken, dass zwei der drei Axen einander gleich sind (ein Weg, den Herr Cauchy einschlägt), oder auch, wie wir verfahren wollen, dass die Richtung zweier der drei Axen unbestimmt wird.

2. Indem wir eine der drei Axen durch folgende Gleichungen darstellen:

$$x = az, \quad y = bz,$$

ist diese Richtung durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(1) \qquad \begin{cases} (B'a + Bb + A'')a - (Aa + B''b + B') = 0, \\ (B'a + Bb + A'')b - (B''a + A'b + B) = 0. \end{cases}$$

Das System dieser beiden Gleichungen giebt immer drei reelle Wurzelpaare (§ 1). Wenn aber diese Gleichungen beide einen gemeinschaftlichen Factor $(a + gb + h)$ haben, in welchem Falle sie die folgende Form mit vier unbestimmten Coefficienten g, h, m, n annehmen müssen:

$$B'(a + gb + h)(a - m) = 0,$$
$$B'(a + gb + h)(b - n) = 0,$$

so ergiebt sich eine einzige bestimmte Axenrichtung (die Richtung der Rotationsaxe) durch die Gleichungen

$$a = m, \quad b = n,$$

während die Richtung der beiden andern (auf einander senkrechten)

Mit den beiden ersten Paragraphen sind gleichzeitig zwei schöne Abhandlungen von Herrn Dr. Hesse in Königsberg erschienen (Crelle's Journal, Bd. 24, Heft 1, S. 36 und 40). Was die erste dieser beiden Abhandlungen betrifft, so bemerke ich, dass ich in einem älteren Mémoire, welches damals, als die Gergonne'schen Annales aufhörten, in den Händen ihres Herausgebers geblieben ist, unter Anderm die Aufgabe, „eine Fläche zweiter Ordnung zu beschreiben, welche durch die reelle oder imaginäre Durchschnittscurve zweier gegebenen Flächen (durch acht gegebene Punkte), und überdies durch einen neuen gegebenen Punkt geht oder eine gegebene Ebene berührt", höchst einfach gelöst habe. Die Resultate der zweiten Abhandlung und viele andere wird man in einem von mir bereits redigirten Paragraphen meiner neuen Arbeit ohne analytische Rechnung abgeleitet finden aus der Gleichung

$$tu = vw,$$

welche, wenn t, u, v, w lineare Functionen von x, y, z bedeuten, die allgemeine Gleichung der *geradlinigen* Flächen der zweiten Ordnung (des hyperbolischen Hyperboloïds und des hyperbolischen Paraboloïds) ist. Zugleich knüpft sich an die letzte Form, die, wenn wir von der dritten Coordinate z abstrahiren, einen Kegelschnitt darstellt, ein Uebertragungsprincip.

Axen jede beliebige sein kann, vorausgesetzt nur, dass die entsprechenden a und b die folgende Gleichung befriedigen:

$$a + gb + h = 0.$$

Den obigen Formbestimmungen zu Folge erhalten wir die nachstehende identische Gleichung:

$$[(B'a + Bb + A'')a - (Aa + B''b + B')](b - n) =$$
$$[(B'a + Bb + A'')b - (B''a + A'b + B)](a - m),$$

oder, vereinfacht:

$$(B'a + Bb + A'')an + (Aa + B''b + B')(b - n) =$$
$$(B'a + Bb + A'')bm + (B''a + A'b + B)(a - m);$$

und diese identische Gleichung löst sich in die nachfolgenden sechs Gleichungen auf:

$$B'n = B'', \quad Bm = B'', \quad B'n = Bm, \tag{2}$$

$$\begin{cases} Bn + A = B'm + A', \\ (A'' - A)n = B - B''m, \\ B' - B''n = (A'' - A')m. \end{cases} \tag{3}$$

Die drei Gleichungen (2) geben übereinstimmend:

$$m = \frac{B''}{B}, \quad n = \frac{B''}{B'}$$

und hiernach ist, indem wir diese Werthe von m und n für a und b substituiren, die Rotationsaxe durch folgende Gleichungen gegeben:

$$Bx = B'y = B''z.$$

Die drei Gleichungen (3) kann man auf nachstehende Weise schreiben:

$$A - B'm = A' - Bn,$$
$$A - B''\frac{m}{n} = A'' - B\frac{1}{n},$$
$$A' - B''\frac{n}{m} = A'' - B'\frac{1}{m},$$

und dann, indem man für m und n ihre Werthe setzt, in folgenden Ausdruck zusammenfassen:

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

welcher somit die gesuchten beiden Bedingungen, unter welchen die gegebene Fläche eine Umdrehungsfläche ist, enthält.

3. Nachdem die Gleichungen der Umdrehungsaxe gefunden sind, erhalten wir für die Ebene der beiden anderen Axen (die Aequatorial-

ebene), weil diese Ebene auf jener Axe senkrecht steht, folgende Gleichung:

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch dann, wenn man etwa die erste der Gleichungen (1) durch $a - m$ dividirt und dann für a und b ihre Werthe $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ setzt. Zunächst ergiebt sich als Quotient des ersten Theils dieser Gleichung durch $a - m$:

$$B'a + Bb,$$

und als Rest:

$$(A'' - A + B'm)a + (Bm - B'')b - B',$$

der sich auf

$$x\,\frac{BB'}{B''} - B' = \frac{BB'}{B''}\,(a - m)$$

reducirt. Der vollständige Quotient ist also:

$$B'a + Bb + \frac{BB'}{B''} = B'(a + gb + h)$$

und führt, gleich Null gesetzt, zu der vorstehenden Gleichung.

4. Wenn wir in die Gleichungen (6) und (7) des ersten Paragraphen für a und b diejenigen Werthe setzen, welche sich auf die Richtung der Rotationsaxe beziehen, so erhalten wir folgende dreifache Bestimmung von s, dem reciproken Werthe dieser halben Axe:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + A'' = s^2, \\ \frac{B'B''}{B} + \frac{BB'}{B''} + A' = s^2, \\ \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''} + A = s^2. \end{cases}$$

Addirt man, so kommt

$$2\left(\frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) + A + A' + A'' = 3s^2.$$

Da ferner, indem wir den reciproken Werth einer der beiden andern unter einander gleichen Halbaxen durch σ bezeichnen,

$$A + A' + A'' = s^2 + 2\sigma^2$$

ist, so findet sich, wenn wir abziehen und den gemeinschaftlichen Factor 2 weglassen,

$$\frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''} = s^2 - \sigma^2.$$

Eliminirt man endlich aus dieser Gleichung s^2 nach einander durch jede der drei Gleichungen (4), so kommt

$$\sigma^2 = A'' - \frac{BB'}{B''} = A' - \frac{BB''}{B'} = A - \frac{B'B''}{B}.$$

5. Die Bedingungsgleichungen, dass die gegebene Fläche eine Umdrehungsfläche sei, bleiben ganz dieselben, wenn man diese Fläche, statt durch die an die Spitze dieser Nummer gestellte Gleichung, durch die folgende zwischen Plancoordinaten (§ 2)

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2Buv + 2B'tv + 2B''tu = 1$$

darstellt. Es bedarf dieses keiner weiteren Erörterung, weil dieselbe Gleichung (9) einmal (§ 1) die reciproken Werthe der halben Axen, das andere mal diese Werthe selbst zu Wurzeln hat. Man erhält die Bestimmung der Länge der halben Rotationsaxe und der beiden halben gleichen Axen, wenn man in den vorstehenden Gleichungen (4) und (5) unter s und σ diese Längen selbst und nicht, wie oben, die reciproken Werthe derselben versteht.

II. Allgemeine Methode, eine homogene Function beliebig vieler Veränderlichen in eine andere zu verwandeln, welche nur die Quadrate der Veränderlichen enthält.

§ 4.

Die Hauptaufgabe bei der Discussion der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grade zwischen zwei und drei Veränderlichen besteht darin, aus dieser Gleichung diejenigen Glieder wegzuschaffen, welche die Produkte dieser Veränderlichen enthalten. Wir wollen diese Aufgabe auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen ausdehnen und können bei der Symmetrie der Entwickelungen die Aufgabe als gelöst betrachten, nachdem wir den Fall der allgemeinen Gleichung zwischen vier, oder der allgemeinen homogenen Gleichung zwischen fünf Veränderlichen behandelt haben.

Es sei demnach

$$\Omega = 0$$

die gegebene Gleichung und

$$\Omega \equiv Ap^2 + A_1q^2 + A_2r^2 + A_3s^2 + A_4t^2 + 2B_{01}pq + 2B_{02}pr + 2B_{03}ps + 2B_{04}pt + 2B_{12}qr + 2B_{13}qs + 2B_{14}qt + 2B_{23}rs + 2B_{24}rt + 2B_{34}st,$$

dann erhält man, wenn man durch die Gleichung:

$$p = P - a_1q - a_2r - a_3s - a_4t$$

P statt p einführt, die vier Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 durch die Gleichungen:

$$a_1 = \frac{B_{01}}{A}, \quad a_2 = \frac{B_{02}}{A}, \quad a_3 = \frac{B_{03}}{A}, \quad a_4 = \frac{B_{04}}{A}$$

bestimmt, und zugleich der Kürze wegen

$$AA_1 - B_{01}^2 \equiv \Xi_1, \quad AA_2 - B_{02}^2 \equiv \Xi_2,$$
$$AA_3 - B_{03}^2 \equiv \Xi_3, \quad AA_4 - B_{04}^2 \equiv \Xi_4,$$
$$AB_{12} - B_{01}B_{02} \equiv C_{12}, \quad AB_{13} - B_{01}B_{03} \equiv C_{13},$$
$$AB_{14} - B_{01}B_{04} \equiv C_{14},$$
$$AB_{23} - B_{02}B_{03} \equiv C_{23}, \quad AB_{24} - B_{02}B_{04} \equiv C_{24},$$
$$AB_{34} - B_{03}B_{04} \equiv C_{34}$$

setzt, folgende identische Gleichung:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{1}{A}[\Xi_1 q^2 + \Xi_2 r^2 + \Xi_3 s^2 + \Xi_4 t^2$$
$$+ 2C_{12}qr + 2C_{13}qs + 2C_{14}qt + 2C_{23}rs + 2C_{24}rt + 2C_{34}st].$$

Indem wir weiter durch die folgende Gleichung:

$$q = Q - b_2 r - b_3 s - b_4 t$$

Q statt q einführen, die drei Coefficienten b_2, b_3, b_4 durch die Gleichungen

$$b_2 = \frac{C_{12}}{\Xi_1}, \quad b_3 = \frac{C_{13}}{\Xi_1}, \quad b_4 = \frac{C_{14}}{\Xi_1},$$

bestimmen und zugleich der Kürze wegen

$$\Xi_1\Xi_2 - C_{12}^2 \equiv A\Theta_2, \quad \Xi_1\Xi_3 - C_{13}^2 \equiv A\Theta_3, \quad \Xi_1\Xi_4 - C_{14}^2 \equiv A\Theta_4,$$
$$\Xi_1 C_{23} - C_{12}C_{13} \equiv AD_{23}, \quad \Xi_1 C_{24} - C_{12}C_{14} \equiv AD_{14}, \quad \Xi_1 C_{34} - C_{13}C_{14} \equiv AD_{34}$$

setzen, kommt:

$$\Omega = AP^2 + \frac{\Xi_1}{A}Q^2 + \frac{1}{\Xi_1}[\Theta_2 r^2 + \Theta_3 s^2 + \Theta_4 t^2$$
$$+ 2D_{23}rs + 2D_{24}rt + 2D_{34}st].$$

Indem wir ferner durch die folgende Gleichung:

$$r = R - c_3 s - c_4 t,$$

R statt r einführen, die beiden Coefficienten c_3 und c_4 durch die Gleichungen

$$c_3 = \frac{D_{23}}{\Theta_2}, \quad c_4 = \frac{D_{24}}{\Theta_2}$$

bestimmen und zugleich der Kürze wegen

$$\Theta_2\Theta_3 - D_{23}^2 \equiv \Xi_1 \Phi_3, \quad \Theta_2\Theta_4 - D_{24}^2 \equiv \Xi_1 \Phi_4,$$
$$\Theta_2 D_{34} - D_{23}D_{34} \equiv \Xi_1 E_{34}$$

setzen, ergiebt sich

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_1}{A}Q^2 + \frac{\Theta_2}{\Xi_1}R^2 + \frac{1}{\Theta_2}[\Phi_3 s + \Phi_4 t + 2E_{34}st].$$

Indem wir endlich durch die folgenden Gleichungen:

$$s = S - d_4 t, \quad t = T$$

S statt s einführen und T mit t vertauschen, den Coefficienten d_4 durch die Gleichung

$$d_4 = \frac{E_{34}}{\Phi_3}$$

bestimmen und der Kürze wegen

$$\Theta_3 \Theta_4 - E_{34}^2 \equiv \Theta_2 \Psi_4$$

setzen, gelangen wir zu der identischen Gleichung:

$$(1) \qquad \Omega \equiv A P^2 + \frac{\Xi_1}{A} Q^2 + \frac{\Theta_2}{\Xi_1} R^2 + \frac{\Phi_3}{\Theta_2} S^2 + \frac{\Psi_4}{\Phi_3} T^2,$$

und somit ist unsere Aufgabe vollständig gelöst.

3. Wenn man die verschiedenen Verwandlungsformeln zusammenstellt, so kommt:

$$(2) \qquad \begin{cases} T = t, \\ S = s + d_4 t, \\ R = r + c_3 s + c_4 t, \\ Q = q + b_2 r + b_3 s + b_4 t, \\ P = p + a_1 q + a_2 r + a_3 s + a_4 t. \end{cases}$$

Um umgekehrt die ursprünglichen Veränderlichen durch die neuen auszudrücken, erhalten wir Gleichungen von derselben Form, nämlich:

$$(3) \qquad \begin{cases} t = T, \\ s = S + \delta_4 T, \\ r = R + \gamma_3 S + \gamma_4 T, \\ q = Q + \beta_2 R + \beta_3 S + \beta_4 T, \\ p = P + \alpha_1 Q + \alpha_2 R + \alpha_3 S + \alpha_4 T. \end{cases}$$

Die 10 Coefficienten in den Formeln (2) und die 10 Coefficienten in den Formeln (3) bestimmen sich gegenseitig ganz auf dieselbe Weise. Wir finden (und können hierbei überall die sich entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabets gegenseitig vertauschen) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta_4 &= -d_4, \\ \gamma_3 &= -c_3, \\ \gamma_4 &= -(c_4 - c_3 d_4), \\ \beta_2 &= -b_2, \\ \beta_3 &= -(b_3 - b_2 c_3), \\ \beta_4 &= -(b_4 - b_3 d_4 - b_2 c_4 + b_2 c_3 d_4), \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = -a_1,$$
$$\alpha_2 = -(a_2 - a_1 b_2),$$
$$\alpha_3 = -(a_3 - a_2 c_3 - a_1 b_3 + a_1 b_2 c_3),$$
$$\alpha_4 = -(a_4 - a_3 d_4 - a_2 c_4 - a_1 b_4 + a_2 c_3 d_4 + a_1 b_3 d_4 + a_1 b_2 c_4 - a_1 b_2 c_3 d_4).$$

4. Die 10 Coefficienten der Verwandlungsformeln (3) lassen sich auch unmittelbar bestimmen. Der Coefficient δ_4 oder $(-d_4)$ ist bereits in der zweiten Nummer durch die Coefficienten der ursprünglichen Function ausgedrückt worden. Ohne Schwierigkeit erkennen wir aber aus der Form der Verwandlungsformeln, dass wir hiernach γ_4, β_4, α_4 sogleich erhalten, wenn wir in dem Ausdrucke für δ_4, einer Vertauschung von s mit r, q, p entsprechend, in den Marken der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung 3 bezüglich mit 2, 1, 0 vertauschen. Ebenso ergiebt sich durch Vertauschung der Marke 2 mit 1 und 0 aus dem bekannten Werthe von γ_3 oder $(-c_3)$ der Werth von β_3 und α_3, ferner durch Vertauschung der Marken 1 und 0 aus dem bekannten Werthe von β_2 oder $(-b_2)$ der Werth von α_2, und endlich ist $\alpha_1 = -a_1$.

5. Es giebt noch eine *zweite* Verwandlungsweise, die in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung desjenigen Verfahrens anzusehen ist, nach welchem bei der gewöhnlichen Discussion der Flächen und Linien zweiter Ordnung der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt verlegt wird. Während die Verfahrungsweise der 2. Nummer, die ihren Keim schon in meiner Discussion der Linien zweiter Classe*) hat, zunächst die 10 Coefficienten der Formeln (2) giebt, führt die zweite Verfahrungsweise, die ich an einem andern Orte ausführlicher entwickeln werde**), unmittelbar zur Bestimmung der 10 Coefficienten der Formeln (3); und zwar folgendergestalt.

Wenn man die Function Ω, nachdem man in ihr $t = 1$ gesetzt hat, zur Unterscheidung Ω_1 nennt, so ergeben die vier linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial s} = 0$$

für die vier Veränderlichen p, q, r, s im Allgemeinen vollkommen bestimmte Werthe. Diese Werthe sind bezüglich α_4, β_4, γ_4, δ_4.

Bezeichnen wir ferner die Function Ω, nachdem wir in ihr $t = 0$, $s = 1$ gesetzt haben, durch Ω_2, so sind die Werthe, welche die drei linearen Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} = 0$$

*) Analytisch-geometrische Entwicklungen, Band II, Abschnitt 2, § 1

**) [System der Geometrie des Raumes, 1846; S. 50.]

für die drei Veränderlichen p, q, r geben, zugleich die Werthe von α_3, β_3, γ_3.

Setzen wir $t = 0$, $s = 0$, $r = 1$ und bezeichnen, was alsdann aus Ω wird, durch Ω_3, so geben die beiden linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial q} = 0$$

für p und q zwei solche Werthe, welche zugleich die Werthe von α_2 und β_2 sind.

Nennen wir endlich das, was aus der ursprünglichen Function wird, wenn wir $t = 0$, $s = 0$, $r = 0$, $q = 1$ setzen, Ω_4, so giebt die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega_4}{\partial p} = 0$$

für p den Werth der letzten Constanten α_1.

Die Resultate dieser Nummer bestätigen die Behauptungen der vorigen. Umgekehrt sind wir in Folge von diesen der weitläufigen Eliminationen, welche namentlich die directe Bestimmung der vier Constanten α_4, β_4, γ_4, δ_4 erfordert, überhoben.

Die vorstehenden analytischen Entwicklungen eines in verschiedener Gestalt vielfach behandelten Gegenstandes scheinen hiernach, was Symmetrie und Einfachheit betrifft, nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen.

27.

Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung.

(Crelle's Journal, Band 34, S. 329—336. 1847.)

Eine Reihe von eleganten Sätzen über Curven dritter Ordnung, die Herr Steiner (im 32. Bande dieses Journals, welchen ich in den letzten Tagen erhielt) ohne Andeutung eines Beweises mittheilt, veranlasst mich, hier darauf hinzuweisen, wie solche Resultate, denen sich leicht noch andere von derselben Art hinzufügen lassen, entweder die blosse Interpretation einer Gleichungsform sind, die wir unmittelbar hinschreiben können, oder doch wenigstens an eine solche Interpretation sich unmittelbar anknüpfen lassen. Ich habe hier keine andere Absicht, als auf diejenige Methode, die zur systematischen Grundlage der analytischen Geometrie auszubilden, bisher das Ziel meiner mathematischen Bestrebungen war, aufmerksam zu machen; und dazu mag hier ein einzelnes Beispiel genügen.

Indem wir durch Ω_3 und Ω_2 zwei Functionen dritten und zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen, welche gewöhnliche Parallelcoordinaten bedeuten mögen, durch die lateinischen Buchstaben lineare Functionen derselben und durch die griechischen Buchstaben constante Coefficienten darstellen, ist die folgende Gleichung

$$\Omega_2 r + \mu s^3 \equiv \Omega_3 = 0, \tag{1}$$

bei einer überzähligen Constanten die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung. Die Form dieser Gleichung zeigt, dass die gerade Linie (r) die Tangente in einem Wendepunkte der Curve Ω_3 ist, und die gerade Linie (s) eine solche, die einerseits durch den Wendepunkt (s, r) geht, andrerseits die Curve Ω_3 noch in solchen zwei Punkten schneidet, in welchen diese von demselben Kegelschnitte Ω_2 dreipunktig osculirt wird. Wenn eine Curve dritter Ordnung Ω_3 gegeben ist, so kann bei den überzähligen Constanten ihrer Gleichung (1) (s) jede beliebige gerade Linie sein, die durch einen ihrer Wendepunkte geht;

wenn aber diese Linie einmal beliebig angenommen worden, so ist der Kegelschnitt Ω_2 dadurch vollkommen bestimmt, dass er die Curve Ω_3 in den beiden übrigen Punkten, in welchen dieselbe von der Linie (s) geschnitten wird, dreipunktig osculirt. Dieser Kegelschnitt kann insbesondere auch in ein System von zwei geraden Linien ausarten, wonach

$$\Omega_2 \equiv pq;$$

dann verschwindet aus der Gleichung (1), indem sie in die folgende übergeht:

$$pqr + \mu s^3 = 0, \tag{2}$$

die überzählige Constante. Die Linie (s) ist hier dadurch bestimmt, dass sie gleichzeitig durch die drei Wendepunkte (p, s), (q, s) und (r, s) geht. Wir können ferner die Linie (s) insbesondere auch dadurch bestimmen, dass sie die Curve Ω_3, und folglich auch in demselben Punkte den Kegelschnitt Ω_2 berühre. In diesem Berührungspunkte fallen alsdann die beiden Osculationen jener Curve und dieses Kegelschnittes zusammen, indem sie eine sechspunktige Osculation bilden. Hier verschwindet wiederum, wie in dem vorigen Beispiele, die überzählige Constante. Um in Evidenz zu bringen, dass der Kegelschnitt Ω_2 von der Linie (s) berührt werde, setzen wir zunächst

$$\Omega_2 \equiv st + \varkappa u^2,$$

und da die Function Ω_2 dann immer noch eine willkürliche Constante enthält, dem entsprechend, dass (t) jede beliebige Tangente des bezüglichen Kegelschnittes sein kann, setzen wir überdies, indem wir für diese Tangente diejenige nehmen, welche, wie (s), durch den Wendepunkt (r, s) geht:

$$t \equiv s + \lambda r.$$

Hiernach geht die allgemeine Gleichung (1) in die folgenden Formen über:

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_3 &\equiv \big(s(s + \lambda r) + \varkappa u^2\big) r + \mu s^3 \\ &\equiv s(\mu s^2 + sr + \lambda r^2) + \varkappa u^2 r = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

oder auch, indem wir den Ausdruck in der Klammer der letzten Form in seine (reellen oder imaginären) Factoren ersten Grades auflösen, in die folgende:

$$s(s + \alpha r)(s + \alpha' r) + \varrho u^2 r = 0. \tag{4}$$

Die drei geraden Linien

$$s = 0, \quad s + \alpha r = 0, \quad s + \alpha' r = 0$$

stehen, in Gemässheit der letzten Gleichungsform (4) in gleicher Beziehung zur Curve; es sind die drei Tangenten, die von dem Wende-

punkte (s, r) aus an die Curve sich legen lassen. Die drei Berührungspunkte auf diesen drei Tangenten liegen sämmtlich auf der geraden Linie (u) und sind solche Punkte, in welchen die Curve $\mathfrak{Q}_3$ von Kegelschnitten sechspunktig osculirt wird. Die Linie (r) bleibt nach wie vor die Tangente der Curve im Wendepunkte (s, r).

Ich bin zuerst in meinem „*System der analytischen Geometrie* (Berlin 1835)“ in genauere Untersuchungen über die Wendepunkte der algebraischen Curven eingegangen und habe namentlich gezeigt, dass eine Curve n^{ter} Ordnung $3n(n-2)$ solche Punkte hat (§ 298); dass eine Curve der dritten Ordnung demnach *neun* Wendepunkte hat, und dass von diesen im allgemeinen Falle immer *drei* reell und *sechs* imaginär sind (299); dass ein conjugirter Punkt die *sechs* imaginären, ein Doppelpunkt *zwei* reelle und *vier* imaginäre, ein Rückkehrpunkt die *sechs* imaginären und *zwei* reelle Wendepunkte absorbirt. Dann habe ich ferner folgenden hierher gehörigen Satz bewiesen:

Die sechs Berührungspunkte auf denjenigen sechs Tangenten einer Curve dritter Ordnung, welche von irgend einem Punkte der Linie S) aus an die Curve sich legen lassen, liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, welche durch die drei Winkelpunkte des von den Wendetangenten**) gebildeten Dreiecks und den Pol der Linie S in Beziehung auf dieses Dreieck geht. Von jedem der drei Wendepunkte lassen sich nur noch drei Tangenten an die Curve legen, und die drei Berührungspunkte auf denselben liegen in gerader Linie. Die drei geraden Linien, welche man auf diese Weise erhält, gehen durch die drei Winkelpunkte des obigen Dreiecks und schneiden sich alle drei im Pole der Linie S***)* (§ 326).

Nach dem eben citirten Satze entsprechen den drei reellen Wendepunkten einer Curve dritter Ordnung (von den imaginären Wendepunkten können wir hier ganz absehen) hiernach im Allgemeinen *neun* der fraglichen Osculationspunkte; diese neun Punkte liegen zu dreien auf drei geraden Linien, und diese drei geraden Linien schneiden sich wiederum in demselben Punkte. Hierdurch ist zugleich eine

*) Als Linie S ist diejenige bezeichnet, welche durch die drei reellen Wendepunkte geht.

**) Richtiger ausgedrückt: Tangenten in den Wendepunkten.

***) Als Pol einer gegebenen geraden Linie in Beziehung auf ein gegebenes Dreieck ist derjenige Punkt bezeichnet, durch welchen jede der drei geraden Linien geht, die einen Winkelpunkt des Dreiecks mit demjenigen Punkte verbinden, welcher auf der gegenüberliegenden Seite zu den beiden übrigen Winkelpunkten und dem Durchschnitte mit der gegebenen geraden Linie als vierter harmonischer Theilungspunkt gehört. Rückt die Linie unendlich weit, so ist ihr Pol der Schwerpunkt des Dreiecks.

Reihe von Situationssätzen gegeben, die zu entwickeln hier der Ort nicht ist. Die neun Osculationspunkte sind aber keineswegs immer reell: *es können auch sechs derselben imaginär sein.* Ein Blick auf die im Systeme gegebene Aufzählung und Darstellung der 219 verschiedenen Arten der Curven dritter Ordnung zeigt zum Beispiel, dass die erste Art *neun*, die dritte Art nur *drei* reelle Osculationspunkte von der fraglichen Art hat.[1])

Der im obengenannten Bande des Journals S. 182 von Herrn Steiner an die Spitze des „Auszuges aus einer am 27. November 1845 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung" gestellte Satz lautet:*)

Eine Curve dritter Ordnung enthält im Allgemeinen 27 solche Punkte P, in deren jedem sie von einem Kegelschnitte sechspunktig berührt werden kann. Von diesen 27 Punkten sind 9 reell und 18 imaginär. Die Gleichung vom 27. Grade, durch welche die 27 Punkte P bestimmt werden, ist immer algebraisch aufzulösen; was für die Algebra selbst von Interesse ist.

Wenn der zweite Theil des vorstehenden Satzes immer richtig wäre, was nach dem Vorstehenden nicht der Fall ist, so würde er auf elegante Weise sich neben den oben schon erwähnten Satz stellen, dass von den neun Wendepunkten (d. h. von denjenigen neun Punkten, in welchen eine Curve dritter Ordnung von einer geraden Linie dreipunktig berührt wird) immer doppelt so viele imaginär als reell sind. Was den dritten Theil des Satzes betrifft, so möchte die Bildung der Gleichungen vom 27. Grade, deren Wurzeln die Coordinatenwerthe der 27 Osculationspunkte sind, so complicirt sein, dass das besagte algebraische Interesse dadurch in den Hintergrund treten würde. Wenn dieser Theil des Satzes überhaupt aber *richtig* sein sollte (was ich bis jetzt nicht glaube), so müssten sich auch, was bisher noch nicht bekannt war, die neun Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung durch die Auflösung von Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten bestimmen lassen, wonach dann erst durch die Auflösung einer eben solchen Gleichung die jedem einzelnen Wendepunkte entsprechenden drei Osculationspunkte sich ergeben würden.[2])

Schliesslich erlaube ich mir nur noch eine allgemeine Bemerkung über die von mir angewandte Methode analytischer Beweisführung, beziehe mich hierbei indess, um leichter verstanden zu werden, lediglich auf das einzelne vorliegende Beispiel. *Meine Gleichungsformen sind vollständige Darstellungen graphischer Constructionen, in denen nichts*

*) [Vergl. Werke, Band II, S. 371.]

Fremdartiges sich findet; es sind ideale, mit analytischen Symbolen hingezeichnete Figuren. Ich will einen Kegelschnitt Ω_2 construiren, der eine gegebene Curve dritter Ordnung in zwei Punkten osculirt und schreibe sogleich die Gleichung

$$\Omega_2 r + \mu s^3 = 0, \tag{1}$$

als die entsprechende hin. Es treten in dieser Gleichung gleichzeitig mit Ω_2 die linearen Functionen s und r auf und diese stehen zu der Construction des Kegelschnittes Ω_2 in nothwendiger Beziehung: jener entspricht die durch die beiden Osculationspunkte gehende gerade Linie, dieser die Tangente in einem Wendepunkte. Die Gleichung (1) zeigt, dass die erstgenannte Linie (s) der Bedingung unterworfen ist, ebenfalls durch diesen Wendepunkt zu gehen, und da sie eine willkürliche Constante enthält, kann sich die fragliche Linie (s) beliebig um denselben drehen, so dass ihr in jeder andern Lage ein anderer Kegelschnitt Ω_2 entspricht. In einer besonderen Lage entspricht ihr ein System von zwei geraden Linien. Es ist dies ausgedrückt in der Gleichung:

$$pqr + \mu s^3 = 0, \tag{2}$$

welche die gerade nothwendige Anzahl von Constanten einschliesst. Wir erblicken in ihr eine gerade Linie (s) dargestellt, die durch drei Wendepunkte der gegebenen Curve geht, und die drei Tangenten p, q, r in diesen drei Punkten. Die Discussion dieser Gleichungsform ist die Discussion der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung.*) Drei solcher Punkte sind reell und liegen auf der geraden Linie (s). Der algebraischen Umformung der Gleichung (1) in die Gleichung (2) (an solchen Umformungen scheitern die gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie) *sind wir ganz überhoben;* wir haben uns bloss zu überzeugen, ob die Anzahl der unabhängigen Constanten noch die nothwendige geblieben ist. Wir können ferner auch die durch den Wendepunkt gehende Linie (s) der Gleichungsform (1) dadurch näher bestimmen, dass sie die gegebene Curve dritter Ordnung berühre. Dann fallen die beiden Osculationspunkte in einen einzigen zusammen und der Kegelschnitt Ω_2 osculirt diese Curve sechspunktig. Dieser sechspunktig osculirende Kegelschnitt tritt in der Gleichungsform

$$\{s(s + \lambda r) + \varkappa u^2\} r + \mu s^3 = 0, \tag{3}$$

welche, wie (2), die gerade nothwendige Anzahl von Constanten enthält, in Evidenz. Alles Willkürliche ist hier wiederum ausgeschlossen. Durch eine einfache Formänderung, indem wir zu der Gleichung

*) System der analytischen Geometrie, dritter Abschnitt, § 8.

$$s(s + \alpha r)(s + \alpha' r) + \varkappa u^2 r = 0 \tag{4}$$

übergehen, verschwindet plötzlich der osculirende Kegelschnitt aus der Construction und statt desselben zeichnen sich neben der Tangente (r) im Wendepunkte die sämmtlichen drei durch diesen Punkt gehenden Tangenten der gegebenen Curve und diejenige gerade Linie hin, welche durch die drei Berührungspunkte auf diesen drei Tangenten geht. Jede der vier Gleichungsformen, als Bild der gegebenen Curve dritter Ordnung und der davon abhängigen Kegelschnitte und geraden Linien, unmaskirt durch die Annahme willkürlicher Coordinatenaxen, ist, in Worten ausgedrückt, ein geometrischer Satz. Die den beiden letzten Gleichungsformen entsprechenden Sätze gruppiren sich, weil eine dieser Formen aus der andern unmittelbar hervorgeht, zusammen und mit ihnen überdies auch noch ein dritter Satz, indem die Gleichung (3) sich auch in der Form

$$(s^2 + \varkappa u^2) r + (\lambda r^2 + \mu s^2) s = 0$$

oder in der Form

$$(s + \beta u)(s - \beta u) r + \mu (s + \gamma r)(s - \gamma r) s = 0 \tag{5}$$

schreiben lässt, wobei vier neue gerade Linien in Evidenz treten.*)

*) Die Gleichung des osculirenden Kegelschnitts

$$s(s + \lambda r) + \varkappa u^2 = 0$$

wird befriedigt, wenn zugleich

$$s^2 + \varkappa u^2 = 0 \quad \text{und} \quad r = 0$$

ist, woraus sich zeigt, wie die erste dieser beiden Gleichungen

$$s^2 + \varkappa u^2 \equiv (s + \beta u)(s - \beta u) = 0$$

zwei solche gerade Linien darstellt, die den Osculationspunkt (s, u) mit denjenigen beiden Punkten verbinden, in welchen der Kegelschnitt von der Tangente (r) im Wendepunkte (r, s) geschnitten wird.

Ebenso stellt die Gleichung

$$\mu s^2 + \lambda r^2 = \mu (s + \gamma r)(s - \gamma r) = 0$$

zwei durch den Wendepunkt (r, s) gehende gerade Linien dar. Und somit ist der im Texte angedeutete, in der Gleichungsform (5) ausgesprochene Satz folgender:

Wenn man den Punkt, in welchem eine gegebene Curve dritter Ordnung von einem Kegelschnitte sechspunktig osculirt wird, mit denjenigen beiden Punkten, in welchen dieser Kegelschnitt von der Tangente der Curve in dem entsprechenden Wendepunkte geschnitten wird, durch zwei gerade Linien verbindet, so begegnen diese der Curve noch in solchen vier Punkten, die paarweise mit dem Wendepunkte in gerader Linie liegen.

Wenn man einen der vier Durchschnittspunkte kennt, so sind die drei übrigen unmittelbar dadurch bestimmt, dass einerseits die Gleichungen

Die Geometrie der höhern Curven kann der Algebra und ihrer Begriffsbestimmungen nicht entbehren. Es giebt nicht einmal eine geometrische Definition einer Curve dritter Ordnung; und wo es keine allgemeine Definition giebt, da giebt es auch keine methodische Behandlung. Die Bestimmung einer Curve dritter Ordnung als einer solchen, die von einer geraden Linie in drei Punkten geschnitten wird, ist die geometrische Umschreibung einer algebraischen Definition und kommt darauf hinaus, zu sagen, dass eine solche Curve durch die allgemeine Gleichung dritten Grades zwischen gewöhnlichen Punktcoordinaten x und y dargestellt werde, indem, wenn wir zwischen einer solchen Gleichung und der allgemeinen Gleichung ersten Grades zwischen x und y eine dieser beiden Grössen eliminiren, die resultirende Gleichung vom dritten Grade ist. Wollen wir dieser Definition ihre algebraische Basis nehmen, so hört sie auf Definition zu sein; denn, auch abgesehen von dem Imaginären, können wir nicht mehr nach dieser allgemeinen Bestimmung eine bestimmte Curve von der fraglichen Art construiren. Die allgemeine geometrische Definition einer Curve dritter Ordnung wäre nach meiner Meinung immer noch diejenige, welche als Interpretation der Gleichung (2) sich ergiebt, wenn wir diese in folgender Weise schreiben:

$$\frac{pqr}{s^3} = \mu.$$

„Wenn vier gerade Linien (p), (q), (r) und (s) gegeben sind, so ist der geometrische Ort solcher Punkte, für welche das Product aus den Abständen von den drei ersten gegebenen geraden Linien zu dem Cubus des Abstandes von der vierten geraden Linie in einem gegebenen Verhältnisse steht, eine Curve dritter Ordnung.“ (Die vier gegebenen geraden Linien können hierbei, unbeschadet der Allgemeinheit, immer als reell angesehen werden. Auf ähnliche Weise, wie ich in meinem *Systeme* eine Aufzählung der verschiedenen Arten der Curven dritter Ordnung an die Gleichungsform

$$pqr + \mu s = 0$$

geknüpft habe*), ergiebt sich auch hier eine solche Aufzählung; wobei die verschiedene gegenseitige Lage der obigen vier geraden Linien

$$s = 0, \quad u = 0, \quad s + \beta u = 0, \quad s - \beta u = 0$$

und andrerseits die Gleichungen

$$s = 0, \quad r = 0, \quad s + \gamma r = 0, \quad s - \gamma r = 0$$

vier Harmonicalen darstellen.

*) [Vgl. a. a. O. § 2 u. § 5 des dritten Abschnitts.]

das Princip der Eintheilung liefert. Neben diese neue Aufzählung stellt sich unmittelbar die ganz analoge der Curven dritter Classe.) Aber wer würde es unternehmen, aus der vorstehenden oder aus irgend einer andern Definition auf geometrischem Wege die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung systematisch abzuleiten? Dies ist offenbar nicht möglich ohne Nebeneinanderstellung der coordinirten Fälle, die durch das Reelle und Imaginäre bedingt werden. Wollten wir aber unmittelbar das Imaginäre in die geometrische Discussion aufnehmen, so hiesse das algebraisch verfahren. Andrerseits weiss ich recht wohl, dass auch an das Imaginäre sich eine *nähere* oder *entferntere* geometrische Bedeutung anschliesst. Zwei Kegelschnitte schneiden sich zum Beispiel in vier reellen oder imaginären Punkten, durch welche sich immer drei Systeme von zwei geraden Linien legen lassen; die geraden Linien zweier dieser drei Systeme können imaginär sein; die beiden imaginären Linien der beiden Systeme schneiden sich in zwei Punkten, die ihrerseits entweder reell oder imaginär sind: aber auch wenn sie imaginär sind, liegen sie *immer* auf einer reellen geraden Linie. Es ist dies die geometrische Einkleidung eines algebraischen Factums. Nehmen wir als einfacheres Beispiel den Fall zweier Kreise, durch deren beide reelle oder imaginäre Durchschnittspunkte immer eine reelle gerade Linie geht, so können wir diese gerade Linie hier auch geometrisch, etwa als die Linie der gleichen Tangenten, definiren und so das Imaginäre gewissermassen umgehen. Wir können dies immer, wenn die Curven von der zweiten Ordnung sind, wo, indem wir dieselben als Schnitte einer Kegelfläche definiren, diese Kegelfläche die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade vertritt. Hier reichen, um die Discussion allgemein und systematisch zu machen, die Projectionsmethoden oder die Collineation, oder die Theorie der harmonischen Proportionen und der Involutionen aus, welche alle einen gemeinschaftlichen Ursprung haben.

Schon im Jahre 1830 in der Vorrede zum zweiten Bande meiner „Entwicklungen“ habe ich mich in folgender Weise ausgedrückt. „Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für sich allein dasteht und dass die Geometrie, so wie von einer andern Seite die Mechanik, bloss als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint. Wenn wir diese Ansicht zu Grunde legen und consequent durchführen, so erhält dadurch die Behandlung der Geometrie einen eigenthümlichen Charakter, auf den ich hier noch besonders aufmerksam

machen zu müssen glaube.“ Zu dieser Ansicht, die der leitende Gedanke aller meiner Arbeiten in dem Gebiete der analytischen Geometrie war, bekenne ich mich auch jetzt noch; und zwar mit klarerem Bewusstsein als damals, wo Manches für mich noch unbestimmte Anschauung war. Und jetzt kann ich auch, indem ich mich auf ein Beispiel, wie das in dem Vorstehenden behandelte, beziehe, klarer und bestimmter mich aussprechen und also auch hoffen, vollständiger verstanden zu werden.

28.

Note sur le théorème de Pascal.

(Crelle's Journal, Band 34, S. 337—340. 1847.)

Dans la deuxième partie d'un Mémoire intitulé „Sur quelques théorèmes de la géométrie de position“ *) M. Cayley s'exprime ainsi:

„Sur le théorème de Pascal. En considérant six points sur la même conique, et les prenant dans un ordre déterminé, pour en former un hexagone, on sait que les côtés opposés se rencontrent dans trois points situés en ligne droite. En prenant les points dans un ordre quelconque, on en peut former soixante hexagones, à chacune desquelles correspond une droite; il s'agit maintenant de trouver la relation entre ces droites.“

„M. Steiner a prouvé dans son ouvrage „„Systematische Entwicklungen etc.““, que ces soixante droites passent trois à trois par vingt points, et il ajoute que ces vingt points sont situés quatre à quatre sur quinze droites. La première partie de ce théorème peut être démontrée assez facilement, comme nous le verrons; mais pour la seconde partie, je n'ai pas réussi à trouver les combinaisons de quatre points qui doivent être situés en ligne droite, et il me paraît même qu'il est impossible de les trouver.“

„Je ne sais pas s'il existe une démonstration de la seconde partie du théorème; je n'ai pu la trouver nulle part. Au cas que cette partie du théorème n'était pas correcte, il paraît que l'on devra peut-être lui substituer la proposition suivante.“ „Les vingt points déterminent deux à deux dix lignes qui passent trois à trois par dix points.“ (Note) p. 219.

„Je vais ajouter quelques réflexions sur la manière de chercher les relations qui existent entre ces vingt points“ etc. p. 222.

Je me propose de faire disparaître de ce qui précède tout ce qu'il

*) Crelle's Journal, vol. 31, p. 213—230.

renferme d'incorrect et d'hypothétique. De simples citations suffiront pour parvenir à ce but.

En 1828 M. Steiner proposa dans les Annales de M. Gergonne*) à démontrer le théorème suivant:

Six points pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque sont les sommets de soixante hexagones inscrits, et les points de contact de soixante hexagones circonscrits (Carnot, Géométrie de position) lesquels jouissent des propriétés suivantes.

1°. Dans chacun des hexagones inscrits les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent, tous les trois, à une même droite (D) (Pascal), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D.

2°. Ces soixante droites D concourent, trois à trois, dans un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p.

3°. Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq droites δ.

4°. Ces cinq droites concourent dans un même point ω.

1°. Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toujours par trois dans un même point P (Brianchon), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P.

2°. Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d, de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d.

3°. Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, dans un même point ω, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ω.

4°. Ces cinq points ω appartiennent à une même droite δ.

Les numéros (3) et (4) contiennent des propositions fausses. J'ai prouvé dans un Mémoire publié en 1829**) qu'il faut les remplacer par les théorèmes suivants.

3°. Ces vingt points p appartiennent à quinze droites δ, dont chacune en contient quatre, de sorte que par chacun des vingt points p passent trois des quinze droites δ.

3°. Ces vingt droites d concourent dans quinze points ω, par chacun desquelles en passent quatre, de sorte que chacune des vingt droites d contient trois des quinze points ω.

M. Steiner a bien voulu adopter une rédaction du théorème dans un ouvrage publié plus tard et cité par M. Cayley.

*) Théorèmes sur *l'Hexagrammum mysticum*, proposés à démontrer par M. J. Steiner, de Berlin. Gergonne's Annales, vol. XVIII. p. 339.

**) Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten. Crelle's Journal, Vol. 5, p. 268. [S. 159 dieser Ausgabe.]

Dans mon Mémoire de 1829 on trouve une analyse complète du théorème de M. Steiner et du mien. Les deux démonstrations analytiques que j'ai données du premier de ces deux théorèmes me paraissent remarquables pour leur extrême simplicité.*) Le second théorème, *suite immédiate du théorème même de Pascal* n'exige point une démonstration nouvelle.

Quant au théorème de Pascal, je voudrais bien le regarder par préférence comme un cas particulier du théorème fondamental suivant sur les courbes de troisième ordre.

*Trois ou plusieurs courbes du troisième ordre, passant par les mêmes huit points donnés, vont se couper toutes dans un même neuvième point.***)

Si l'on remplace deux des trois courbes par des systèmes de trois lignes droites, ce théorème se change immédiatement dans le suivant:

Si l'on inscrit à une courbe du troisième ordre un hexagone quelconque 1 2 3 4 5 6 dont les côtés opposés 12 et 45, 23 et 56 vont se rencontrer sur la courbe, le même aura lieu pour les deux côtés 34 et 61.

*) C'est cette simplicité inattendue qui m'a suggéré l'idée de traiter d'une manière analogue et uniforme tous les théorèmes de la géométrie linéaire de situation, et j'y ai réussi en donnant les méthodes générales pour les démontrer au moyen de symboles, représentant des expressions linéaires et des coëfficients indéterminés (Voyez le X et XI vol. du présent Journal: „Analytisch-geometrische Aphorismen § I et § III.“) [S. 235 dieser Ausgabe.] En vertu de la nature des théorèmes, on peut même quelquefois se passer des derniers, ou du moins, on n'a pas besoin de les mettre en évidence. C'est le cas du théorème en question.

**) Ce théorème, ou plutôt, celui qui correspond à l'intersection de deux courbes d'un ordre quelconque, me paraît le théorème le plus important, de la géométrie des courbes. Je l'ai donné pour la première fois en 1827 dans une note de mon ouvrage intitulé: Analytisch-geometrische Entwicklungen, Tome I p. 228 et après je l'ai traité avec plus de détail dans l'ouvrage „Theorie der algebraischen Curven“, qui a paru en 1839. Il était naturel d'étendre le théorème en question aux intersections des surfaces; ce que j'ai fait en 1829 dans un mémoire publié dans les *Annales* de M. Gergonne, pour le cas des surfaces du même ordre. [Vgl. S. 323 dieser Ausgabe.] Il restait encore à discuter le cas des surfaces d'un ordre différent. C'est ce qui à été fait dans deux mémoires, l'un de M. Jacobi et l'autre de moi, qui étaient en même temps entre les mains de l'Editeur, mais dont l'un à été publié un peu plutôt que l'autre. (Journal vol. XV S. 285 et vol. XVI S. 47. 1836.) J'ai appris par le mémoire de M. Jacobi que les formules que j'avais données dans le mien, n'étaient exactes que pour un seul des deux cas généraux et coordonnés, et que, pour l'autre cas, il fallait soumettre ces formules à une reduction nouvelle. Dans mon dernier ouvrage (System der Geometrie des Raumes) qui a paru au commencement d'Août 1846, j'ai repris la même question. M. Cayley, dans un mémoire plus récent (Cambridge and Dublin mathematical Journal vol. II; p. 52) y revient également. Le livre cité n'étant pas venu à sa connaissance, il n'a pu que citer mon Mémoire de 1836, à l'occasion duquel il réproduit l'observation que je viens de faire.

En remplaçant enfin la dernière courbe du troisième ordre par le système d'une conique et d'une ligne droite quelconque, le dernier théorème se transforme sur le champ dans celui de Pascal. Je ferai remarquer en passant qu'au théorème que je viens d'énoncer se rattachent, pour les courbes du troisième ordre, une foule de constructions, analogues à celles qui dérivent, pour les coniques, du théorème de Pascal. Une courbe du troisième ordre étant tracée, l'on pourra, par exemple, dans chacun de ses points construire la tangente. Par une nouvelle particularisation (en faisant par exemple coïncider les points 1 et 2, 4 et 5), l'on obtient entre autres théorèmes le théorème suivant:

Si les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à une courbe du troisième ordre, vont se couper sur la courbe, le même aura lieu pour le quadrilatère circonscrit dont les côtés touchent la courbe dans les sommets du premier quadrilatère.

Un plus ample détail dépasserait le but de cette note.

29.

Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe.

(Crelle's Journal, Band 34, S. 341—356, 1847.)

1. Es ist bekannt, dass in jedem Punkte einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung und Classe (eines einschaligen Hyperboloïds und eines hyperbolischen Paraboloïds) zwei gerade Linien sich schneiden, die ganz auf der Fläche liegen und den beiden verschiedenen Erzeugungen der Fläche (durch die Bewegung einer geraden Linie) angehören. Durch diese beiden Linien von verschiedener Erzeugung ist der Punkt auf lineare Weise bestimmt. Um ferner jede dieser beiden Linien in gleicher Weise zu bestimmen, wollen wir auf der Fläche selbst zwei gerade Linien, die bezüglich der ersten und der zweiten Erzeugung angehören, die beiden in irgend einem Punkte O sich schneidenden Axen OX und OY beliebig annehmen.*) Die Punkte jeder dieser beiden Axen bestimmen wir durch ihre Abstände vom Punkte O und nennen diese Abstände ξ und η. Durch jeden bestimmten Werth a, den wir ξ beilegen, ist ein Punkt P der Axe OX bestimmt, und durch diesen Punkt ist eine einzige Linie PM, die der zweiten Erzeugung angehört, gegeben. Nehmen wir andrerseits für η einen bestimmten Werth b an, so ist dadurch ein Punkt Q auf der Axe OY und durch diesen Punkt eine einzige Linie QM der ersten Erzeugung gegeben. Die beiden Linien PM und QM schneiden sich in einem einzigen Punkte M, und dieser Punkt der Fläche ist also durch die beiden Gleichungen

$$\xi = a, \quad \eta = b$$

auf lineare Weise bestimmt. Umgekehrt braucht man, wenn man den Punkt M als gegeben betrachtet und dann die diesem Punkte ent-

*) [Vgl. die Figur 66 auf S. 424.]

sprechenden Werthe von ξ und η bestimmen will, durch denselben bloss die beiden Erzeugenden MP und MQ zu legen. Dann sind die Segmente OP und OQ oder a und b, welche diese Linien auf den beiden Axen OX und OY abschneiden, die verlangten Werthe. Auch diese Bestimmung ist eine *lineare*.

2. Wir nennen ξ und η *Coordinaten*: es sind veränderliche Grössen, die für einen gegebenen Punkt der Fläche bestimmte Werthe erhalten. Auf ganz gleiche Weise, wie ein Punkt in der Ebene XOY durch seine Coordinatenwerthe gegeben ist, ist es hier ein *Punkt der Fläche*. Eine Gleichung zwischen ξ und η stellt im Allgemeinen eine Curve dar, die einmal in der Ebene XOY, das andere mal *auf der Fläche* liegt. Alle analytischen Entwicklungen, ebene Curven betreffend, können wir also unmittelbar auf Curven übertragen, die auf einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung liegen.

3. Wenn wir erwägen, dass die beiden geraden Linien, die durch einen gegebenen Punkt M der Fläche gehen, in derjenigen Ebene liegen, welche die Fläche in diesem Punkte *berührt*, so ergiebt sich die Bestimmung der Coordinaten dieses Punktes ξ und η unmittelbar. Es sind diejenigen Segmente, welche von den beiden Axen OX und OY durch die Berührungsebene in dem gegebenen Punkte M abgeschnitten werden. Aus diesem Gesichtspunkte lassen sich auch analytisch, wenn eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung gegeben ist und auf ihr zwei Axen beliebig angenommen werden, die Coordinaten irgend eines Punktes derselben ohne Mühe bestimmen.

Es sei

$$z(az + by + cx + d) + \mu xy = 0 \quad (1)$$

*) die allgemeine Gleichung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung in gewöhnlichen Parallelcoordinaten. Die Richtung der Axe (x, y) oder OZ ist, während die beiden andern Axen (x, z) und (y, z) oder OY und OX ganz auf der Fläche liegen, durchaus willkürlich angenommen, und in Folge hiervon enthält die vorstehende Gleichung noch überzählige Constanten. Die Gleichung

$$az + by + cx + d = 0$$

*) Ich verweise in Beziehung auf diese Gleichungsform und auf Alles, was an diese Form sich anknüpft, auf mein „System der Geometrie des Raumes, in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend", 1846 in 4°, und namentlich auf § 5: „Discussion der Gleichungsform

$$tu = \mu vw,$$

in der zwiefachen Coordinatenbestimmung." S. 99–135.

stellt diejenige Tangentialebene der Fläche dar, welche durch die beiden zweiten geraden Linien geht, die zugleich auf dieser Fläche und in den beiden Coordinatenebenen XOZ und YOZ liegen.

Wenn wir auf der Fläche irgend einen Punkt (x', y', z') annehmen, so erhalten wir für die Tangentialebene in diesem Punkte nach bekannter Weise sogleich die folgende Gleichung:

$$(2az' + by' + cx' + d)z + (bz' + \mu x')y + (cz' + \mu y')x + dz' = 0.$$

Für diejenigen beiden Punkte dieser Ebene, welche auf den beiden Axen OX und OY liegen, ergiebt sich hiernach

$$(2) \qquad x = \xi = -\frac{dz'}{cz' + \mu y'}, \text{ und } y = \eta = -\frac{dz'}{bz' + \mu x'}.$$

Umgekehrt ergeben sich, um in gewöhnlicher Weise den Punkt der Fläche durch seine neuen Coordinaten ξ und η zu bestimmen, folgende Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{y'}{z'} = -\left\{\frac{d}{\mu}\cdot\frac{1}{\xi} + \frac{c}{\mu}\right\}, \quad \frac{x'}{z'} = -\left\{\frac{d}{\mu}\cdot\frac{1}{\eta} + \frac{b}{\mu}\right\}.$$

4. Wir wollen die durch die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen ξ und η dargestellte Curve eine *Curve auf der Fläche von der ersten Ordnung* nennen und ihre Natur analytisch bestimmen. Diese allgemeine Gleichung, für welche wir folgende annehmen wollen:

$$(4) \qquad A\eta + B\xi + C = 0,$$

lässt sich, wenn man für η und ξ ihre oben entwickelten Werthe in x', y' und z' setzt und zugleich die Accente weglässt, in folgende umformen:

$$Adz(cz + \mu y) + Bdz(bz + \mu x) - C(cz + \mu y)(bz + \mu x) = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn man x, y und z, wie früher ξ und η, als veränderlich betrachtet, eine Kegelfläche zweiter Ordnung dar, welche die gegebene Fläche in derjenigen Curve schneidet, die durch die Gleichung (4) dargestellt wird. Entwickelt man, so ergiebt sich

$$(5) \qquad \begin{cases} (Adc + Bdb - Ccb)z^2 + (Ad - Cb)\mu zy \\ \quad + (Bd - Cc)\mu zx - C\mu^2 xy = 0, \end{cases}$$

und wenn man in Gemässheit der Gleichung der Fläche für das letzte Glied

$$C\mu(az + by + cx + d)z$$

setzt:

$$(6) \quad z[\{Adc + Bdb - C(cb - \mu a)\}z + \mu d\{Ay + Bx + C\}] = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Kegelfläche (5), deren Mittelpunkt auf der Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, die Fläche in einer

ebenen Curve schneidet. Diese ebene Curve wird also unmittelbar durch die Gleichung (4) dargestellt. *Die Curven auf der Fläche von der ersten Ordnung sind demnach ebene Curven.* Wenn wir also in der letzten Gleichung den Factor z weglassen (der Tangentialebene im Anfangspunkte entspricht die zweite hier nicht in Betracht kommende Durchschnittsebene des Kegels und der gegebenen Fläche), so ist die Gleichung

$$(7) \quad \big(Adc + Bdb - C(cb - \mu a)\big)z + \mu d(Ay + Bx + C) = 0$$

die Gleichung der Ebene der durch (4) dargestellten Curve. Die Form der letzten Gleichung führt zu der Bemerkung, dass diese Ebene die Tangentialebene im Anfangspunkte in derselben geraden Linie schneidet, welche in dieser Ebene durch die Gleichung (4) dargestellt wird, wenn man ξ und η als gewöhnliche Parallelcoordinaten x und y construirt, so dass

$$Ay + Bx + C = 0.$$

5. Nimmt man statt der Gleichung (4) die allgemeine Gleichung zweiten Grades, so ist die dargestellte Curve auf der Fläche die Durchschnittscurve dieser Fläche mit einer Kegelfläche vierter Ordnung, deren Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Coordinaten fällt. Die Ordnung dieser Kegelfläche steigt bis zur $2n^{\text{ten}}$, wenn die Curve durch eine Gleichung n^{ten} Grades in ξ und η dargestellt wird.

Eine Curve auf der Fläche von der ersten Ordnung hängt nur von zwei Constanten ab und wird durch zwei Punkte auf eine einzige Weise bestimmt. Von derselben Anzahl von Constanten hängt die Gleichung (7) ab; die bezügliche Ebene, welche durch ihren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche die fragliche Curve bestimmt, geht (was unmittelbar daraus folgt, dass ihre Gleichung nur zwei lineare Constanten $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ hat) durch einen von diesen Constanten unabhängigen festen Punkt.

Eine Curve auf der Fläche von der zweiten und überhaupt von der n^{ten} Ordnung ist bezüglich durch fünf und $\frac{n(n+3)}{1 \cdot 2}$ beliebig auf der Fläche angenommene Punkte auf lineare Weise bestimmt; durch ebenso viele Punkte ist es auch die Kegelfläche vierter und überhaupt $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die gegebene Fläche in der fraglichen Curve schneidet.

6. Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich dadurch noch vereinfachen, dass man die Axe OZ durch den Mittelpunkt der Fläche legt; dann verschwinden die Constanten b und c, und je nachdem alsdann a einen endlichen Werth behält oder ebenfalls verschwindet, ist

die Fläche ein Hyperboloïd oder geht in ein Paraboloïd über. Im ersten Falle können wir a gleich Eins setzen. Dies giebt für die Gleichung der Fläche:

$$z(z+d)+\mu xy=0. \tag{8}$$

Die Axen OY und OX sind irgend zwei Linien der zwiefachen Erzeugung der Fläche; ihr Durchschnitt O ist der Scheitel des in die dritte Axe OZ fallenden Durchmessers des Hyperboloïds, und $(-d)$ ist die Länge desselben. Es gehen hier die Gleichungen (2) in die folgenden über:

$$\xi=-\delta\cdot\frac{z}{y},\quad \eta=-\delta\cdot\frac{z}{x}, \tag{2a}$$

indem man zugleich der Kürze wegen $\frac{d}{\mu}=\delta$ setzt, und die Gleichung der Ebene der durch (4) dargestellten Curven ist:

$$Cz+d(Ay+Bx+C)=0. \tag{7a}$$

Alle durch diese Gleichung bei willkürlicher Annahme von A, B, C dargestellten Ebenen gehen durch den festen Punkt

$$z=-d,\quad y=0,\quad x=0;$$

also *durch den zweiten Scheitel S des durch O gehenden Durchmessers der Fläche.* Durch denselben festen Punkt gehen also auch alle bei beliebiger Constantenannahme durch die Gleichung (4) dargestellten Curven. Um demnach eine solche Curve zu construiren, welche durch zwei gegebene Punkte auf der Fläche geht, braucht man bloss eine Ebene durch diese beiden Punkte und zugleich durch den festen Punkt zu legen; diese Ebene schneidet die Fläche in der zu construirenden Curve.

7. So wie man zwei beliebige auf dem Hyperboloïd liegende und in irgend einem Punkte desselben sich schneidende gerade Linien als Coordinatenaxen OX und OY annehmen kann und dann der *feste Punkt* sogleich sich ergiebt, so lässt sich auch umgekehrt dieser letztere von vornherein beliebig annehmen und es lassen sich danach die Coordinatenaxen bestimmen. So gelangen wir zunächst zu folgendem Resultate:

Alle Sätze über gerade Linien in der Ebene übertragen sich auf ebene Curven, die auf einem Hyperboloïd liegen und die alle durch einen auf demselben beliebig angenommenen festen Punkt gehen.

Sobald Curven auf der Fläche von der zweiten und von höheren Ordnungen nach der fünften Nummer geometrisch bestimmt worden sind, lassen sich auch auf diese Curven die analogen Beziehungen der durch dieselben Gleichungsformen in der Ebene dargestellten Curven über-

tragen. Es bestehen z. B. die Sätze von Pascal und Brianchon gleichzeitig; sammt ihrer ganzen Erweiterung (vgl. die vorhergehende Abhandlung: „Note sur le théorème de Pascal“).*) Ich beschränke mich hier auf die Aussage der Sätze selbst.

Wenn man in und um eine Curve auf einer Fläche von der zweiten Ordnung auf eben dieser Fläche ein Sechseck beschreibt, dessen Seiten ebene Curven sind, die durch irgend einen festen Punkt der Fläche gehen, so liegen einmal die drei Durchschnittspunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten des eingeschriebenen Sechsecks mit dem festen Punkte in derselben Ebene und andrerseits schneiden sich diejenigen drei ebenen Curven, welche die drei Paare gegenüberliegender Winkelpunkte des umschriebenen Sechsecks mit dem festen Punkte verbinden, ausser in diesem Punkte noch in einem zweiten Punkte der Fläche.

Den ersten der beiden Sätze können wir auch hier aus dem allgemeineren Satze über Curven auf der Fläche von der dritten Ordnung, die alle in demselben neunten Punkte sich schneiden, wenn sie durch acht gegebene Punkte gehen, ableiten. So wie in der Ebene, wenn fünf Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, der Pascal'sche Satz zur Construction jedes sechsten Punktes desselben dienen kann, und dieser Satz hiernach sogar auch als *Definition* der Kegelschnitte sich hinstellen lässt, so können wir auch den entsprechenden Satz als *Definition* der Curven auf der Fläche von der zweiten Ordnung zu Grunde legen und, statt von der Betrachtungsweise der fünften Nummer auszugehen, hiernach diese Curven construiren.

8. Wenn die Fläche ein hyperbolisches *Paraboloïd* ist, lässt sich die allgemeine Gleichung derselben in folgender Weise schreiben:

$$xy + \delta z = 0, \tag{9}$$

und man erhält alsdann für die Gleichung derjenigen Ebene, in welcher die Curve auf der Fläche

$$A\eta + B\xi + C = 0$$

liegt, folgende:

$$Ay + Bx + C = 0. \tag{7b}$$

Alle Schnittebenen also, in welchen Curven auf der Fläche von der ersten Ordnung liegen, sind den Durchmessern der Fläche parallel; was mit der sechsten Nummer übereinstimmt.

9. Es ist überhaupt klar, dass alle Resultate, zu denen wir nach den vorstehenden Andeutungen gelangen, sobald sie sich nicht auf die Natur der Fläche *als einer geradlinigen* beziehen, für alle Flächen

*) [Vgl. S. 413 dieser Ausgabe.]

zweiter Ordnung unmittelbar Geltung behalten. Es kommt dies darauf hinaus, die beiden geraden Linien OX und OY in der Berührungsebene der Fläche durch zwei imaginäre gerade Linien zu ersetzen, das heisst, in den Gleichungen (8) und (9) x und y bezüglich mit $(x + \alpha y\sqrt{-1})$ und $(x - \alpha y\sqrt{-1}$ zu vertauschen.*)

10. Den einfachsten geometrischen Gesichtspunkt für die Entwicklungen der früheren Nummern gewinnen wir auf folgende Weise. Wenn wir gerade Linien, die in irgend einer gegebenen Ebene liegen, auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung projiciren und hierbei zum Mittelpunkte der Projection irgend einen festen Punkt der Fläche selbst nehmen, so sind die Projectionen der geraden Linien ebene Curven, welche durch den festen Punkt gehen. Nehmen wir überdies für die Ebene der geraden Linien die Tangentialebene der Fläche in demjenigen Punkte an, in welchem dieselbe zum zweiten Male von dem durch den festen Punkt gehenden Durchmesser geschnitten wird, ferner diejenigen beiden geraden Linien, in welchen die Fläche von der Berührungsebene geschnitten wird, zu Coordinatenaxen OX und OY, so stellt, was unmittelbar aus dem Schlussresultate der vierten Nummer folgt, *dieselbe Gleichung*

$$Ay + Bx + C = 0$$

in der Tangentialebene XOY eine gerade Linie und auf der Fläche (es ist hier überflüssig in der Bezeichnung x und y mit ξ und η zu vertauschen) eine ebene Curve dar: *von beiden ist die eine die Projection der andern.* Denselben Coordinatenwerthen entsprechen also zwei Punkte, von welchen einer die Projection des andern ist. Derselben Gleichung beliebigen Grades zwischen x und y entsprechen Curven, von denen eine ebenfalls die Projection der andern ist. Nennen wir die fragliche Art von Projection, indem wir die Benennung von der Kugel auf beliebige Flächen zweiter Ordnung (hier zunächst auf das einschalige Hyperboloïd) übertragen, *stereographische Projection*, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Eine beliebige Curve auf einer Fläche zweiter Ordnung und ihre

*) Durch die Andeutungen des Textes werden analytische Entwicklungen hervorgerufen, die zu verfolgen uns *hier* zu weit führen würde. Die Lage eines Punktes lässt sich auch durch die Vermittlung *imaginärer Coordinatenaxen* bestimmen. Wir könnten uns hierbei der gewöhnlichen Verwandlungsformen bedienen, die den Uebergang von einem Coordinatensysteme zu einem andern geben. Durch eine Gleichung zwischen imaginären Coordinaten kann eine reelle Curve dargestellt werden; eine Ellipse zum Beispiel, indem man ihre imaginären Asymptoten zu Coordinatenaxen nimmt.

stereographische Projection werden beide durch eine und dieselbe Gleichung dargestellt, wenn man diejenigen beiden geraden Linien, in welchen die Fläche von der Tangentialebene, auf welche wir projiciren, geschnitten wird, in beiden Fällen zu Coordinatenaxen nimmt.

11. Es seien OX und OY die beiden Coordinatenaxen in der Tangentialebene XOY (Fig. 66), so sind

$$x = \xi = OP \quad \text{und} \quad y = \eta = OQ$$

einerseits die Coordinaten eines Punktes M auf der Fläche und *andrerseits* seiner stereographischen Projection N. Wenn der letztgenannte Punkt N irgend eine Curve beschreibt, deren Gleichung

(10) $\varphi(y, x) = 0$

ist, so stellt nach dem Vorstehenden *dieselbe Gleichung* die stereographische Projection dieser Curve auf der Fläche dar, die wir, wenn die Fläche eine geradlinige ist, nach der ersten Nummer unmittelbar construiren können.

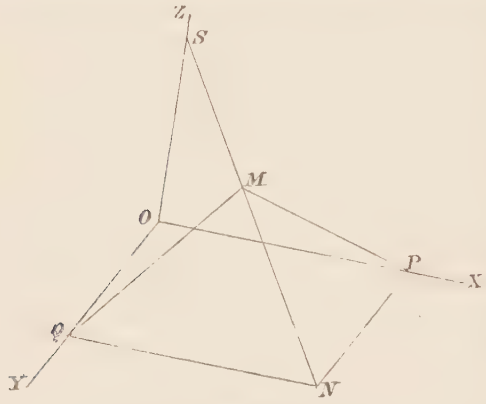

Fig. 66.

Für die projicirende Kegelfläche, deren Mittelpunkt S der Punkt $(z = -d,\ y = 0,\ x = 0)$ ist, erhalten wir unmittelbar nachstehende Gleichung:

(11) $$\varphi\left(\frac{dy}{z+d},\ \frac{dx}{z+d}\right) = 0;$$

welche sich, wenn man z verschwinden lässt, auf die Gleichung (10) reducirt.

Denselben Punkt M auf der Fläche kann man aber nach der dritten Nummer auch dadurch bestimmen, dass man durch die gerade Linie PQ in derselben Berührungsebene XOY eine zweite Berührungsebene PQM an die Fläche legt und auf dieser den Berührungspunkt nimmt. Wenn der so bestimmte Punkt M wie oben auf der Fläche eine Curve beschreibt, so umhüllt die gerade Linie PQ in der Ebene XOY eine Curve. Bestimmen wir die Linie PQ durch ihre Coordinaten $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$, das heisst durch die mit entgegengesetztem Zeichen genommenen reciproken Werthe derjenigen beiden Segmente, die von ihr auf den beiden Coordinatenaxen OX und OY abgeschnitten werden, so dass also

$$\frac{t}{w} = -\frac{1}{OP}, \quad \frac{u}{w} = -\frac{1}{OQ}$$

ist, und nehmen wir ferner, wie früher, x, y und z für die Coordinatenwerthe des entsprechenden Punktes auf der Fläche an, so geben die Gleichungen (2) der sechsten Nummer:

$$\frac{t}{w} = \frac{1}{\delta}\frac{y}{z} \quad \text{und} \quad \frac{u}{w} = \frac{1}{\delta}\frac{x}{z}.$$

Die in der Tangentialebene von der Linie PQ umhüllte Curve lässt sich durch die Gleichung zwischen $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$:

$$\psi\left(\frac{u}{w}, \frac{t}{w}\right) = 0 \tag{12}$$

darstellen; durch *dieselbe Gleichung* also auch die entsprechende Curve auf der Fläche. Der Grad der letzten Gleichung bestimmt die Classe der Curve in der Tangentialebene; wir können sagen, *die Curve auf der Fläche sei von eben dieser Classe.* Hiernach heisst eine Curve auf der Fläche von der n^{ten} Ordnung und m^{ten} Classe, wenn ihre Gleichung (10) in x und y vom n^{ten} und ihre Gleichung in $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$ vom m^{ten} Grade ist.

Wenn man in die letzte Gleichung für $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$ ihre Werthe in x, y und z setzt, so erhält man zur Bestimmung der Curve auf der Fläche folgende Gleichung:

$$\psi\left(\frac{1}{\delta}\frac{x}{z}, \frac{1}{\delta}\frac{y}{z}\right) = 0, \tag{13}$$

welche eine Kegelfläche darstellt, deren Mittelpunkt in den Berührungspunkt O fällt und deren Ordnung dieselbe ist wie die Classe der Curve auf der Fläche.

Wenn eine beliebige algebraische Curve auf der Fläche gegeben ist, so bestimmt die Ordnung der stereographisch projicirenden Kegelfläche (deren Mittelpunkt S ist) die *Ordnung* der Curve; und die Ordnung der durch dieselbe gelegten Kegelfläche, deren Mittelpunkt der Berührungspunkt O ist, bestimmt die *Classe* der Curve. Die Ordnung einer Curve auf der Fläche ist die Ordnung ihrer stereographischen Projection; die Classe derselben ist die Classe der ebenen Curve, in welcher diejenige Abwicklungsfläche, welche die gegebene Fläche in der fraglichen Curve berührt, die Berührungsebene in O, auf welche stereographisch projicirt wird, schneidet. Die Definition von *Ordnung* und *Classe* der Curven auf der gegebenen Fläche hängt hiernach von der Annahme der Coordinatenaxen OX und OY ab; Ordnung und Classe vertauschen sich gegenseitig, wenn man die Punkte O und S

mit einander vertauscht und also S zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt.

12. Wenn die Classe der Curve auf der Fläche die *erste* ist, so gehen alle geraden Linien PQ durch denselben Punkt in der Ebene XOY, und die durch die allgemeine Gleichung (13) dargestellte Kegelfläche reducirt sich alsdann auf eine durch den Anfangspunkt gehende Ebene: auf die Polarebene des eben bezeichneten Punktes. Die Curve auf der Fläche ist irgend eine ebene Curve, die durch den Punkt O geht.

Wenn die Kegelfläche (13) von der *zweiten* Ordnung ist, so schneidet sie die gegebene Fläche in einer Curve *zweiter Classe*, und die dieser entsprechende Abwicklungsfläche schneidet die Tangentialebene in dem Punkte O (dem Mittelpunkte jener Kegelfläche (13)), in einem Kegelschnitte. Im Allgemeinen ist die Curve zweiter Classe auf der Fläche nicht zugleich auch von der *zweiten Ordnung*, sondern im Allgemeinen von der *vierten* Ordnung. Die durch dieselbe gehende projicirende Kegelfläche mit dem Mittelpunkte in S ist also im Allgemeinen ebenfalls nicht von der zweiten Ordnung; sie ist es nur in dem besonderen Falle, wenn die Curve auf der Fläche eine *ebene* Curve ist. Eine solche Curve ist also im Allgemeinen gleichzeitig von der zweiten Ordnung und von der zweiten Classe; und umgekehrt, *jede Curve zweiter Ordnung und Classe ist eine ebene Curve.*

Die stereographische Projection einer ebenen Curve auf der Fläche ist ein *erster* Kegelschnitt (10). Die dieser Curve entsprechende Abwicklungsfläche ist eine die gegebene Fläche in der ebenen Curve berührende Kegelfläche zweiter Ordnung und schneidet die Tangentialebene in O in einem zweiten Kegelschnitte (13). Nehmen wir hiernach für die Gleichung jenes ersten Kegelschnitts statt der (10) folgende:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

so muss, wenn man y und x bezüglich mit $\left(-\frac{w}{u}\right)$ und $\left(-\frac{w}{t}\right)$ vertauscht, auch die resultirende Gleichung (13), damit sie den zweiten Kegelschnitt darstelle, vom zweiten Grade in $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$ bleiben. Dies erfordert aber, dass die Coefficienten A und C in der vorstehenden Gleichung verschwinden; weshalb denn der erste Kegelschnitt durch folgende Gleichung in Punktcoordinaten:

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0, \tag{14}$$

und der zweite Kegelschnitt durch folgende Gleichung in Liniencoordinaten:

(15) $$Bw^2 - Dtw - Euw + Ftu = 0$$

dargestellt wird.

Eine ebene Curve auf der Fläche hängt, wenn diese gegeben ist, nur noch von drei Constanten ab; von denselben Constanten wie diejenige Ebene, in welcher sie liegt. Darum hängen ebenfalls auch die Kegelschnitte (14) und (15), durch deren Vermittelung wir ebenfalls die ebene Curve bestimmen können, nur von *drei* linearen Constanten ab. Alle durch die Gleichung (14) dargestellten Kegelschnitte haben, was ihre Gleichung unmittelbar zeigt, Asymptoten, die den beiden Coordinatenaxen parallel sind; sie sind mit andern Worten ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte.

Die stereographischen Projectionen der ebenen Curven auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung sind untereinander ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren Asymptoten denjenigen beiden geraden Linien parallel sind, in welchen die gegebene Fläche von der sie berührenden Bildebene geschnitten wird.

Die Gleichung (15) wird befriedigt, wenn einerseits w und t und andrerseits w und u gleichzeitig verschwinden; das heisst, es wird der bezügliche Kegelschnitt von den beiden Coordinatenaxen OX und OY berührt. Erwägen wir hier, dass alle Kegel zweiter Ordnung, die einer gegebenen Fläche dieser Ordnung umschrieben sind, diese Fläche in einer ebenen Curve berühren, so erhalten wir folgenden Satz:

Alle einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung umschriebenen Kegelflächen schneiden irgend eine gegebene feste Tangentialebene derselben in solchen Curven zweiter Classe, welche sämmtlich diejenigen beiden geraden Linien, in welchen die Fläche von ihrer Tangentialebene geschnitten wird, berühren.

13. Wenn die gegebene Fläche nicht durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben werden kann, so sind die stereographischen Projectionen der auf ihr liegenden ebenen Curven ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, deren Axen den Axen derjenigen Ellipsen, in welchen die Fläche von den der Bildebene parallelen Ebenen geschnitten wird, parallel sind. Ein specieller Fall verdient hier eine besondere Aufmerksamkeit; derjenige nämlich, wo einer der beiden Kreispunkte der Fläche Mittelpunkt der Projection S und also der andere derjenige Punkt O ist, in welchem die Fläche von der Bildebene berührt wird. Dann sind alle stereographischen Projectionen *Kreise*, von denen man sagen kann, dass sie unendlich viele Asymptoten haben, deren jedes Paar durch die Doppelgleichung

$$y \pm x\sqrt{-1} = 0,$$

die keine bestimmte (imaginäre) Richtung mehr angiebt, dargestellt wird.[1]) Ferner sind alsdann die Durchschnittscurven der umschriebenen Kegelflächen mit der Bildebene solche Kegelschnitte, die den Kreispunkt O zu einem ihrer beiden Brennpunkte haben, die, wie bekannt, dadurch bestimmt werden, dass in ihnen unendlich viele (imaginäre) Tangenten sich schneiden.*)

Die stereographischen Projectionen aller ebenen Curven auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung sind Kreise, wenn ein Kreispunkt dieser Fläche zum Projectionsmittelpunkt genommen wird.

In dem Falle der Kugel ist *jeder* Punkt derselben ein Kreispunkt; und somit gelangen wir zu demjenigen Satze, welcher dem Ptolemäischen Projectionsverfahren zu Grunde liegt.

Alle einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung umschriebenen Kegelflächen werden von der Tangentialebene in einem Kreispunkte derselben in solchen Curven zweiter Classe geschnitten, deren einer Brennpunkt mit diesem Kreispunkte zusammenfällt.

Auf die Kugel übergehend, können wir jede beliebige Tangentialebene zur schneidenden Ebene nehmen. Dann giebt der Satz den von Quetelet zuerst mitgetheilten Satz, dass, wenn man einem Rotationskegel zwei Kugeln einschreibt, die gleichzeitig eine gegebene Ebene berühren, die beiden Berührungspunkte zugleich die Brennpunkte des durch diese Ebene bestimmten Kegelschnitts sind.[2])

14. Die allgemeine Gleichung (11) der *projicirenden Kegelfläche* verwandelt sich in dem fraglichen Falle, dass die Curve auf der Fläche eine *ebene Curve* ist und durch die Gleichung (14) dargestellt wird, in folgende:

$$B\frac{d^2xy}{(z+d)^2} + D\frac{dy}{z+d} + E\frac{dx}{z+d} + F = 0, \tag{16}$$

*) Ich habe dies zuerst im zweiten Bande meiner „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“ (S. 64) gezeigt und daran die Definition der Brennpunkte geknüpft. Dann habe ich ferner nachgewiesen, dass es auch für Curven höherer Ordnung entsprechende Punkte giebt, und diese Punkte allgemein bestimmt. („Ueber solche Punkte, die bei Curven einer höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen“. [Vgl. S. 290 dieser Ausgabe.]) Auch im Raume finden analoge Beziehungen statt. Bei Flächen zweiter Ordnung vertreten die drei Focalcurven (die Focalellipse, die Focalhyperbel und die imaginäre Focalcurve) das System der beiden reellen und das System der beiden imaginären Brennpunkte der Kegelschnitte. Ich habe gezeigt („System der Geometrie des Raumes“ S. 333) dass die unendlich vielen imaginären Ebenen, welche durch eine beliebige Tangente einer Focalcurve gehen (so wie zwei imaginäre gerade Linien in einem reellen Punkte sich schneiden können, so können sich auch zwei imaginäre Ebenen in einer geraden Linie schneiden), sämmtlich Tangentialebenen der Fläche sind.

und die allgemeine Gleichung der durch dieselbe Curve gehenden Kegelfläche (15) wird

$$Fxy - E\delta xz - D\delta yz + B\delta^2 z^2 = 0. \tag{17}$$

Um die Ebene, in welcher die Curve auf der Fläche liegt, zu bestimmen, braucht man nur eine dieser beiden Gleichungen mit der Gleichung der gegebenen Fläche selbst, nämlich mit

$$z(z + d) + \mu xy = 0 \tag{8}$$

zusammenzustellen. Eliminirt man demnach xy zwischen den beiden letzten der vorstehenden Gleichungen, so ergiebt sich, wenn man den alsdann hervortretenden gemeinschaftlichen Factor z vernachlässigt und berücksichtigt, dass $\mu\delta = d$ ist, folgende Gleichung

$$(F - Bd\delta)z + d(Dy + Ex + F) = 0 \tag{18}$$

für die zu bestimmende Ebene. Diese Ebene schneidet die Bildebene in der geraden Linie, deren Gleichung

$$Dy + Ex + F = 0 \tag{19}$$

ist. —

Der Mittelpunkt der umschriebenen Kegelfläche, welche die gegebene Fläche in der fraglichen ebenen Curve berührt, ist der Pol der Ebene (18) in Beziehung auf die Fläche (8). Für die Coordinaten dieses Pols, die wir durch zwei Accente unterscheiden wollen, ergiebt sich in bekannter Weise:

$$z'' + d = Bd\,\frac{d\delta}{F + Bd\delta}, \quad y'' = -E\,\frac{d\delta}{F + Bd\delta}, \quad x'' = -D\,\frac{d\delta}{F + Bd\delta}.$$

Projicirt man den so bestimmten Punkt und nennt die Coordinaten seiner Projection y^0 und x^0, so verhält sich offenbar

$$z'' + d : y'' : x'' = Bd : -E : -D = d : y^0 : x^0,$$

so dass

$$y^0 = -\frac{E}{B} \quad \text{und} \quad x^0 = -\frac{D}{B} \text{ ist.} \tag{20}$$

15. Es bleibt noch übrig, die Beziehung der geraden Linie (19) und des Punktes (20) zu jedem der beiden Kegelschnitte (14) und (15) nachzuweisen. Der erste dieser beiden Kegelschnitte schneidet (was die Form seiner Gleichung zeigt) die beiden Coordinatenaxen OX und OY in denjenigen beiden Punkten, durch welche auch die Linie (19) geht. (Für geradlinige Flächen ergiebt sich dies auch aus unmittelbarer Anschauung, indem in diesen beiden Punkten die zu projicirende Curve die Bildebene schneidet.) Diese gerade Linie ist demnach die gemeinschaftliche Chorde des Systems der beiden durch den Punkt O gehenden (reellen oder imaginären) geraden Linien, in welchen die Fläche von der Bildebene geschnitten wird, und der

stereographisch auf diese Ebene projicirten Curve (14). Eine solche Chorde ist, wie bekannt, der Polare des Punktes O in Beziehung auf dieselbe Curve parallel, liegt aber diesem Punkte doppelt so nah; sie kann demnach auch für den Fall, dass die Projectionen Ellipsen sind, construirt werden. Wenn insbesondere die Ebene der Curve auf der Fläche in eine Tangentialebene dieser letzteren, die Curve selbst also in ein System von zwei reellen geraden Linien oder in einen Punkt (ein System von zwei imaginären geraden Linien) übergeht, so begegnen wir dem Satze, dass die stereographische Projection irgend eines Punktes einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und der Berührungspunkt in der Bildebene, von der Tangentialebene in jenem Punkte und insbesondere von ihrer Durchschnittslinie mit der Bildebene gleich weit abstehen. Wenn die stereographischen Projectionen *Kreise* sind, so ergeben sich mancherlei particuläre Beziehungen.

Die directe Discussion der Gleichung (15) lehrt, dass dieselbe gerade Linie (19) diejenigen beiden Punkte verbindet, in welchen der bezügliche Kegelschnitt die beiden Coordinatenaxen berührt. Diese immer reelle gerade Linie, in welcher die Bildebene von der Ebene der Curve auf der Fläche geschnitten wird, ist die Polare des Punktes O in Beziehung auf den fraglichen Kegelschnitt (15). Sie ist insbesondere die zum Brennpunkte O gehörige Directrix dieses Kegelschnitts, wenn die Fläche von der Bildebene in einem Kreispunkte berührt wird, oder insbesondere eine Kugel ist.

16. Die Coordinaten des Mittelpunktes des stereographisch projicirten Kegelschnittes (14) sind

$$y = -\frac{E}{B} \quad \text{und} \quad x = -\frac{D}{B}.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Werthe mit den Coordinatenwerthen (20) folgt, dass dieser Mittelpunkt die Projection des Mittelpunkts derjenigen Kegelfläche ist, welche die gegebene Fläche zweiter Ordnung in der ihr aufgeschriebenen Curve berührt. Wenn ich nicht irre, hat Herr Chasles diesen Satz bereits in Liouville's Journal gegeben.*)

Die Coordinaten des Mittelpunktes der durch die Gleichung (15) in Liniencoordinaten dargestellten Curve zweiter Classe sind, wie bekannt,

$$y = -\tfrac{1}{2}\frac{E}{B}, \quad x = -\tfrac{1}{2}\frac{D}{B};$$

und

$$y = -\frac{E}{B}, \quad x = -\frac{D}{B},$$

sind die Coordinatenwerthe desjenigen Punktes, in welchem die beiden den beiden Coordinatenaxen parallelen Tangenten des fraglichen Kegel-

*) [Vgl. Band 7, S. 272.]

schnitts (15) sich schneiden. Dieser Durchschnittspunkt fällt also mit dem Mittelpunkte der Curve (14) und mit der Projection des Mittelpunktes der umschriebenen Kegelfläche zusammen. Wenn die Bildebene die gegebene Fläche in einem Kreispunkte berührt, oder wenn letztere insbesondere eine Kugel ist, so ist der fragliche Punkt der zweite Brennpunkt des Kegelschnittes (15).

17. Wenn man die zuletzt gewonnenen Resultate zusammenfasst, so ergiebt sich nachstehender Satz:

Wenn man auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung ebene Curven und um dieselben die entsprechenden Kegelflächen beschreibt und dann ferner eine beliebige Tangentialebene als Bildebene der stereographischen Projection nimmt, so schneiden die Ebenen der aufgeschriebenen Curven diese Bildebene in geraden Linien, welche einerseits die gemeinschaftlichen Chorden des Systems der beiden (reellen oder imaginären) Durchschnittslinien der Fläche mit der Bildebene und der stereographisch projicirten Curven, andrerseits die Polaren des Berührungspunktes in der Bildebene in Beziehung auf die Durchschnittscurven dieser Ebene mit den umschriebenen Kegelflächen sind. Es sind ferner die Projectionen der Mittelpunkte der umschriebenen Kegelflächen einerseits auch die Mittelpunkte der stereographisch projicirten Curven, und andrerseits diejenigen Punkte, in welchen zwei Tangenten der Durchschnittscurven, welche den durch den Berührungspunkt in der Bildebene gehenden Tangenten parallel sind, sich schneiden.

Wenn die stereographischen Projectionen insbesondere Kreise sind, so sind die Mittelpunkte dieser Kreise zugleich auch die zweiten Brennpunkte derjenigen Kegelschnitte, in welchen die Bildebene von den entsprechenden umschriebenen Kegelflächen geschnitten wird, und sie lassen sich, wie im allgemeinen Falle, als die Projectionen der Mittelpunkte dieser Kegelflächen construiren. In derselben Voraussetzung schneiden die Ebenen der aufgeschriebenen Curven die Bildebene in geraden Linien, welche einerseits die gemeinschaftlichen Chorden des Berührungspunktes in der Bildebene und der Projectionskreise, andrerseits die Directricen der fraglichen Durchschnittscurven sind, welche dem in diesen Berührungspunkt fallenden Brennpunkte zugehören.

Hier ist nicht der Ort, den Gegenstand weiter zu verfolgen.*)

*) Nur eine einzelne Andeutung füge ich in dieser Note noch hinzu.

Je zwei Flächen zweiter Ordnung, die in *einer* ebenen Curve sich schneiden, schneiden sich ausserdem noch in einer zweiten ebenen Curve. Es ist dieses der Fall der beiden Kegelflächen (16) und (17). Die zweiten ebenen Durchschnittscurven jeder dieser beiden Kegelflächen und der gegebenen Fläche zweiter Ordnung reduciren sich auf zwei Paare (reeller oder imaginärer) gerader Linien, die

18. Die einfache lineare Coordinatenbestimmung, die ich in den ersten Nummern der gegenwärtigen Abhandlung gegeben habe, begründet eine analytische Geometrie für geometrische Oerter, die, statt in einer Ebene zu liegen, einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung aufgeschrieben sind. Eine Menge von analytisch-geometrischen Fragen treten uns hier von selbst entgegen; ich bin aber in keine derselben eingegangen. Andrerseits entsprechen jedem neuen Coordinatensysteme

in denjenigen beiden parallelen Ebenen liegen, welche die Fläche in den beiden Punkten O und S berühren. Wenn endlich drei Flächen zweiter Ordnung in derselben ebenen Curve sich schneiden, so gehen diejenigen drei Ebenen, welche die übrigen ebenen Durchschnittscurven je zweier der drei Flächen enthalten, durch dieselbe gerade Linie, oder sind insbesondere parallel. Die Durchschnittscurve der beiden Kegelflächen liegt also in einer Ebene, die den Tangentialebenen in O und S parallel ist. Um diese Ebene analytisch zu bestimmen, wollen wir die Gleichungen der beiden Kegelflächen folgendergestalt schreiben:

$$Bd^2xy + Ddy(z+d) + Edx(z+d) + F(z+d)^2 = 0, \tag{16}$$

$$Fxy - D\delta yz - E\delta xz + B\delta^2 z^2 = 0, \tag{17}$$

und dann, nachdem wir die erste mit F, die zweite mit Bd^2 multiplicirt haben, von einander abziehen. Der resultirenden Gleichung lässt sich alsdann folgende Form geben:

$$\{(F - Bd\delta)z + d(Dy + Ex + F)\}\{F + Bd\delta)z + Fd\} = 0,$$

und sie lässt sich in die folgenden beiden Gleichungen auflösen:

$$(F - Bd\delta)z + d(Dy + Ex + F) = 0 \quad \text{und} \quad (F + Bd\delta)z + Fd = 0. \tag{18}$$

Diese beiden Gleichungen stellen die Ebenen der Durchschnittscurven der beiden Kegelflächen (16) und (17) dar. Die durch die zweite Gleichung dargestellte Ebene ist der Bildebene parallel und giebt für ihren Abstand von dieser:

$$\frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{d} + \frac{B\delta}{F}\right).$$

Jede solche der Bildebene parallele Ebene schneidet die gegebene Fläche zweiter Ordnung und die beiden Kegelflächen (16) und (17) in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten, und wenn insbesondere die beiden Punkte O und S diametral gegenüberliegende Kreispunkte der gegebenen Fläche sind, in Kreisen. Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn man jede ebene Curve auf dieser Fläche durch eine zweier solcher Kegelflächen, deren Mittelpunkte die beiden Scheitel O und S desselben Durchmessers sind, auf die andre derselben projicirt, alle Projectionen unter sich und mit den stereographischen Projectionen der aufgeschriebenen Curven ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind. Wenn die neuen Projectionen in einer und derselben Ebene liegen sollen, so muss der Werth des Quotienten $\frac{B}{F}$ unverändert bleiben und also, nach der 14. Nummer, auch z'' denselben Werth behalten. Die aufgeschriebenen Curven sind alsdann diejenigen, in welchen die gegebene Fläche von solchen umschriebenen Kegelflächen berührt wird, deren Mittelpunkte sämmtlich in einer der Bildebene parallelen Ebene liegen. Die Ebenen der aufgeschriebenen Curven gehen also sämmtlich durch einen und denselben Punkt des durch O und S gehenden Durchmessers der Fläche.

neue Uebertragungsprincipien. Denn diese sind in der allgemeinsten Begriffsbestimmung nichts anderes als *unmittelbare gegenseitige Bestimmung der geometrischen Deutungen einer und derselben analytischen Entwicklung in verschiedenen Coordinatenbestimmungen.* Im vorliegenden Falle sind wir unerwartet und ungesucht zu der allgemeinsten Auffassung der stereographischen Projection und dabei zu einigen neuen Resultaten gelangt, welche auch für nicht geradlinige Flächen ihre volle Geltung behalten. Ich schliesse bei dieser Gelegenheit mit einer allgemeinen Bemerkung, für welche sich Beispiele in dem Vorstehenden finden und die wir gelegentlich weiter durch Beispiele unterstützen werden: dass nämlich, wenn man von der Betrachtung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung ausgeht, manche Sätze sich unmittelbar ergeben, die versteckt bleiben, wenn man zunächst nur Ellipsoïde als Repräsentanten der Flächen dieser Ordnung vor Augen hat.

30.

Ueber eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe.

(Crelle's Journal, Band 34, S. 357—359. 1847.)

1. Neben die bekannte Monge'sche Erzeugung eines einschaligen Hyperboloïds durch die Bewegung einer geraden Linie, die in allen ihren Lagen drei gegebene gerade Linien schneidet, habe ich in meinem Systeme der Geometrie des Raumes folgende zweite gleich einfache Erzeugung der Fläche gestellt.*)

Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien und ein Punkt, durch welchen nach allen Richtungen gerade Linien gehen, gegeben sind, so können die beiden gegebenen geraden Linien in irgend eine andre gegenseitige Lage gebracht werden, ohne dass auf ihnen die Punkte, in welchen sie von den übrigen geraden Linien geschnitten werden, eine andre Lage annähmen; alsdann verwandelt sich, wenn die beiden gegebenen geraden Linien nicht mehr in derselben Ebene liegen, diese Ebene im Allgemeinen in ein einschaliges Hyperboloïd, und jene beiden geraden Linien gehören der einen, die übrigen der andern Erzeugung dieser Fläche an.

Die Erzeugung der Fläche lässt sich auch leicht auf mechanischem Wege zur Anschauung bringen. Man nehme zu diesem Ende zwei dünne Stäbe AZ und $A'Z'$ (Fig. 67), befestige in möglichst vielen beliebigen Punkten $L, M, N, O, P, Q \ldots$ des ersten Stabes die Fäden $LL', MM', NN', OO', PP', QQ', \ldots$ und führe dieselben durch Durchbohrungen des zweiten Stabes, welche in den Punkten $M', N', O', P', Q', \ldots$ so angebracht sind, dass alle Fäden, wenn sie durch Gewichte gespannt werden, in demselben Punkte Ω sich schneiden.

*) Vergl. den fünften Paragraphen der Discussion der Flächen zweiter Ordnung und Classe. *Discussion der Gleichungsform*

$$tu = \mu vw$$

in der zwiefachen Coordinatenbestimmung. S. 99 – 134.

Aendert man alsdann die Lage des zweiten Stabes gegen den ersten durch beliebige Verschiebung und Drehung desselben im Raume, so bilden die Fäden nach der Lagenänderung im Allgemeinen ein einschaliges Hyperboloïd. Die beiden Stäbe vertreten zwei Linien von der einen Erzeugung, die Fäden die Linien von der andern, und jede gerade Linie, welche drei Fäden schneidet, schneidet alle und ist eine

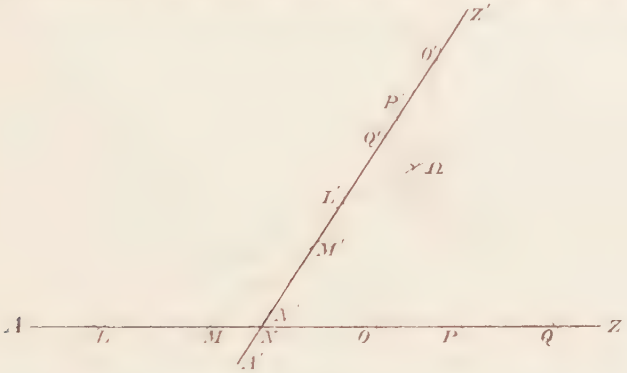

Fig. 67.

neue Linie von der ersten Erzeugung. Jeder neuen Lagenänderung entspricht ein neues Hyperboloïd, welches auch in ein Paraboloïd übergehen kann. Bleiben die beiden Stäbe (Fig. 67 und 68) nach der Lagenänderung in derselben Ebene, so umhüllen die Fäden im Allgemeinen einen Kegelschnitt, der überdies von den beiden Stäben berührt wird. Man kann auch umgekehrt von einem gegebenen Hyperboloïde ausgehend, irgend zwei Linien von der einen Erzeugung für die beiden Stäbe und die Linien von der andern Erzeugung für die Fäden nehmen. Durch continuirliche Bewegung des einen Stabes gegen den andern gestaltet sich das gegebene Hyperboloïd continuirlich in andre Hyperboloïde um, die zuletzt, wenn die beiden Stäbe in dieselbe Ebene gelangen, in einen Kegelschnitt übergehen und die, wenn insbesondere zwei sich entsprechende Punkte N und N' der beiden Stäbe in einen Punkt zusammenfallen, in das System dieses und eines zweiten Punktes Ω ausarten.

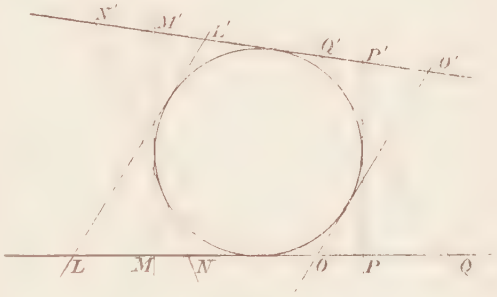

Fig. 68.

2. Das in dem Vorstehenden betrachtete einschalige Hyperboloïd

stellt sich als Fläche zweiter *Classe* dar und kann daher auch in einen *Kegelschnitt* und in ein System von *zwei Punkten* ausarten. Die besprochene Erzeugung ist aber nicht mehr auf Kegelflächen anwendbar. Neben dieser Erzeugung *muss* das Princip der Reciprocität eine zweite liefern, bei welcher das einschalige Hyperboloïd als Fläche zweiter Ordnung sich darstellt, und kann daher auch in eine *Kegelfläche* und ein System von *zwei Ebenen* ausarten. Diese zweite Erzeugung verliert ihre Anwendbarkeit bei Kegelschnitten. Während die geraden Linien, welche das Hyperboloïd bilden, in dem Vorstehenden durch zwei Punkte, die sie verbinden, bestimmt werden, stellen sie sich in dem Nachstehenden als die Durchschnittslinien zweier Ebenen dar.

Wenn zwei gerade Linien A und A′ gegeben sind, welche durch einen gegebenen Punkt C gehen, so lassen sich durch diese beiden geraden Linien unendlich viele Systeme zweier Ebenen legen, deren Durchschnittslinie F in eine durch den Punkt C gehende gegebene Ebene B fällt, und auch selbst durch C geht. Bringt man die beiden Linien A und A′ in irgend eine andre gegenseitige Lage, während die durch jede derselben gehenden und mit ihr als fest verbunden betrachteten Ebenen sich gleichzeitig mit fortbewegen, so verwandelt sich der geometrische Ort für die Linie F, der ursprünglich die Ebene B war, in eine geradlinige Fläche von der zweiten Ordnung. Während die Linie F in ihren verschiedenen Lagen der einen Erzeugung angehört, gehören die Linien A und A′ in ihrer neuen Lage der andern Erzeugung an.

3. Die Monge'sche Erzeugung der Fläche verdoppelt sich nicht durch das Princip der Reciprocität. Dieses Princip führt nur auf die ursprüngliche Construction wieder zurück; denn es ist in geometrischer Beziehung offenbar gleichbedeutend, eine gerade Linie den Bedingungen zu unterwerfen, dass sie einmal jede von drei gegebenen geraden Linien schneidet, das andere mal mit jeder von drei gegebenen geraden Linien in derselben Ebene liegt. Indem wir hiernach das nach Monge erzeugte einschalige Hyperboloïd in gleicher Art als Fläche zweiter *Ordnung* und Fläche zweiter *Classe* betrachten müssen, erkennen wir von vornherein als nothwendige Folge, dass die fragliche Erzeugung sich weder auf Kegelflächen, noch auf Kegelschnitte übertragen lassen könne.

31.

Bemerkung zu der Abhandlung: „Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung".

(Crelle's Journal, Band 34, S. 360—376. 1847.)

1. In dem vorhergehenden kurzen Aufsatze über eine neue Erzeugung der geradlinigen Flächen zweiter „Ordnung und Classe" habe ich hervorgehoben, wie eine Ebene, die man sich aus geraden Linien bestehend vorstellt, in ein einschaliges Hyperboloïd sich umgestalten, so wie umgekehrt, ein gegebenes Hyperboloïd in eine Ebene sich ausbreiten lasse. Man kann dabei eine gerade Linie jeder der beiden Erzeugungen des Hyperboloïds als fest betrachten, und wenn man dieselben zu Coordinatenaxen nimmt, alle analytischen Entwicklungen der in der Ueberschrift angeführten Abhandlung *unmittelbar* von den *Flächen* zweiter Ordnung und Classe auf *Curven* derselben Ordnung und Classe übertragen. *Es lassen sich also auch die Beziehungen der stereographischen Projection von dem Raume auf die Ebene übertragen.* Bei diesen Uebertragungen treten uns Fragen entgegen, deren Erörterung in mehrseitiger Beziehung ein besonderes Interesse darzubieten scheint.

2. Es seien (Fig. 69) OX und $O'X'$ zwei Linien der einen und OY und PP' zwei Linien der zweiten Erzeugung eines gegebenen einschaligen Hyperboloïds. Diese vier Linien bilden ein dieser Fläche aufgeschriebenes Viereck. Man kann alsdann, indem man die beiden Linien OX und OY, und auf der ersteren auch $P, R, S, \ldots$ als fest betrachtet, die Linie $O'X'$, auf welcher die Punkte $P', R', S', \ldots$ unverrückt bleiben, beliebig um den auf OY liegenden Punkt O' so lange sich drehen lassen, bis sie mit OX in eine und dieselbe Ebene rückt. Indem wir alsdann die Punkte $P', R', S', \ldots$ in ihren neuen Lagen durch $p, r, s, \ldots$ bezeichnen, sind die Linien $PP', RR', SS', \ldots$, welche früher das Hyperboloïd bildeten, in den neuen Lagen $Pp, Rr, Ss, \ldots$ mit den beiden Linien OX und OY in dieselbe Ebene gerückt, in

welcher sie einen Kegelschnitt umhüllen, der auch von den beiden eben genannten Linien berührt wird. Der geometrische Ort für diejenigen geraden Linien, welche früher die Fläche bildeten, ist nun die Ebene des umhüllten Kegelschnitts, oder vielmehr derjenige Theil dieser Ebene, welcher *ausserhalb* des Kegelschnitts liegt. Man kann hierbei, um der Anschauung zu Hülfe zu kommen, ein einschaliges Hyperboloïd nach der Richtung der imaginären Axe so zusammengedrückt sich vorstellen, dass es in den Hauptschnitt fällt, wo dann die Curve in demselben von allen Erzeugenden des früheren Hyperboloïds berührt wird.

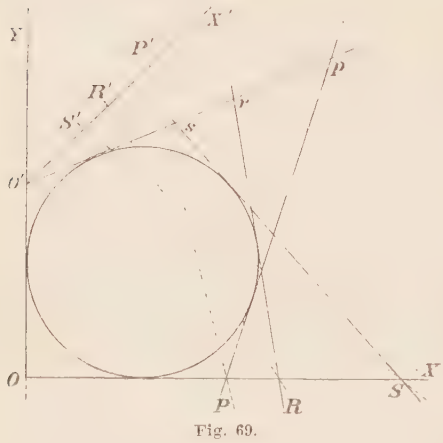

Fig. 69.

3. In Nr. 1 der in der Ueberschrift genannten Abhandlung haben wir die beiden geraden Linien OX und OY zu Coordinatenaxen genommen und durch die auf denselben angenommenen Segmente

$$\xi = OP \quad \text{und} \quad \eta = OQ$$

die Lage eines Punktes auf der Fläche in linearer Weise bestimmt. Es schneiden sich nämlich die beiden durch die Punkte P und Q gehenden zweiten Erzeugenden PM und QM in dem zu bestimmenden Punkte M. Nach der Umgestaltung der Fläche sind die beiden Axen OX und OY zwei Tangenten des umhüllten Kegelschnitts. Auf diesen beiden Tangenten bestimmen die Werthe der beiden Coordinaten ξ und η zwei Punkte P und Q, durch welche sich noch zwei Tangenten an den umhüllten Kegelschnitt, der an die Stelle der gegebenen Fläche getreten ist, legen lassen. Durch den Durchschnitt dieser beiden letzten Tangenten ist der Punkt M, wie früher, *auf lineare Weise* bestimmt.

Wir wollen in dem allgemeinen Falle einer gegebenen Fläche, welche wir in der früheren Abhandlung discutirten, ξ und η die *stereographischen Coordinaten des Punktes M* nennen und auch diese Benennung von dem Raume auf die Ebene übertragen.

4. Wenn andrerseits der Punkt M gegeben ist, so bleibt die Bestimmung seiner stereographischen Coordinaten, die, wenn er einem einschaligen Hyperboloïde angehört, linear ist, nicht mehr linear, nachdem die Fläche sich in eine Curve, oder in anderer Beziehung, in eine

Ebene umgestaltet hat. Um nämlich die Coordinaten des gegebenen Punktes M zu construiren, lege man (Fig. 70) von demselben aus zwei Tangenten MP' und MQ' an die Curve. Diese Tangenten schneiden die beiden Coordinatenaxen nicht bloss in den beiden Punkten P und Q, sondern ausserdem auch noch in den beiden Punkten P' und Q'. Es lässt sich demnach der Punkt M in gleicher Weise sowohl durch die Segmente OP und OQ, die wir ξ und η nannten, als auch durch die Segmente OP' und OQ', die wir ξ' und η' nennen wollen, bestimmen. So wie ξ und η, so sind also auch ξ' und η' stereographische Coordinaten des gegebenen Punktes M. Diese *zwiefache* Coordinatenbestimmung ist dadurch bedingt, dass zwar der doppelten Erzeugung der Fläche auch eine doppelte Umhüllung der Curve durch eine sich bewegende gerade Linie entspricht (die umhüllende gerade Linie kann sich nämlich nach zwiefacher Richtung drehen); dass sich aber nun nicht mehr von vornherein unterscheiden lässt, welcher der beiden Umhüllungen eine gegebene Tangente der umhüllten Curve angehört. Eine andere Bestimmung der stereographischen Coordinatenwerthe eines Punktes bestand nach Nr. 3 der citirten Abhandlung darin, dass wir in diesem Punkte die Tangentialebene construirten, welche alsdann von den beiden Coordinatenaxen OX und OY die Segmente ξ und η abschnitt. Die Tangentialebenen aller Punkte der zu einer Ebene abgeplatteten Fläche fallen mit dieser Ebene zusammen, und folglich müssen die Ausdrücke für ξ und η unter unbestimmter Form sich darstellen und ihre wahren Werthe zwiefach sein.*)

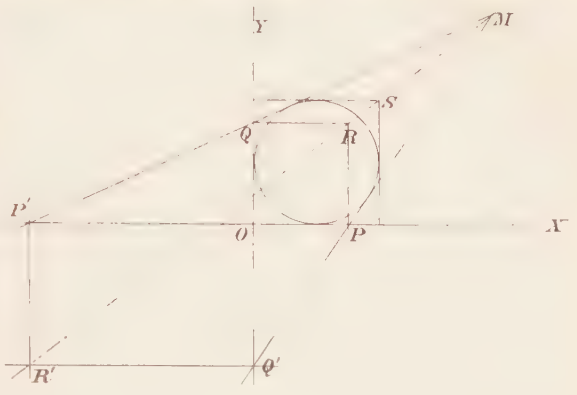

Fig. 70.

Man erhält also durch Vermittelung zweier Coordinatenaxen und eines gegebenen, dieselben berührenden Kegelschnitts, *ein neues Coordinatensystem von solcher Beschaffenheit, dass in demselben die Bestimmung eines Punktes durch seine Coordinaten linear, umgekehrt aber*

*) Es ist dies dem ganz analog, wie man zwei Tangenten in einem Doppelpunkte erhält, nachdem die im Allgemeinen lineare Tangentenbestimmung ihren Dienst versagt hat.

die Bestimmung der Coordinaten eines gegebenen Punktes vom zweiten Grade ist.

5. Da ein gegebener Punkt M, welcher früher der Fläche angehörte, nun sowohl ξ und η, als auch ξ' und η' zu stereographischen Coordinaten hat, so entsprechen jetzt diesem Punkte auch zwei Punkte R und R', die auf gewöhnliche Weise durch die Parallelcoordinatenwerthe

$$x = \xi, \quad y = \eta \quad \text{und} \quad x = \xi', \quad y = \eta'$$

bestimmt sind, als *stereographische Projectionen*, indem auch die Bedeutung dieses Wortes von dem Raume auf die Ebene übertragen wird.

Der *Mittelpunkt der stereographischen Projection* ist in den früheren Betrachtungen der zweite Scheitel desjenigen Durchmessers des gegebenen Hyperboloïds, dessen erster Scheitel in den Durchschnitt der beiden Coordinatenaxen fällt, oder wenn wir ihn analytisch bestimmen, derjenige Punkt der Fläche, dessen stereographische Coordinaten unendlich gross sind. Diese zwiefache Auffassungsweise zeigt, dass wenn das Hyperboloïd durch einen Kegelschnitt ersetzt wird, der Projectionsmittelpunkt der zweite Endpunkt S des Durchmessers OS, oder, was hiermit übereinstimmt, der Durchschnittspunkt derjenigen beiden Tangenten des gegebenen Kegelschnittes ist, die den beiden Coordinatenaxen parallel sind.

Bewiesen ist also durch Uebertragung der Constructionen im Raume auf Constructionen in der Ebene, dass der gegebene Punkt M und seine beiden stereographischen Projectionen R und R', nebst dem Projectionsmittelpunkt S, *alle vier auf derselben geraden Linie liegen.*

6. Eine Gleichung zwischen den beiden stereographischen Coordinaten ξ und η, nämlich

$$\Phi(\eta, \xi) = 0,$$

stellt eine Curve dar, deren Punkte sich in bekannter Weise unmittelbar construiren lassen, wenn man etwa für ξ Werthe beliebig annimmt, die entsprechenden Werthe von η berechnet, und dann die zu diesen Coordinatenwerthen gehörenden Punkte bestimmt.

Neben diese erste Curve stellt sich eine *zweite*, deren Gleichung ganz dieselbe ist, nämlich

$$\Phi(y, x) = 0;$$

nur dass ξ und η als gewöhnliche Parallelcoordinaten construirt und demnach durch x und y ersetzt werden. Diese zweite Curve nennen wir der Consequenz gemäss die *stereographische Projection* der ersten.

Wir haben endlich noch eine *dritte* Curve früher betrachtet, nämlich diejenige, in welcher die dem gegebenen Hyperboloïde in der

ersten Curve umschriebene Abwicklungsfläche die Coordinatenebene schneidet. Diese Curve wurde in Liniencoordinaten, indem wir die Segmente OP und OQ durch $\left(-\frac{w}{t}\right)$ und $\left(-\frac{w}{u}\right)$ bezeichneten, nämlich durch die Gleichung

$$\Phi\left(-\frac{w}{u}, -\frac{w}{t}\right) = 0$$

dargestellt. Die *dritte* Curve hat hier, wo an die Stelle des Hyperboloïds ein Kegelschnitt getreten ist, unverändert ihre Beziehung zur stereographischen Projection der ersten Curve behalten.

7. Es ist nach den Anschauungsarten in Nr. 2 klar, dass *ebene* Curven auf dem gegebenen einschaligen Hyperboloïd, nachdem sich dasselbe in einen Kegelschnitt umgestaltet hat, Curven entsprechen, die diesen Kegelschnitt zweimal, in reellen oder imaginären Punkten, berühren und von der zweiten Ordnung geblieben sind. Der vorletzte Satz von Nr. 10 der in der Ueberschrift citirten Abhandlung geht hier also in den folgenden über:

Die stereographischen Projectionen aller Kegelschnitte, welche den gegebenen Kegelschnitt zweimal berühren, sind solche, deren Asymptoten den beiden gegebenen Tangenten parallel sind, und arten insbesondere, wenn die erstgenannten Kegelschnitte durch den Mittelpunkt der Projection gehen, in gerade Linien aus.

Ich habe die vorstehenden geometrischen Beziehungen nur vorläufig aus der Uebertragung geometrischer Anschauungen vom Raume auf die Ebene abgeleitet, um für die folgenden analytischen Entwicklungen, die durch die Einmischung fremder Factoren verwickelter werden, als es auf den ersten Blick scheinen möchte, Anhaltspunkte zu gewinnen, und um sich orientiren und die Rechnungen controliren zu können. Durch diese analytischen Entwicklungen wird die fragliche Uebertragung, die vielleicht noch nicht ganz gerechtfertigt scheinen möchte, ihre Begründung finden.

8. Wir wollen die gegebene, die beiden Coordinatenaxen OY und OX berührende Curve zweiter Classe durch folgende Gleichung in Liniencoordinaten darstellen:

$$Aw^2 + 2Buw + 2Dtw + 2Etu = 0, \tag{1}$$

indem wir diejenigen beiden Segmente, welche eine beliebige Tangente der gegebenen Curve von den Coordinatenaxen OY und OX abschneidet, durch $\left(-\frac{w}{u}\right)$ und $\left(-\frac{w}{t}\right)$ bezeichnen.*) Dieselbe Curve wird alsdann,

*) Eine Curve zweiter *Classe* ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, die auch durch ein System von *zwei Punkten* vertreten werden kann, während eine

wenn man dieselben Axen beibehält, durch nachstehende Gleichung in gewöhnlichen Parallelcoordinaten dargestellt:

(2) $D^2y^2 + 2(AE - BD)xy + B^2x^2 - 2DEy - 2BEx + E^2 = 0$.*)

Es seien demnach η und ξ die stereographischen Coordinaten irgend eines gegebenen Punktes (y, x). Diesen Punkt können wir dann als den Durchschnitt derjenigen beiden Tangenten construiren, welche von den beiden Axen OY und OX die beiden Segmente η und ξ abschneiden. Dieselben beiden Tangenten schneiden die beiden Axen zum zweiten male; wir nennen die entsprechenden Segmente η' und ξ'. Dann sind nach dem Vorstehenden η' und ξ' ebenfalls stereographische Coordinaten desselben Punktes.

Die Gleichungen der beiden fraglichen, in dem gegebenen Punkt sich schneidenden Tangenten sind hiernach die folgenden:

(3) $$\frac{y}{\eta} + \frac{x}{\xi'} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{y}{\eta'} + \frac{x}{\xi} = 1,$$

und für den Durchschnitt derselben findet sich

(4) $$x = \frac{\frac{1}{\eta'} - \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta'\xi'} - \frac{1}{\eta\xi}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\eta'\xi'} - \frac{1}{\eta\xi}}.$$

Um diese Coordinatenwerthe zu entwickeln, gehen wir zu der Gleichung (1) zurück und erhalten aus derselben, indem wir nach einander

$$-\frac{w}{u} = \eta \quad \text{und} \quad -\frac{w}{t} = \xi$$

setzen:

(5) $$-\frac{w}{t} = \xi' = 2\frac{D\eta - E}{A\eta - 2B} \quad \text{und} \quad -\frac{w}{u} = \eta' = 2\frac{B\xi - E}{A\xi - 2D}.$$

Dieselbe Gleichung (1) giebt unmittelbar, wenn man nach einander u und t verschwinden lässt, für die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden den Coordinatenaxen parallelen Tangenten, das heisst für den *Mittelpunkt der stereographischen Projection:*

(6) $$-\frac{w}{t} = \frac{2D}{A} = \lambda \quad \text{und} \quad -\frac{w}{u} = \frac{2B}{A} = \varkappa;$$

welches Coordinatenwerthe sind, die sich auch aus (5) unmittelbar ergeben, wenn man η und ξ unendlich gross annimmt. Die Coor-

Curve zweiter Ordnung ebenfalls eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, die in ein System von *zwei geraden Linien* ausarten kann.

*) Vergl. Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. II, S. 120. Eine allgemeinere Auffassung des Gegenstandes zunächst für 3 Dimensionen findet man in meinem „System der Geometrie des Raumes". [S. 318 ff.]

dinaten des Mittelpunktes der gegebenen Curve zweiter Classe sind demnach:

$$(7) \qquad x = \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{D}{A} \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2}\varkappa = \frac{B}{A}.$$

Lässt man endlich noch in den Ausdrücken (5) η und ξ verschwinden, so findet sich für die Abstände der Berührungspunkte auf den beiden Axen OY und OX vom Anfangspunkte, bezüglich

$$\frac{E}{D} \quad \text{und} \quad \frac{E}{B}.$$

Setzt man die Werthe (5) für ξ' und η' in die Ausdrücke (4) für x und y, reducirt und lässt den gemeinschaftlichen Factor

$$A\eta\xi - 2D\eta - 2B\xi + 2E$$

in den Nennern und Zählern weg, so erhält man folgende einfache Ausdrücke:

$$(8) \qquad x = 2\frac{(D\eta - E)\xi}{A\eta\xi - 2E} \quad \text{und} \quad y = 2\frac{(B\xi - E)\eta}{A\eta\xi - 2E},$$

für die gewöhnlichen Coordinaten des gegebenen Punktes durch seine stereographischen Coordinaten.

Ebenso erhält man, um x und y durch ξ' und η' auszudrücken:

$$(9) \qquad x = 2\frac{(D\eta' - E)\xi'}{A\eta'\xi' - 2E} \quad \text{und} \quad y = 2\frac{(B\xi' - E)\eta'}{A\eta'\xi' - 2E}.$$ *)

9. Aus den Gleichungen (8) und (9) ergiebt sich mit Berücksichtigung von (6):

$$(10) \qquad \begin{cases} x - \lambda = -\dfrac{2E(\xi - \lambda)}{A\eta\xi - 2E} = -\dfrac{2E(\xi' - \lambda)}{A\eta'\xi' - 2E}, \\ y - \varkappa = -\dfrac{2E(\eta - \varkappa)}{A\eta\xi - 2E} = -\dfrac{2E(\eta' - \varkappa)}{A\eta'\xi' - 2E}, \end{cases}$$

und hieraus

$$(11) \qquad \frac{y - \varkappa}{x - \lambda} = \frac{\eta - \varkappa}{\xi - \lambda} = \frac{\eta' - \varkappa}{\xi' - \lambda}.$$

Wenn man die Werthe von η und ξ, η' und ξ' als Parallelcoordinaten construirt, so erhält die letzte Doppelgleichung die Bestätigung des Schlusssatzes von Nr. 6: dass nämlich jeder gegebene Punkt mit seinen beiden stereographischen Projectionen und dem Projectionsmittelpunkte in gerader Linie liegt.

*) Es ergeben sich diese Ausdrücke unmittelbar aus der Symmetrie der vorstehenden Entwicklungen. Zur Bestätigung kann man aber auch aus den Gleichungen (5) die folgenden ableiten:

$$\xi = 2\frac{D\eta' - E}{A\eta' - 2B}, \quad \eta = 2\frac{B\xi' - E}{A\xi' - 2D},$$

und dann diese Werthe von ξ und η in die Ausdrücke (8) setzen.

10. Wir haben jetzt noch *die stereographischen Coordinaten* η *und* ξ *des gegebenen Punktes durch seine gewöhnlichen Coordinaten* y *und* x *auszudrücken.* Zu diesem Ende nehme man aus (11) den Werth

$$\eta = \frac{y - \varkappa}{x - \lambda}(\xi - \lambda) + \varkappa$$

von η, um ihn in die erste der Gleichungen (10) zu setzen. Dies giebt nach einfachen Reductionen:

$$(12) \qquad (Ay - 2B)\xi^2 - 2(Dy - Bx - E)\xi - 2Ex = 0,$$

und wenn man diese in Beziehung auf ξ quadratische Gleichung auflöst und der Kürze wegen

$$D^2y^2 + 2(AE - DB)xy + B^2x^2 - 2DEy - 2BEx + E^2 = \Omega$$

setzt, worauf

$$\Omega = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve zweiter Classe ist, findet sich:

$$(13) \qquad \xi = \frac{Dy - Bx - E \pm \sqrt{\Omega}}{Ay - 2B},$$

und man kann neben diesen Ausdruck unmittelbar folgenden schreiben:

$$(14) \qquad \eta = \frac{Bx - Dy - E \pm \sqrt{\Omega}}{Ax - 2D}.$$

Ferner ergiebt sich aus den vorstehenden Werthen von ξ und η, unter Berücksichtigung der Gleichungen (6):

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi - \lambda = \dfrac{4BD - A(Dy + Bx + E) \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(y - \varkappa)} \\ \eta - \varkappa = \dfrac{4BD - A(Dy + Bx + E) \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(x - \lambda)}. \end{cases}$$

Aus der Doppelgleichung (11) zeigt sich, dass in den letzten beiden Gleichungen, und folglich auch in den beiden vorhergehenden, die obern und die untern Vorzeichen zusammen genommen werden müssen; wenn also den oberen Zeichen η und ξ entsprechen, so sind die unteren auf η' und ξ' zu beziehen.

11. Vermittelst der in Nr. 8 und 10 entwickelten Ausdrücke lässt sich einerseits jede Curve, deren Gleichung in gewöhnlichen Coordinaten gegeben ist, unmittelbar durch eine Gleichung in den neuen stereographischen Coordinaten ausdrücken; andrerseits jeder geometrische Ort bestimmen, der durch eine Gleichung in den letztgenannten Coordinaten gegeben ist. Zu diesen letzten Bestimmungsarten wollen wir zunächst übergehen und vor Allem die Frage stellen, welcher geometrische Ort durch die allgemeine Gleichung *ersten* Grades in stereographischen Coordinaten gegeben sei. Es sei diese Gleichung:

$$F\eta + G\xi + H = 0. \tag{16}$$

Wir wollen der Kürze wegen

$$4BD - A(Dy + Bx + E) = -A\big(D(y-\varkappa) + B(x-\lambda) + E\big) = \Xi$$

und

$$2(2BD - AE) = \zeta$$

setzen. Dann ist

$$\Xi^2 - A^2\Omega = A^2\xi(y-\varkappa)(x-\lambda); \tag{17}$$

also kann man die Gleichungen (15) auf folgende Weise schreiben:

$$\xi - \lambda = \frac{\Xi \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(y-\varkappa)} \quad \text{und} \quad \eta - \varkappa = \frac{\Xi \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(x-\lambda)}. \tag{18}$$

Führt man die vorstehenden Werthe von $\xi - \lambda$ und $\eta - \varkappa$ in die Gleichung (16) ein, nachdem man dieselbe (indem der Kürze wegen

$$F\varkappa + G\lambda + H = H'$$

gesetzt wird) zuvor auf die Form

$$F(\eta - \varkappa) + G(\xi - \lambda) + H' = 0$$

gebracht hat, so erhält man

$$\Big(\frac{F}{x-\lambda} + \frac{G}{y-\varkappa}\Big)(\Xi \pm A\sqrt{\Omega}) + A^2H' = 0$$

für die Gleichung des durch die Gleichung (16) dargestellten Orts, in gewöhnlichen Parallelcoordinaten. Um diese Gleichung zu entwickeln, sondere man zunächst das irrationale Glied

$$\Xi + \frac{A^2H'(y-\varkappa)(x-\lambda)}{F(y-\varkappa) + G(x-\lambda)} = \pm A\sqrt{\Omega}$$

ab. Wenn man hierauf quadrirt und die identische Gleichung (17) berücksichtigt, so wird

$$A^2(y-\varkappa)(x-\lambda)$$

zum gemeinschaftlichen Factor und nach Hinwegglassung desselben ergiebt sich

$$\begin{cases} \zeta\big(F(y-\varkappa) + G(x-\lambda)\big)^2 + 2H'\Xi\big(F(y-\varkappa) + G(x-\lambda)\big) \\ \qquad + A^2H'^2(y-\varkappa)(x-\lambda) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

also

$$\begin{cases} \Big(F(y-\varkappa) + G(x-\lambda) + \frac{H'}{\zeta}\Xi\Big)^2 = \Big(\frac{H'}{\zeta}\Big)^2\big(\Xi^2 - A^2\xi(y-\varkappa)(x-\lambda)\big) \\ \qquad = \Big(\frac{AH'}{\zeta}\Big)^2\Omega; \end{cases} \tag{20}$$

letzteres wieder in Folge der identischen Gleichung (17). Setzt man endlich noch

$$\frac{1}{A}\Big\{\frac{\zeta}{H'}\big(F(y-\varkappa) + G(x-\lambda)\big) + \Xi\Big\} = \Theta,$$

so lässt sich der letzten Gleichung folgende Form geben:

$$\Omega - \Theta^2 = 0. \tag{21}$$

Hieraus ist zu sehen, dass derjenige geometrische Ort, welcher durch die Gleichung (16) dargestellt wird, oder (was nach Nr. 6 dasselbe ist) welcher die durch die Gleichung ersten Grades in Parallelcoordinaten

$$Fy + Gx + H = 0 \tag{22}$$

dargestellte gerade Linie zur stereographischen Projection hat, eine Curve zweiter Ordnung ist, welche die gegebene Curve auf der geraden Linie

$$\Theta = 0$$

zweimal berührt und die überdies (was aus der Gleichungsform (19) in die Augen springt) *durch den Projectionsmittelpunkt geht.*

Es stimmt dieses mit dem Resultat in Nr. 7 überein. Um die gerade Linie Θ zu finden, brauchen wir nur diejenigen beiden Tangenten der gegebenen Curve zweiter Classe zu bestimmen, die von den Coordinatenaxen Segmente abschneiden, welche die Gleichung

$$F\eta + G\xi + H = 0 \tag{16}$$

befriedigen, und dann die Berührungspunkte auf diesen Tangenten durch eine gerade Linie zu verbinden.

Wenn man aus der Gleichung (19) nur diejenigen Glieder nimmt, die $y - \varkappa$ und $x - \lambda$ in der ersten Potenz enthalten, und sie gleich Null setzt, so stellt die daraus hervorgehende Gleichung

$$F(y - \varkappa) + G(x - \lambda) = 0$$

nach bekannter Entwicklungsart die Tangente der bezüglichen Curve in dem Projectionsmittelpunkte dar, dessen Coordinaten $\varkappa$ und λ sind Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, dass *diese Tangente der geraden Linie* (22), *dass heisst der geradlinigen Projection der Curve* (21) *parallel ist.*

12. Man kann auch, von der Gleichung (21) ausgehend, zu der Gleichung (16) zurückkehren. Aber so wie jeder Punkt *zwei* stereographische Projectionen hat (5), so hat auch die Curve (21) neben der geraden Linie (16) noch einen zweiten geometrischen Ort zu ihrer stereographischen Projection. Um denselben zu finden, bieten sich unmittelbar die Gleichungen (8) dar. Einfacher aber kann man sich der Gleichungen (5) bedienen, und gelangt dann noch leichter zum Ziele, wenn man in die Gleichung (16) für η und ξ ihre Werthe in η' und ξ' setzt. Aus der Note zu Nr. 8 ergiebt sich:

$$\xi - \lambda = \frac{\zeta}{A^2(\eta' - \varkappa)}, \quad \eta - \varkappa = \frac{\zeta}{A^2(\xi' - \lambda)}; \tag{23}$$

wonach die Gleichung (16), wenn man sie zuvor wieder auf die Form

$$F(\eta - \varkappa) + G(\xi - \lambda) + H' = 0$$

bringt, sogleich in nachstehende sich verwandelt:

$$(24) \qquad A^2 H'(\eta' - \varkappa)(\xi' - \lambda) + F\xi(\eta' - \varkappa) + G\xi(\xi' - \lambda) = 0.$$

Diese Gleichung, in welcher auch die Accente weggelassen werden können, weil η' und ξ' veränderliche Grössen sind, die sich gerade so construiren lassen wie η und ξ, *ist eine zweite Gleichung zwischen denselben Coordinaten, welche dieselbe Curve darstellt, die durch die Gleichung* (16) *dargestellt wird.* Wenn wir in der letzten Gleichung η' und ξ' als Parallelcoordinaten construiren und demnach durch y und x ersetzen, so erhalten wir

$$(25) \qquad A^2 H'(y - \varkappa)(x - \lambda) + F\xi(y - \varkappa) + G\xi(x - \lambda) = 0$$

für die Gleichung *der zweiten Projection der Curve* (21), deren erste Projection die gerade Linie (22) ist. Diese zweite Projection hängt, wie die erste, nur von zwei Constanten ab; sie ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel sind, und die überdies durch den Projectionsmittelpunkt geht. Die Tangente dieser Hyperbel in dem Projectionsmittelpunkte ist, wie aus der vorstehenden Gleichung unmittelbar hervorgeht, der geraden Linie (22) *parallel.* In Gemässheit der Schlussbemerkung in Nr. 11 wird demnach die projicirte Curve (21) von ihrer zweiten Projection im Projectionsmittelpunkte *berührt.*

13. Im Allgemeinen werden die beiden stereographischen Projectionen einer gegebenen Curve

$$\Psi(y, x) = 0$$

nur eine einzige Curve bilden. Sollen die beiden Projectionen als gesonderte Curven sich darstellen, so ist es nöthig, dass die Ausdrücke (15) in Folge der vorstehenden Gleichung der gegebenen Curve rational werden. Dies geschieht namentlich auch dann, wenn an die Stelle der Gleichung (21) folgende tritt:

$$(26) \qquad \Omega - \sigma^2 Z^2 = 0,$$

welche irgend einen *beliebigen* Kegelschnitt darstellt, der die gegebene Curve zweiter Classe in ihren beiden Durchschnitten mit einer gegebenen geraden Linie

$$Z = 0$$

berührt, und der, weil der constante Coefficient σ^2 positiv ist, ganz ausserhalb derselben liegt. Je nachdem die gegebene gerade Linie die gegebene Curve schneidet oder nicht schneidet, oder berührt, hat der fragliche Kegelschnitt mit dieser Curve einen reellen oder einen

imaginären doppelten Contact, oder eine vierpunktige Osculation. Wenn Z insbesondere auf eine blosse Constante sich reducirt, sind beide Curven concentrisch und ähnlich und ähnlich liegend. In Folge der Gleichung (26) lösen die beiden Gleichungen (18) sich in folgende beide Paare rationaler Gleichungen auf:

$$(27)\qquad \begin{cases} \xi - \lambda = \dfrac{\Xi + A\sigma Z}{A^2(y-\varkappa)}, & \xi' - \lambda = \dfrac{\Xi - A\sigma Z}{A^2(y-\varkappa)}, \\ \eta - \varkappa = \dfrac{\Xi + A\sigma Z}{A^2(x-\lambda)}, & \eta' - \varkappa = \dfrac{\Xi - A\sigma Z}{A^2(x-\lambda)}, \end{cases}$$

In diesen vier Ausdrücken sind die Zähler lineare Functionen von x und y.

14. Um die gegenwärtigen Bemerkungen nicht zu weit auszudehnen, berühre ich nur noch einige der interessanteren Fragen mit wenigen Worten.

Unerörtert ist in dem Vorstehenden noch die Frage geblieben, *welches die allgemeine Gleichung der geraden Linie in den neuen stereographischen Coordinaten sei.* Es seien die Coordinaten der geraden Linie $\binom{u'}{w'}$ und $\binom{t'}{w'}$; ihre Gleichung in Parallelcoordinaten ist dann:

$$(28)\qquad u'y + t'x + w' = 0,$$

und geht nach den Verwandlungsformeln (8) unmittelbar in die folgende über:

$$w'(A\eta\xi - 2E) + 2u'\eta(B\xi - E) + 2t'\xi(D\eta - E) = 0;$$

und *dieselbe* Gleichung erhalten wir auch nach den Verwandlungsformeln (9) zwischen η' und ξ'. Es lässt sich diese Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$(29)\qquad A(u'\varkappa + t'\lambda + w')\eta\xi - 2E(u'\eta + t'\xi + w') = 0.$$

Wenn man η und ξ mit y und x vertauscht, so stellt die resultirende Gleichung

$$(30)\qquad A(u'\varkappa + t'\lambda + w')xy + 2E(u'y + t'x + w') = 0$$

die stereographische Projection der geraden Linie (28) dar; und zwar liegen nach der eben gemachten Bemerkung auf der durch die letzte Gleichung dargestellten Curve die *beiden* Projectionen jedes Punktes der geraden Linie. Diese Curve ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den beiden Coordinatenaxen parallel sind, und welche diese Axen in denselben beiden Punkten schneidet, wie die gerade Linie selbst. Da die Gleichung (30), eben wie die Gleichung der geraden Linie, nur zwei lineare Constanten $\binom{u'}{w'}$ und $\binom{t'}{w'}$ enthält, so gehen alle

solche Hyperbeln, die durch *einen* festen Punkt gehen, zugleich auch noch (wir abstrahiren hier von den beiden unendlich weit entfernten Durchschnittspunkten) durch einen *zweiten* festen Punkt, und diese beiden festen Punkte liegen, wie leicht ersichtlich ist, wenn man zwei Gleichungen von der Form (30) von einander abzieht, auf einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie.*)

Wenn die gerade Linie (28) *unendlich weit rückt* und also t' und u' verschwindet, so ergiebt sich aus (30):

$$Axy - 2E = 0.$$

Ihre stereographische Projection ist also eine vollkommen bestimmte Hyperbel, deren Asymptoten mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Wenn insbesondere

$$u'x + t'\lambda + w' = 0$$

ist, so geht die gerade Linie (28) durch den Projectionsmittelpunkt. Dann reducirt sich die Gleichung (30) auf:

$$u'y + t'x + w' = 0,$$

das heisst *eine solche gerade Linie ist ihre eigene stereographische Projection.*

15. Jedem reellen Werthepaare $\eta\,\xi$ entspricht ein Punkt, der ausserhalb der gegebenen Curve Ω liegt; und umgekehrt, jedem ausserhalb liegenden Punkte entsprechen reelle Coordinatenwerthe. Liegt aber ein Punkt innerhalb der Curve Ω, so sind seine zwiefachen Coordinatenwerthe *imaginär*, und mit diesen die beiden stereographischen Projectionen des Punktes. Liegt er auf dem Umfange der Curve, so fallen seine beiden Projectionen zusammen. Wenn folglich ein gegebener geometrischer Ort die gegebene Curve Ω schneidet, so erhält man für die innerhalb dieser Curve liegenden (reellen) Punkte imaginäre Coordinatenwerthe, welche die Gleichung des Orts befriedigen. Insofern man also, wie bei gewöhnlichen Parallelcoordinaten, nur reelle Werthe der beiden Veränderlichen berücksichtigt, *werden die innerhalb der gegebenen Curve Ω liegenden Theile des gegebenen Orts nicht mehr durch die Gleichung desselben dargestellt.* Nimmt man zum Beispiel die zuletzt betrachtete Gleichung

$$A(u'x + t'\lambda + w')\eta\xi - 2E(u'\eta + t'\xi + w') = 0, \tag{29}$$

*) Und zwar nach dem von mir zuerst aufgestellten allgemeinen Satze, dass alle Curven n^{ter} Ordnung, welche durch Gleichungen dargestellt werden, in denen m lineare Constanten vorkommen (wir nehmen m gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}n(n+3)$ an), wenn sie durch dieselben $m-1$ Punkte gehen, ausserdem noch in denselben $n^2-(m-1)$ Punkten sich schneiden. *Theorie der algebraischen Curven.* S. 9.

so stellt dieselbe die gerade Linie (28) in ihrer ganzen Ausdehnung nur dann vor, wenn diese gerade Linie die gegebene Curve Ω nicht schneidet. Wenn sie hingegen dieselbe schneidet, so stellt die vorstehende Gleichung die innerhalb der Curve Ω liegenden Punkte nicht mehr dar, sondern *eine nach beiden Erstreckungen hin unbegrenzte, aber in der Mitte unterbrochene gerade Linie.* Den Punkten des fehlenden in den Durchschnittspunkten mit der gegebenen Curve Ω begrenzten Segments entsprechen die imaginären Coordinatenwerthe, welche die vorstehende Gleichung befriedigen.

Da die beiden Projectionen eines gegebenen Punktes immer auf derjenigen geraden Linie liegen, welche diesen Punkt mit dem Projectionsmittelpunkte verbindet, und auf dieser geraden Linie, bevor sie imaginär werden, zusammenfallen, so ist klar, dass überhaupt diejenigen geraden Linien, welche durch den Projectionsmittelpunkt und die Durchschnittspunkte eines gegebenen Orts mit der gegebenen Curve Ω gehen, die stereographische Projection des Orts in den (einzigen) Projectionen der Durchschnittspunkte berühren müssen. (Wenn demnach der Ort von der n^{ten} Ordnung ist, so ist die Projection desselben von der $2n^{\text{ten}}$ Classe.) Je nachdem insbesondere eine gegebene gerade Linie, deren Projection die durch die Gleichung

$$A(u'x + t'\lambda + w')xy - 2E(u'y + t'x + w') = 0 \tag{30}$$

dargestellte Hyperbel ist, die Curve Ω schneidet oder nicht, liegt der Projectionsmittelpunkt ausserhalb oder innerhalb dieser Hyperbel. Wenn die gerade Linie die Curve berührt, so geht die Hyberbel in ein System von zwei geraden Linien über.

16. Insbesondere können wir auch als Curve Ω eine *Hyperbel*, und als Coordinatenaxen die beiden *Asymptoten* derselben annehmen. Dann fällt (indem wir in der Gleichung (1) B und D verschwinden lassen) der Projectionsmittelpunkt S mit dem Punkte O, den wir zum Anfangspunkt genommen haben, zusammen.

17. Insbesondere lässt sich auch die gegebene Curve zweiter Classe Ω durch *ein System von zwei Punkten* ersetzen, und es lassen sich durch diese beiden Punkte die beiden Coordinatenaxen legen. (Es ist alsdann $2BD = AE$.)

18. Es bleiben noch die Uebertragungsprincipien zu erwähnen, die sich an die neue allgemeine Coordinatenbestimmung anknüpfen. Die Uebertragung kann stattfinden: *erstens* von einer Projection auf die projicirten Oerter; *zweitens* von einer Projection auf die andere, und *drittens* von dem projicirten Orte auf seine Projection.

Einer beliebigen geraden Linie als Projection entspricht als pro-

jicirter Ort ein Kegelschnitt, der die gegebene Curve zweiter Classe Ω zwiefach berührt und überdies durch den Projectionsmittelpunkt geht. Dem Durchschnitt zweier gegebenen geraden Linien entspricht ein einziger Durchschnitt der beiden entsprechenden Kegelschnitte; und dieser ist unter den *vier* Durchschnitten derselben dadurch bestimmt, dass er mit dem Projectionsmittelpunkte und demjenigen Punkte, in welchem die beiden Berührungschorden der Kegelschnitte und der Curve Ω sich schneiden, in gerader Linie liegt. *Der Winkel, welchen zwei gerade Linien bilden, ist* (nach der Bemerkung am Ende von Nr. 11) *demjenigen Winkel gleich, unter welchem die entsprechenden Kegelschnitte im Projectionsmittelpunkte sich schneiden.* Parallelen geraden Linien entsprechen also Kegelschnitte, die sich im Projectionsmittelpunkte berühren.

19. Einer gegebenen geraden Linie als *erster* Projection entspricht als *zweite* Projection eine Hyperbel, deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel sind, und die durch den Projectionsmittelpunkt geht. Dem Durchschnitte zweier gegebenen geraden Linien der ersten Projection entspricht in der zweiten Projection der zweite Durchschnitt der beiden entsprechenden Hyperbeln. Es schneiden sich jene beiden geraden Linien *unter denselben Winkeln*, wie die beiden Hyperbeln im Projectionsmittelpunkte. Wenn insbesondere jene parallel sind, berühren sich diese in dem letztgenannten Punkte.

20. Wenn man gegebene gerade Linien stereographisch projicirt, so entspricht ihnen als vollständige Projection eine Hyperbel, deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel sind. Dem einzigen Durchschnitte zweier gegebenen geraden Linien entsprechen zwei solche Durchschnitte der beiden Hyperbeln, die mit dem Projectionsmittelpunkte in gerader Linie liegen. Den Winkelpunkten eines Dreiecks entsprechen die Winkelpunkte eines Sechsecks, dessen Diagonalen in dem Projectionsmittelpunkte sich schneiden. Nur den Punkten auf dem Umfange der Curve Ω entsprechen einzige (zusammenfallende) Punkte.

21. Ich gebe hier keine Beispiele der Uebertragung. Nur die letzte Bemerkung möge gestattet sein, dass sich den beiden reellen Tangenten der gegebenen Curve Ω, die wir zu Coordinatenaxen genommen haben, auch *imaginäre* substituiren lassen. Dann liegen die beiden Punkte O und S innerhalb dieser Curve. Ganz interessante Resultate ergeben sich hier insbesondere dann, wenn man den Punkt O in einem der beiden *Brennpunkte* der Curve Ω annimmt: dann fällt der Projectionsmittelpunkt in den andern Brennpunkt. Es lässt sich dies unmittelbar mit den entsprechenden Erörterungen der in der Ueberschrift citirten Abhandlung in Verbindung bringen, wenn man

erwägt, dass bei der Umgestaltung einer Fläche zweiter *Classe* in eine Curve dieser Classe die *Kreispunkte* der erstern zu *Brennpunkten* der letztern werden.*)

22. Es scheint angemessen, zum bessern Verständnisse des Vorstehenden schliesslich noch einige Anschauungen hinzuzufügen.

In Figur 71 ist als Curve Ω ein Kreis angenommen, der die beiden (rechtwinkligen) Axen OY und OX berührt. Demnach ist S der Projectionsmittelpunkt.

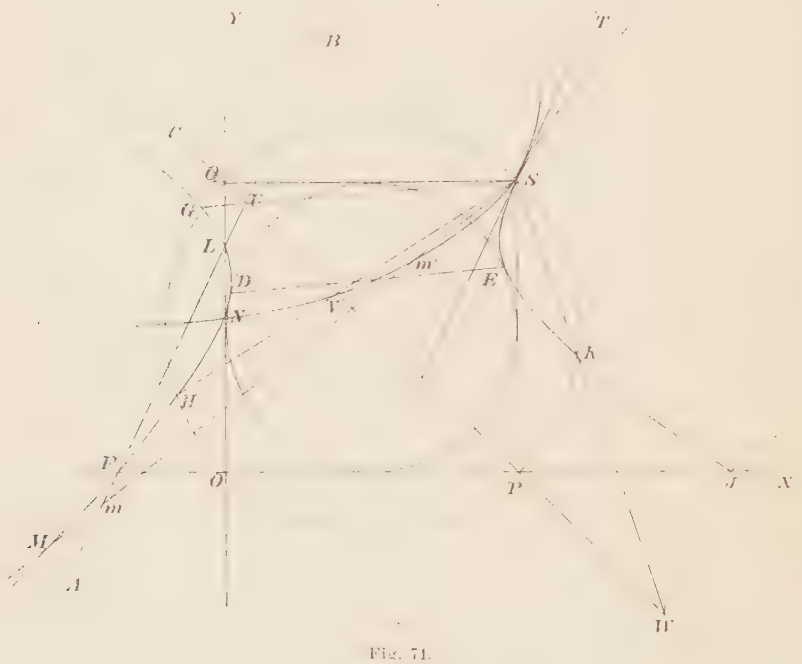

Fig. 71.

Die gerade Linie AB ist die stereographische Projection einer Hyperbel, welche den Kreis Ω in den beiden Punkten D und E berührt, welche durch die beiden Punkte F und L, in denen die Axen von der geraden Linie AB geschnitten werden, und durch den Projectionsmittelpunkt S geht, und welche in dem letztgenannten Punkte eine gerade Linie ST, die mit AB parallel ist, zur Tangente hat.

Neben der geraden Linie AB hat die soeben bestimmte Hyperbel zu ihrer Projection auch noch eine Hyperbel. Diese *zweite* Hyperbel geht ebenfalls durch den Projectionsmittelpunkt S und berührt in diesem Punkte die Linie ST, und folglich auch die projicirte (erste) Hyperbel. Ihre Asymptoten sind den beiden Axen parallel, und sie

*) Vergl. „System der Geometrie des Raumes. S. 255."

schneidet diese Axen in den beiden Punkten J und N, durch welche auch die projicirte Hyperbel geht.

Wenn man durch den Projectionsmittelpunkt S irgend eine gerade Linie zieht, welche die projicirte Hyperbel, die gerade Linie AB und die zweite Hyperbel bezüglich in den Punkten M, m und m' schneidet, so sind m und m' die beiden stereographischen Projectionen des Punktes M.

Wenn wir den Radius des Kreises Ω gleich 10 setzen, so dass

$$\frac{D}{A} = \frac{B}{A} = 10 \quad \text{und} \quad \frac{E}{A} = 100$$

ist, so ist die Gleichung der geraden Linie AB:

$$y = 2x + 15. \tag{31}$$

Man kann also die projicirte (erste) Hyperbel durch die lineare Gleichung:

$$\eta = 2\xi + 15 \tag{32}$$

in stereographischen Coordinaten darstellen. Dieselbe Hyperbel können wir aber auch nach Nr. 12*) durch die zweite Gleichung

$$7\eta\xi - 180\eta - 60\xi + 2000 = 0 \tag{33}$$

in denselben stereographischen Coordinaten darstellen, und

$$7xy - 180y - 60x + 2000 = 0 \tag{34}$$

ist die Gleichung der zweiten Projection dieser Curve, nämlich der zweiten Hyperbel.

Nimmt man statt der Gleichung (31) folgende an:

$$y + x = 20,$$

so ist die durch dieselbe dargestellte gerade Linie CW eine der beiden stereographischen Projectionen des durch den Projectionsmittelpunkt S gehenden concentrischen Kreises, welcher demnach durch die lineare Gleichung in stereographischen Coordinaten

$$\eta + \xi = 20$$

und daneben noch durch eine zweite Gleichung von der Form der Gleichung (33) dargestellt wird. Dieser Kreis ist als ein Kegelschnitt zu betrachten, welcher den gegebenen Kreis doppelt berührt; nur ist die Berührungschorde unendlich weit vorgerückt.

Der Durchschnitt U der beiden geraden Linien AB und CW entspricht dem Durchschnitte G der beiden projicirten Curven. Dieser

*) Man braucht nur in die Gleichung (32) für ξ und η bezüglich

$$2\,\frac{D\eta - E}{A\eta - 2B} = 20\,\frac{\eta - 10}{\eta - 20} \quad \text{und} \quad 2\,\frac{B\xi - E}{A\xi - 2D} = 20\,\frac{\xi - 10}{\xi - 20}$$

zu setzen.

Durchschnitt G ist unter den letzten drei der vier Durchschnittspunkte S (der Projectionsmittelpunkt) G, H und K derjenige, welcher auf einer durch S gehenden geraden Linie liegt, die der Berührungschorde DE parallel ist (das heisst, die durch den Durchschnittspunkt von DE mit der unendlich weit liegenden Berührungschorde der beiden Kreise geht). Es liegen die Punktepaare G und U, H und V, K und W mit dem Punkte S in gerader Linie. U einerseits und V und W andrerseits sind diejenigen beiden Punkte, in welchen die erste Projection UW des concentrischen Kreises bezüglich die eine und die andere Projection der ersten Hyperbel schneidet. Die zweite Projection des eben genannten Kreises ist eine (nicht gezeichnete) dritte Hyperbel, welche die zweite in S berührt und auf den Linien SV und SW die gerade Linie AB schneidet.

23. In Fig. 72 ist die stereographische Projection der geraden Linie PQ eine Hyperbel, deren Asymptoten den beiden Coordinatenaxen OX und OY parallel sind, die durch die beiden Durchschnitte

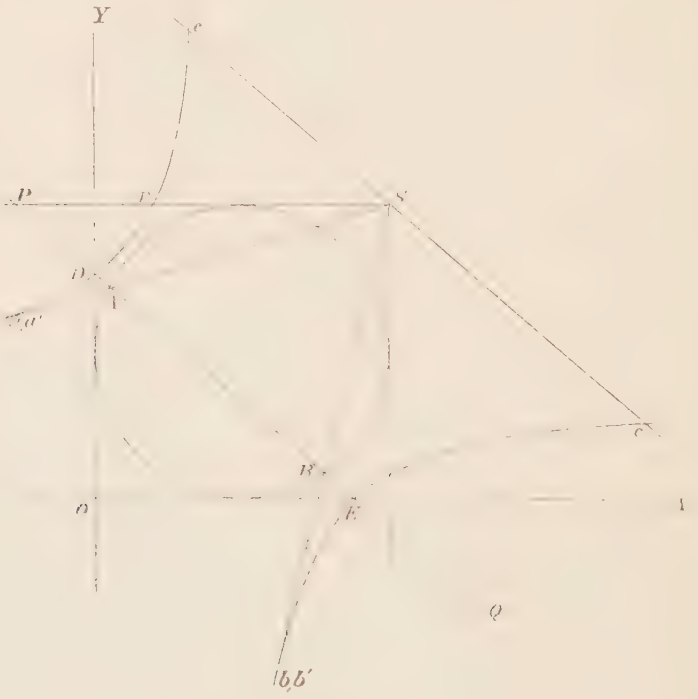

Fig. 72.

D und E der geraden Linie PQ mit diesen beiden Axen geht, und die von denjenigen beiden geraden Linien, welche den Projectionsmittelpunkt S mit den beiden Durchschnitten der geraden Linie PQ

und des Kreises Ω verbinden, berührt wird. Jede durch den Projectionsmittelpunkt S gehende gerade Linie schneidet die Hyperbel in zwei Punkten, welche die beiden stereographischen Projectionen desjenigen Punktes sind, in welchem sie die gerade Linie PQ schneidet. Auf den beiden geraden Linien SA und SB fallen die beiden Projectionen bezüglich in aa' und bb' zusammen.

Wenn man die beiden Segmente OD und OE bezüglich gleich 15 und 18 annimmt, so geht die Gleichung (30), indem man

$$-\frac{t'}{w'} = \frac{1}{18}, \quad -\frac{u'}{w'} = \frac{1}{15}, \quad \frac{E}{A} = 100 \text{ und } \varkappa = \lambda = 20$$

setzt, in die folgende über

$$15\eta\xi - 120\eta - 100\xi + 1800 = 0.$$

Diese Gleichung stellt die nach beiden Erstreckungen hin unbegrenzte gerade Linie PQ mit Ausnahme desjenigen Segments dar, welches innerhalb des Kreises Ω liegt.

32.

Sur la réflexion de la lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom.

(Crelle's Journal, Band 35, S. 100—105. 1847.)

1. On sait que, pour l'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes, il existe trois coniques: une ellipse, une hyperbole et une courbe imaginaire, situées dans les trois plans principaux, qui, par rapport à ces surfaces, jouissent de propriétés analogues à celles des deux systèmes de foyers, réelles et imaginaires, d'une courbe du même degré. M. Chasles a donné le nom très propre de focales à ces courbes. Pour les deux paraboloïdes, ces trois courbes se trouvent remplacées par deux paraboles, et enfin pour les cônes et les cylindres, par deux lignes droites.

Parmi les propriétés nouvelles de ces courbes remarquables démontrées par moi dans un ouvrage qui a paru dans les premiers jours d'Août dernier, la suivante me paraît plus particulièrement digne d'attetinon, savoir:

Tous les rayons qui, en partant de points de l'une des deux focales réelles d'une surface quelconque du second degré, vont couper cette surface, sont réfléchis par elle de manière qu'ils se réunissent de nouveau sur la même focale, ou bien qu'ils se propagent, comme émanés directement de cette courbe.

J'ai tiré ce théorème, comme corollaire, du théorème suivant que j'ai démontré analytiquement de la manière la plus simple:

Les trois axes d'un cône quelconque circonscrit à une surface du second degré, coïncident avec les trois axes de chacun des trois cônes qui, avec le cône circonscrit, ont un centre commun, et qui en outre passent par les trios focales. En construisant les trois surfaces confocales (l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe et l'hyperboloïde à deux nappes) qui

*passent par le centre commun, les trois axes en question sont les normales de ces trois surfaces confocales.**)

Dans le présent Mémoire, je vais donner des démonstrations nouvelles du premier théorème, démonstrations qui auront l'avantage d'en faciliter la discussion et de le lier à d'autres théorèmes connus.

2. Menons par un point donné de la surface proposée du second degré un plan normal quelconque. Un rayon lumineux, situé dans ce plan et rencontrant la surface dans le point donné, ne sortira pas du plan après avoir été réfléchi par la surface. Si donc ce rayon est parti d'un point quelconque d'une focale, il sera réfléchi, suivant notre théorème, vers un autre point de la même courbe, en faisant des angles égaux avec la normale. Il suit de là que les deux rayons, incident et réfléchi, constituent avec la normale et la tangente de la surface comprises dans le même plan, ce qu'on a nommé un *faisceau harmonique*. Comme un tel faisceau, en rencontrant un plan quelconque, et en particulier le plan principal, contenant la focale, le coupe en quatre points harmoniques, il suit que la tangente et la normale vont couper le plan principal en question en deux points tels que chacun d'eux soit situé sur la polaire de l'autre. Réciproquement, si cette dernière rélation a lieu, ce qu'on prouvera plus loin avec facilité, notre théorème en découle immédiatement.

3. Pour fixer les idées, prenons un ellipsoïde *et son ellipse focale*, située dans le plan du plus grand et du moyen axe de la surface. Les rayons émanés d'un point lumineux, placé dans un point quelconque de la focale, se réunissent de nouveau, pour former, après une première réflexion, une ligne lumineuse coïncidante avec la focale. Chaque réflexion nouvelle ramènera ce rayon de nouveau vers la même focale. L'apparition sera (généralement parlant) la même, mais plus intense si, au lieu d'un seul de ses points, la focale entière devient lumineuse. Il s'agit maintenant de savoir de quelle manière la lumière se distribue sur la focale, et en particulier, quels sont les différents points de la surface qui renvoient la lumière émanée d'un point donné de la focale vers un autre point donné de la même courbe. La dernière question revient, suivant notre théorème, à mener par les deux points donnés que nous désignerons par M et M', une ligne droite, et par cette ligne droite un plan, qu'on fait tourner autour d'elle, et de chercher tous les points de la surface où les normales coïncident avec le plan tournant, dans l'une quelconque de ses positions. Pour résoudre

*) System der analytischen Geometrie des Raumes, p. 334.

cette question nous nous serviront des procédés ordinaires de la géométrie analytique.

4. Soit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \tag{1}$$

l'équation de la surface; sa focale située dans le plan x, y sera représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2 - \gamma^2} = 1. \tag{2}$$

Prenons pour équations de la normale, dans un point quelconque (x', y', z') de la surface, les suivantes:

$$x = kz + \varkappa, \quad y = lz + \lambda, \tag{3}$$

en posant, pour abréger

$$k = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x'}{z'}, \quad l = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \cdot \frac{y'}{z'},$$

$$\varkappa = x' - kz' = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} x', \quad \lambda = y' - lz' = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2} y'.$$

Les coordonnées du point où la normale (3) rencontre le plan x, y sont

$$x = \varkappa, \quad y = \lambda;$$

donc nous obtenons pour sa polaire, prise par rapport à la focale, l'équation

$$\frac{\varkappa x}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{\lambda y}{\beta^2 - \gamma^2} = 1,$$

ou bien, en substituant, celle-ci:

$$\frac{x' x}{\alpha^2} + \frac{y' y}{\beta^2} = 1.$$

Cela est évidemment l'équation de la trace, sur le plan x, y, du plan tangent à la surface au point (x', y', z'). Il suit de là d'abord le théorème connu que, si par un point donné de la surface on mène le plan tangent et la normale qui coupent un plan principal quelconque dans une droite et un point N, ce point sera le pôle de la droite, par rapport à la focale comprise dans le même plan. De là résulte que ce point N est situé sur la polaire d'un point quelconque de la droite en question, c'est-à-dire du point d'intersection d'une tangente quelconque, passant par le point (x', y', z'), avec le plan principal. C'est ce qu'il fallait prouver pour compléter la démonstration du numéro (2).

5. J'ai donné le théorème que je viens de démontrer dans le numéro précédent, page 332 de mon Système de géométrie analytique à trois dimensions. En parcourant le Journal de M. Liouville, je

trouve qu'il appartient à M. Chasles qui l'a transcrit de son Aperçu historique p. 384 et qui en a tiré le théorème suivant:

„Si par les différents points d'une section plane quelconque d'une surface du second degré, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur chacun des plans principaux de la surface seront situés dans une section conique. Le cône circonscrit à la surface suivant la section plane rencontrera le plan principal suivant une autre conique; et si l'on conçoit la focale de la surface comprise dans ce plan, la première conique, lieu des pieds des normales, sera la polaire de cette seconde conique par rapport à la focale.“*)

Le théorème peut être généralisé de deux manières. D'abord on voit qu'une courbe quelconque tracée sur la surface peut être substituée à la section plane. Puis, il est évident que les développements analytiques du numéro précédent subsistent également si, au lieu de supposer le point (x', y', z') sur la surface même, on le prend arbitrairement dans l'espace. C'est seulement l'interprétation géométrique qui est changée, en se généralisant. Le plan tangent est remplacé par le plan polaire du point donné, pris par rapport à la surface, et la normale par la perpendiculaire, abaissée du même point sur ce plan polaire.

Si l'on circonscrit à une surface du second degré un cône quelconque, le plan mené par la courbe de contact, et la perpendiculaire abaissée du centre du cône sur ce plan, vont rencontrer un plan principal de la surface dans une ligne droite et un point; ce point sera le pôle de la ligne droite, par rapport à la focale située dans le même plan principal.

On pourrait tirer de ce théorème le théorème plus général du numéro (1) de manière comme nous avons tiré de celui notre théorème sur la réflexion. Au même théorème se joignent une foule de théorèmes, soit nouveaux, soit déjà énoncés par d'autres ou par moi.

6. Revenons sur nos considérations analytiques, et soit, en désignant par μ un coefficient constant quelconque,

$$\mu z + Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

l'équation d'un plan, tournant autour d'une ligne fixe, située dans le plan x, y et représentée par les équations

$$z = 0, \quad Ax + By + C = 0. \tag{5}$$

Soit cette ligne fixe celle qui passe par les deux points, pris arbitrairement sur la focale et désignés plus haut par M et M'. Pour

*) Théorèmes sur les surfaces du second degré. Par M. Chasles, Liouville, Journ. VIII, p. 215.

la condition que la normale (3) soit comprise toute entière dans ce plan, nous obtenons les deux équations

$$Ak + Bl + \mu = 0, \quad A\varkappa + B\lambda + C = 0.$$

La dernière de ces deux équations est indépendante de μ, et par conséquent de la position particulière du plan tournant. En y mettant pour $\varkappa$ et λ leurs valeurs, nous aurons

$$A\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}x' + B\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2}y' + C = 0. \tag{6}$$

Si donc on prend x' et y' pour variables, cette équation représentera un plan perpendiculaire au plan principal et qui coupe la surface suivant une courbe, qui est le lieu géométrique des points qui réfléchissent les rayons lumineux, émanés de l'un des deux points M et M', vers l'autre de ces points. Il résulte sur le champ de ce que nous venons de prouver que, suivant la courbe d'intersection dans ce plan, la surface donnée est touchée par une surface de révolution ayant M et M' pour foyers.

Etant partis du premier théorème du numéro (1) nous sommes donc parvenus au théorème suivant:

Deux points, pris arbitrairement sur une focale d'une surface du second degré, sont les deux foyers d'une surface de révolution, circonscrite à la surface proposée.

Réciproquement, pour parvenir à notre théorème de réflexion focale, il suffit de démontrer directement ce dernier théorème. C'est ce que j'ai fait de la manière la plus simple.*)

7. Pour construire l'équation (6), nous observons d'abord que les coordonnées du pôle de la ligne droite (5) (qui passe par les deux points M et M', situés sur la focale) sont par rapport à la focale (2):

$$x = -\frac{A}{C}(\alpha^2 - \gamma^2), \quad y = -\frac{B}{C}(\beta^2 - \gamma^2);$$

et de là on obtient l'équation (6) à construire, pour le plan polaire du point ainsi déterminé, pris par rapport à la surface proposée.

Supposons toujours que la surface soit un ellipsoïde, dont l'ellipse extérieure de la figure est une section principale et l'ellipse intérieure l'ellipse focale. Sur cette dernière courbe nous prendrons arbitrairement deux points M et M' (Fig. 73); il s'agit de déterminer les points de la surface qui réfléchissent les rayons, émanés de M, vers M'. Pour cela construisons par rapport à la focale le pôle P de la ligne droite MM', et en suite, par rapport à la section principale, la polaire

*) System der analytischen Geometrie des Raumes. p. 259.

SS' du point P; enfin menons par SS' le plan perpendiculaire au plan principal. Tous les points de la courbe d'intersection de la surface et de ce plan réfléchiront les rayons lumineux, émanés de M, vers M'.

Si le point M' décrit la focale de manière que MM' tourne autour du point M, le point P parcourra la tangente de la focale en M, et en même temps le plan coupant tournera autour d'une ligne droite fixe, perpendiculaire au plan principal et coupant ce plan dans le point Q, pôle de la tangente en M par rapport à la section principale. Pour qu'il y ait effectivement réflexion, il faut que le plan de la section perpendiculaire coupe la surface dans une courbe réelle, il faut donc que le point P soit extérieur à la section principale. Si le point P coïncide successivement avec les deux points L et K où la tangente en M coupe la surface principale, les courbes réfléchissantes correspondantes se réduiront à ces points mêmes et renverront le rayon incident respectivement vers les deux points N et R. Ces deux points s'obtiennent facilement, parce qu'ils sont les points de contact sur les deux tangentes nouvelles LN et KR qu'on peut mener à la focale par les deux points L et K.

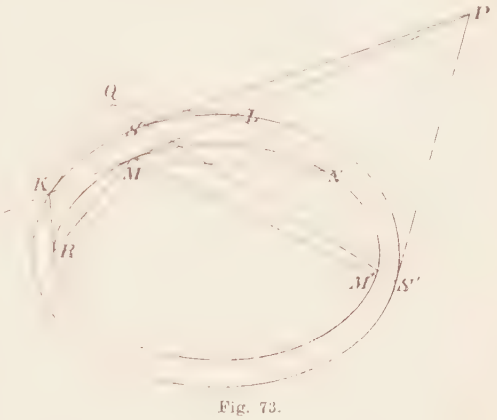

Fig. 73.

Les points N et R sont les deux points limites de la partie éclairée $NM'R$ de la focale par les rayons émanés du point M.

8. Si au lieu de l'ellipse focale on suppose l'hyperbole focale perçant l'ellipsoïde dans ses ombilics, il faut distinguer les deux cas où les rayons frappent soit la partie concave, soit la partie convexe de la surface. Ici se présente comme cas particulier celui ou les rayons émanent d'un ombilic et celui où les rayons incidents sont parallèles à une des deux asymptotes de la focale, en formant un cylindre droit à base circulaire.

Je n'entrerai pas dans ce détail et je ne discuterai pas non plus le cas des autres surfaces du second degré; cette discussion ne présente aucune difficulté.

33.

On a New Geometry of Space.

(Proceedings of the Royal Society of London, Band 14, S. 53—58. 1865.)

Infinite space may be considered either as consisting of points or transversed by planes. The points, in the first conception, are determined by their coordinates, by x, y, z for instance, taken in the ordinary signification; the planes, in the second conception, are determined in an analogous way by their coordinates, introduced by myself into analytical geometry, by t, u, v for instance. The equation

$$tx + uy + vz = 1$$

represents, in regarding x, y, z as variable, t, u, v as constant, a plane by means of its points. The three constants t, u, v are the coordinates of this plane. The same equation, in regarding t, u, v as variable, x, y, z as constant, represents a point by means of planes passing through it. The three constants x, y, z are the coordinates of this point.

The geometrical constitution of space, referred hitherto either to points or to planes, may as well be referred to *right lines*. According to the double definition of such lines, there occurs to us a double construction of space. In the first construction we imagine infinite space to be traversed by lines, themselves consisting of points; an infinite number of such lines in all directions pass through any given point; the point may describe each of the lines. This constitution of space is admitted when, in optics, we regard luminous points sending out in all directions rays of light, or, in mechanics, forces acting on points in any direction. In the second construction, infinite space is regarded likewise as traversed by right lines, but these lines are termined by planes passing through them. Every plane contains an infinite number of lines having within it every position and direction, round each of which the plane may turn. We refer to this second

construction, when, in optics, we regard, instead of rays, the corresponding fronts of waves and their consecutive intersections, or when, in mechanics, according to Poinsot's ingenious philosophical views we introduce into its fundamental principles „couples", as well entitled to occupy their place as ordinary forces. The instantaneous axes of rotation are right lines of the second description.

The position of a right line depends upon four constants, which may be determined in a different way. I adopted for this purpose the ordinary system of three axes of coordinates. A line of the first description which whe shall distinguish by the name of *ray*, may be determined by means of two projections, for instance by those within XZ and YZ, represented by

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

or by

$$tx + v_x z = 1,$$
$$uy + v_y z = 1.$$

In admitting the first system of equations, a ray is determined in a linear way by means of the four constants r, s, ϱ, σ, which may be called its four coordinates, two of them, r and s, indicating its direction, the remaining two, after its direction being determined, its position in space. In adopting the second pair of equations, t, u, v_x, v_y will be the coordinates of the ray.

A right line of the second description, which we shall distinguish by the name of *axis*, is determined by any two of its points. It is the common intersection of all planes passing through both points. We may select the intersection of the axis with the two planes XZ and YZ, as two such points, and represent them by

$$xt + z_t v = 1,$$
$$yu + z_u v = 1,$$

or by

$$t = pv + \pi$$
$$u = qv + \varkappa.$$

In making use of the first pair of equations, the four constants x, y, z_t, z_u, indicating the position of the two points within XZ and YZ, are the coordinates of the axis. In adopting the second pair, the four coordinates of the axis are p, q, π, $\varkappa$.

A complex of rays or axes is represented by means of a single equation between their four coordinates; a *congruency*, containing all congruent lines of two complexes, by means of two such equations;

a *configuration*, containing the right lines common to three complexes, by three equations. In a complex every point is the vertex of a cone, every plane contains an enveloped curve. In a congruency there is a certain number of right lines passing as well through a given point as confined within a given plane. A configuration is generated by a moving right line.

In a *linear complex* the right lines passing through a gived point constitute a plane; all right lines within a given plane pass through a fixed point. Two linear complexes intersect each other along a *linear congruency*. In such a linear congruency there is a single right line passing as well through a given point as confined within a given plane. Three linear complexes meet along a *linear configuration*.

Instances of linear complexes are obtained by means of linear equations between the four coordinates of any one of the four systems. A linear configuration of rays represented by three such equations between r, s, ϱ, σ is a paraboloid, immediately obtained; between t, u, v_x, v_y a hyperboloid. A linear configuration of axes represented by three linear equations between p, q, π, $\varkappa$ is a hyperboloid, immediately obtained; between x, y, z_t, z_u a paraboloid. Instances of linear congruencies are exhibited by means of two linear equations, as well between t, u, v_x, v_y as between x, y, z_t, z_u, and their right lines easily constructed.

The general linear equation, however, between any four coordinates does not represent a linear complex of the most general description. Besides, there is a want of symmetry, the four coordinates depending upon the choice of both planes, XZ and YZ. This double inconvenience, if not eliminated, would render it impossible to adapt in a proper way analysis to the new geometrical conception of space. But it may be eliminated in the most satisfactory way.

For that purpose I introduced (in confining myself to the case of the coordinates r, s, ϱ, σ) a fifth coordinate $(s\varrho - r\sigma)$, which is a function of the four primitive ones. Then the linear equation between the five coordinates

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0$$

is the most general of a linear complex. After having been rendered homogeneous by a sixth variable introduced, it becomes of a complete symmetry with regard to the three axes OX, OY, OZ. The introduction of the fifth coordinate $(s\varrho - r\sigma)$ is the real basis of the new analytical geometry, the exploration of which is indicated in the ordinary way.

In the paper presented, a complete analytical discussion of a linear complex is given. We may for any point of space construct the *corresponding plane* containing all traversing rays, and *vice versa*. Right lines of space associate themselves into couples of *conjugated lines;* to each line a conjugated one corresponds. Any right line intersecting any two conjugated, is a ray of the complex. Each ray of it is to be regarded as two coincident conjugated lines. It is easily shown that each linear complex may be represented by means of any one of the following three equations, in which k indicates the same constant:

$$s\varrho - r\sigma = k, \quad \sigma = kr, \quad \varrho = ks.$$

Accordingly a linear complex depends upon the position of a fixed line (depending itself upon four constants) and the constant k. Hence it likewise follows that such a complex of rays may, without being changed, as well turn round that fixed line, the *axis of the complex*, as move along it, parallel to itself. The same results may be confirmed by means of the transformation of ray-coordinates, and thus analytically determined by the primitive constants A, B, C, D, E, F, the position of the axis of the complex and its constant k. In a peculiar case, where k becomes *zero*, all rays of the complex meet its axis.

A linear congruency of rays, along which an infinite number of linear complexes meet, is represented by the equations of any two of these complexes. Through a given point of space passes only one ray, *corresponding* to it, as there is only one corresponding ray confined within a given plane. There is, with regard to each complex passing through the congruency one right line conjugated to a given one. All these conjugated lines constitute one generation of a hyperboloid, while the right lines of its other generation are rays of the congruency, which therefore may be generated by a variable hyperboloid turning round one of its right lines.

The axes of all complexes intersecting each other along a linear congruency meet at right angles a fixed line, which is the axis of the congruency. Among the complexes there are especially two, the axes of which are met by their rays. These axes, meeting themselves the axis of the congruency, are its directrices. A linear congruency, depending upon eight constants, is fully determined by means of its two *directrices*. Each right line intersecting both directrices is one of its rays. The plane parallel to both directrices, and at equal distance from them, is the *central plane* of the congruency; the point where it meets, under right angles, the axis of the congruency, its *centre*. The two lines bisecting within the central plane the projections of the two

directrices, are its *secondary axes*. The directrices may be as well both *real* as both *imaginary*. In peculiar cases the two directrices are congruent, or one of them is at an infinite distance. Each of the complexes being given by means of its axis and its constant h, both directrices of the congruency along which they intersect one another are analytically determined. A congruency being given by means of its directrices, the constants and axes of all complexes passing through it are determined.

A linear configuration of rays is the common intersection of any three linear complexes, and represented by their equations, $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, $\Omega'' = 0$. Each complex represented by an equation of the form $\Omega + u\Omega' + v\Omega'' = 0$, equally passes through the same configuration. So does any congruency along which two such complexes meet. A linear configuration is a hyperboloid; its rays consitute one of its generations, while the directrices of all traversing congruencies constitute the other. The central planes of all these congruencies meet in the same point — the *centre* of the hyperboloid. Its *diameters* meet both directrices of the different congruencies. The directrices are either real or imaginary; accordingly the diameters meet the hyperboloid, or meet it not. If the two directrices are congruent, the diameters become asymptotes. The hyperboloid passes into a paraboloid if there is one directrix infinetely distant.

A linear configuration is determined by means of three congruencies as it is by means of three complexes. That ray of it which meets one directrix of each congruency is parallel to the other. By drawing two planes through the two directrices of each of the three congruencies parallel to its central plane, we get a rhomboid circumscribed about the hyperboloid, the points of contact, within the six planes, being the points where the six directrices are intersected by the rays. A hyberboloid being given, we may revert to the congruencies and complexes constituting it. Finally the equation of the hyperboloid in ordinary coordinates x, y, z is derived.

If we proceed to complexes of the second degree, the field of inquiry is immensely increased. Here any given point of infinite space is the vertex of a cone of the second order, and likewise within any given plane there is a curve of the second class enveloped by rays of the complex. The whole of the infinite number of cones, as well as of the infinite number of enveloped conics, is represented by an equation of the second order between the five ray-coordinates r, s, ϱ, σ and $(s\varrho - r\sigma)$. The general analytical theory of contact may immediately be applied to complexes of the second order, touched by linear complexes etc.

In order to elucidate the geometrical conceptions explained, I thought it proper to present, in Section II, an application to optics, leading to a complex, of a simple description. Rays of light, constituting in air a complex will likewise do so after being submitted to any reflexions or refractions whatever. Let us, for instance, suppose that the complex in air is of the first order and its constant equal to zero; i. e. that its rays start in every direction from all points of a luminous right line. Let these rays enter a *biaxal crystal* by any plane surface. Let the luminous line and this surface be perpendicular to each other. Then, within the crystal, the double-refracted rays constitute a new complex, wich is represented, like the primitive one, and independently of it, by means of an equation between ray-coordinates.

For this purpose I return to a paper of mine of the year 1838, concerning double refraction, at the end of which, after having mentioned the application of Huyghen's principle to Fresnel's wave-surface and the construction of Sir William Hamilton, I proposed a new construction of the double-refracted rays in the most general case. Here I first made use of an auxiliary ellipsoid, with regard to which the polar plane of every point of the wave-surface is one of its tangent planes, and reciprocally the pole of every plane touching the surface one of its points. In representing Fresnel's ellipsoid by the equation

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

the new auxiliary ellipsoid may be represented by

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

or

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = abc$$

and replaced, for most purposes, by the similar one

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

The construction, as far as we are concerned here, may be expressed thus: — Construct at the moment when Fresnel's wave-surface is formed the polar line of the trace along which the surface of the crystal is intersected by the elementary wave. The two refracted rays meet the wave-surface in the two points where it is intersected by the polar line constructed.[1]) In the paper of 1838 I promised a discussion of the construction given, but neglected it till the present time.

This discussion immediately leads us to represent the complex of double-refracted rays by an equation, and at the same time we meet with several theorems worthy of notice.

If there is any incident ray, the *plane of refraction*, containing both double-refracted rays, is congruent with the diametral plane of the auxiliary ellipsoid, the conjugated diameter of which is perpendicular to the plane of incidence. All rays incident within the same plane are, after double refraction, confined again within the same plane. While the plane of incidence turns round the vertical, the corresponding plane of refraction turns round that diameter of the auxiliary ellipsoid, the conjugated diametral plane of which is the surface of the crystal. Whatever may be the plane or curved surface by which a crystal is bounded in a given point, all corresponding planes of refraction pass through a fixed right line.

A complex of rays starting in air in all directions from every point of a luminous right line, perpendicular to the surface of the crystal, is represented by the equation

$$r\sigma = s\varrho,$$

the luminous right line being the axis OZ, while the two remaining axes, OX and OY, are within the surface of the crystal any two right lines perpendicular to each other. This complex is transformed by double refraction into another, the equation of which assumes the most simple form,

$$r\sigma = ks\varrho,$$

in especially admitting that the two axes, OX and OY, are congruent with the axes of the ellipse along which the auxiliary ellipsoid is cut by the surface of the crystal, and that the third axis, OZ, is, within the crystal, the diameter of the auxiliary ellipsoid; the conjugated diametral plane is that surface. k is a constant indicating the ratio of the squares of the two axes of the ellipse.

The complex of double-refracted rays is of the second order, its equation may be easily submitted to analytical discussion. All its rays passing through any given point constitute a cone of the second order. This cone remains the same if the point describes a right line, passing through the origin. Likewise there is in any given plane a hyperbola, enveloped by rays of the complex. Peculiar cases are easily determined. The complex of double-refracted rays may be described in three different ways by a variable linear congruency. In the peculiar case in which the surface of the crystal is a principal section, OZ becomes perpendicular to it; if it is one of the circular sections of the auxiliary ellipsoid, the constant k becomes equal to unity, i. e. all double-refracted rays meet the axis OZ. From the general case the case of uniaxal crystals is immediately derived.

34.

On a New Geometry of Space.

(Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Bd. 155, S. 725—791. 1865.)

I. On Linear Complexes of Right Lines.

1. Infinite space may be considered either as consisting of points or transversed by planes. The points, in the first conception, are determined by their coordinates, by x, y, z for instance, taken in the ordinary signification; the planes, in the second conception, are determined in an analogous way by their coordinates, introduced by myself into analytical geometry, by t, u, v for instance.

The equation

$$tx + uy + vz + 1 = 0$$

represents, in regarding x, y, z as variable and t, u, v as constant, a plane by means of its points. The three constants t, u, v are the coordinates of this plane. The same equation, in regarding t, u, v as variable, x, y, z as constant, represents a point by means of planes passing through it. The three constants are the coordinates of the point.

A point given by its coordinates and a point determined by its equation, or geometrically speaking by an infinite number of planes intersecting each other in that point, are quite different ideas, not to be confounded with one another. That is the case also with regard to a plane given by its coordinates and a plane represented by its equation, or considered as containing an infinite number of points. Hence is derived a double signification of a right line. It may be considered as the geometrical locus of points, or described by a point moving along it, and accordingly represented by two equations in x, y, z, each representing a plane containing that line. But it may likewise be considered as the intersection of an infinite number of planes, or as enveloped by one of these planes, turning round it like an axis

accordingly it is represented by two equations t, u, v, each representing an arbitrary point of the line. The passage from one of the two conceptions to the other is a discontinuous one.*)

2. The geometrical constitution of space, hitherto referred either to points or to planes, may as well be referred to right lines. According to the double definition of such lines, there occurs to us a double construction of space.

In the first construction we imagine infinite space to be transversed by lines themselves consisting of points. An infinite number of such lines pass in all directions through any given point; each of these lines may be regarded as described by a moving point. This constitution of space is admitted when, in optics, we consider luminous points as sending out in all directions luminous rays, or, in mechanics, forces acting on points in every direction.

In the second construction infinite space is likewise regarded as transversed by right lines, but these lines are determined by means of planes passing through them. Every plane contains an infinite number of right lines having within it every position and direction, around each of which the plane may turn. We refer to this second conception when, in optics, we regard, instead of rays, the corresponding fronts of waves and their consecutive intersections, or when, in mechanics, according to Poinsot's ingenious philosophical views, we introduce into its fundamental principles „couples", as well entitled to occupy their place as ordinary forces. The instantaneous axes of rotation are right lines of the second description.

3. In order to constitute a new geometry of space, we may fix the position of a right line, depending upon four constants, in a different way. We might do it be means of four given right lines, by determining, for instance, the shortest distance of any new line from each of the four given ones. But all such conceptions were rejected, and the ordinary system of axes adopted in order to fix the position in space of a right line. Thus the new researches, indicated by the foregoing remarks, are intimately connected with the usual methods of analytical geometry. The two fragments presented on this occasion are only calculated to give an exact idea of the new way of proceeding, and to show its importance, greater perhaps than it appears at first sight.

*) According to this discontinuity, a plane curve represented by ordinary coordinates may have a conjugate which disappears if the same curve be represented by means of line-coordinates. See „Sytem der analytischen Geometrie," n. 330.

4. A right line of the first description, which we shall distinguish by the name of *ray*, may be determined by means of two of its projections. We may select the projections within the planes XZ and YZ, in order to get, without generalizing, the greatest symmetry obtainable, and give to their equations either the form

$$\begin{cases} x = rz + \varrho, \\ y = sz + \sigma, \end{cases} \tag{1}$$

or

$$\begin{cases} tx + v_x z = 1, \\ uy + v_y z = 1. \end{cases} \tag{2}$$

In adopting the first system of equations, the four constants r, s, ϱ, σ are *the coordinates of the ray:* two of them, r, s, indicating its direction, the remaining two, ϱ, σ, after its direction is determined, giving its position in space. The ray meets the plane XY in the point

$$x = \varrho, \quad y = \sigma.$$

In adopting the second system of equations, we get, in order to determine the same ray, the four new constants t, u, v_x, v_y, which likewise may be regarded as its coordinates; t and u $\left(\text{equal to } \frac{1}{\varrho} \text{ and } \frac{1}{\sigma}\right)$ indicating the reciprocal values of the intercepts cut off on OX and OY by the two projections of the ray, v_x and v_y $\left(\text{equal to } \left(-\frac{r}{\varrho}\right) \text{ and } \left(-\frac{s}{\sigma}\right)\right)$ the reciprocal values of the two intercepts cut off both on OZ.

5. A right line of the second description, which we shall distinguish by the name of *axis*, is determined by any two of its points. We may select the intersection of the axis with the planes XZ and YZ as two such points, and represent them by the system of equations

$$\begin{cases} xt + z_t v = 1, \\ yu + z_u v = 1, \end{cases} \tag{3}$$

or by the following equally symmetrical,

$$\begin{cases} t = pv + \varpi, \\ u = qv + \varkappa. \end{cases} \tag{4}$$

In making use of the first two equations, the four constants x, y, z_t, z_u are *the coordinates of the axis*, indicating the position of the two points within the planes XZ, YZ.

In making use of the second system of equations, p, q, ϖ, $\varkappa$ are the four coordinates of the axis, this axis being fixed by the inter-

sections of two planes, one of which is the plane projecting it on XY, and determined by two of the four coordinates,

$$t = r = \frac{1}{x}, \quad u = z = \frac{1}{y},$$

while the other plane determined by the two remaining ones,

$$t = pv = -\frac{x}{y}v, \quad u = qv = -\frac{z}{y}v,$$

and represented by the equation

$$px + qy + z = 0,$$

passes through the axis and the origin.

6. If we consider the four coordinates of a ray as variable quantities, we may in attributing to them any given values successively obtain any ray whatever transversing space. But in admitting that an equation takes place between the four coordinates, rays are excluded: we say *that the remaining rays constitute a complex represented by the equation.*

In admitting two such equations existing simultaneously, those rays the coordinates of which satisfy both equations constitute a *congruency represented by the system of equations.* A „congruency" contains all congruent rays of two complexes, it may be regarded as their mutual intersection. If we admit that three equations are simultaneously verified by the four coordinates, the corresponding rays constitute a configuration (Strahlengebilde, surface reglee) *represented by the system of three equations.* A configuration may be regarded as the mutual intersection of three complexes, i. e. as the geometrical locus of congruent rays belonging to all three complexes. Four complexes or two congruencies intersect each other in a limited number of rays. The number of rays constituting a configuration, a congruency, a complex, and space, are infinities of first, second, third, and fourth order.

7. If rays are replaced by axes, complexes, congruencies, and configurations of rays are replaced by *complexes, congruencies, and configurations of axes.*

8. A configuration of rays or axes, represented by three linear equations, is, according to the choice of coordinates, either a hyperboloid or a paraboloid. Let the three equations of a configuration of rays be

$$(5) \quad \begin{cases} Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho = 0, \\ A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\varrho = 0, \\ A''r + B''s + C'' + D''\sigma + E''\varrho = 0. \end{cases}$$

From these equations we derive by elimination six new ones, each containing two only of the four variables. Let them be

$$ar + bs = 1, \tag{6}$$

$$c\varrho + d\sigma = 1, \tag{7}$$

$$a'r + c'\varrho = 1, \tag{8}$$

$$b's + d'\sigma = 1, \tag{9}$$

$$a''r + d''\sigma = 1, \tag{10}$$

$$b''s + c''\varrho = 1. \tag{11}$$

In order to represent the configuration, the three primitive equations (5) may be replaced by any three of the six new ones.

The equation (7) may be written thus,

$$cx + dy = 1, \tag{7*}$$

x and y replacing ϱ and σ. It represents a right line within XY, intersected by the rays of the configuration.

The equations (8) and (9) represent within XZ, YZ two points enveloped by the projections of the rays of the configuration; consequently the rays themselves meet two right lines passing through these points, and being parallel to OY, OX. From the equations (8) and (9) if written thus,

$$\frac{1}{c'} = \frac{a'}{c'} \cdot r + \varrho,$$

$$\frac{1}{d'} = \frac{b'}{d'} \cdot s + \sigma,$$

we immediately derive

$$c'x = 1, \quad c'z = a',$$

$$d'y = 1, \quad d'z = b',$$

representing the two right lines.

Thus by selecting in order to represent the configuration the three equations (7), (8), (9), and interpreting them geometrically, we have proved that all its rays intersect three fixed right lines, one of which falls within XY, while the two remaining ones are parallel to OY and OX. Hence these rays, meeting three right lines parallel to the same plane, constitute a hyberbolic paraboloid.

In determining the paraboloid, we may replace any one of three equations we made use of by the equation (6), which indicates that all rays are parallel to a given plane. This plane, if drawn through the origin, is represented by the equation

$$ax + by = z,$$

obtained from (6) by writing $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ instead of r, s.

It may be sufficient here to state that a configuration of rays, if represented by three linear equations, in which the coordinates r, s, ϱ, σ are replaced by t, u, v_x, v_y, becomes a hyperboloid.

9. A configuration of *axes* represented by three linear equations would be a *paraboloid* if the coordinates x, y, z_t, z_u were employed, but becomes a *hyperboloid* if these coordinates are replaced by $p, q, \varpi, \varkappa$. We shall here consider the last case only, and may for that purpose directly replace the equations (6) — (11) by the following ones:

$$ap + bq = 1, \tag{12}$$

$$c\varpi + d\varkappa = 1, \tag{13}$$

$$a'p + c'\varpi = 1, \tag{14}$$

$$b'q + d'\varkappa = 1, \tag{15}$$

$$a''p + d''\varkappa = 1, \tag{16}$$

$$b''q + c''\varpi = 1. \tag{17}$$

Any three of these equations, involving six constants, are sufficient to determine the configuration.

If, after having replaced $p, q, \varpi, \varkappa$ by

$$-\frac{z_t}{x}, \quad -\frac{z_u}{y}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y},$$

we regard x, y, z_t, z_u as variable, (14) and (15) may be written thus,

$$x = a'z + c',$$
$$y = b'z + d',$$

representing within the planes XZ, YZ two right lines (AA', BB') which are the locus of points (A, B) where the axes of the configuration meet the two planes.

In regarding ϖ and $\varkappa$ as coordinates of a right line, the equation (13), being written thus,

$$ct + du = 1,$$

represents a given point (E),

$$x = c, \quad y = d,$$

enveloped within XY by the projections of axes. Therefore all axes of the configuration intersect a third right line (CC') parallel to OZ and meeting XY in E.

Hence we conclude that the configuration represented by the three linear equations is a hyberboloid. Its axes meet three given lines, two of which, AA', BB', fall within XZ, YZ, while the third, CC is parallel to OZ.

The plane BOA passing through O and an axis AB is represented by the equation

$$z + qy + px = 0.$$

The equation (12) being with regard to p and q of the first degree, indicates that all such planes, containing the different axes of the configuration, intersect each other along a given right line DD' passing through O. Hence all axes meet a fourth right line, itself confined within the hyperboloid.

The complete determination of the hyperboloid presents no difficulties. We may for instance find its centre and its axes by determining the shortest distance of any two of the axes generating it.

10. Let a *congruency* either of rays or axes be represented by two linear equations. In adding to these equations two new ones, likewise of the first degree, there exists only one ray or axis the coordinates of which satisfy simultaneously the four linear equations. Two new equations of this description are obtained if, among the rays or axes of the congruency, we select those either passing through a given point, or confined within a given plane. In the case of rays, let (x', y', z') be a given point, then we get

$$x' = rz' + \varrho,$$
$$y' = sz' + \sigma$$

in order to express that all rays meet in that point. Let

$$t'x + u'y + v'z + 1 = 0$$

be the equation of a given plane, then we get

$$t'r + u's + v = 0,$$
$$t'\varrho + u'\sigma + 1 = 0$$

in order to express that the rays lie within that plane. Again, in the case of axes, let (t', u', v') be a given plane, then we get the new linear equations

$$t'x + v'z = 1, \quad u'y + v'z = 1$$

or

$$t' = pv' + \varpi, \quad u' = qv' + \varkappa,$$

in order to express that the axis is confined within that plane. Let in regarding x', y', z' as constant, t, u, v as variable,

$$x't + y'u + z'v + 1 = 0$$

represent a given point, then we get

$$x'p + y'q + z' = 0,$$
$$x'\varpi + y'\varkappa + 1 = 0$$

in order to express that the axes pass through that point. Hence

In a congruency represented by the system of two linear equations, there is one single ray or axis passing through any given point of space, as there is one single ray or axis confined within a given plane.

11. In order to represent a congruency of rays, we shall here make use of the coordinates t, u, v_x, v_y. Let

$$At + Bu + Cv_x + Dv_y + 1 = 0,$$
$$A't + B'u + C'v_x + D'v_y + 1 = 0$$

be its two equations. By successively eliminating each coordinate, we get four equations of the following form,

$$at + bu + cv_x + 1 = 0,$$
$$a't + b'u + dv_y + 1 = 0,$$
$$a''t + c'v_x + d'v_y + 1 = 0,$$
$$b''u + c''v_x + d''v_y + 1 = 0,$$

any two of which involving six constants may replace the two primitive equations, the remaining two being derived from them.

The first two of these equations, if t, u, v_x and t, u, v_y be considered as plane coordinates, represent two points (U), (V) the coordinates of which are

$$(U) \qquad x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$
$$(V) \qquad x = a', \quad y = b', \quad z = c'.$$

Consequently the six constants upon which the congruency depends, if referred to the three axes of coordinates OX, OY, OZ, are determined by means of the two points U and V. Hence is derived the following construction of rays of the congruency.

Trace through the two points U, V any two planes which intersect each other along a right line confined in the plane XY, and meeting OX, OY in the points D, F. Let E, G be the points where the two planes meet OZ. We shall get within the planes XZ, YZ the projections of a ray of the congruency by drawing DE, FG. The ray (AC) thereby completely determined will intersect the plane XY in the point C, the coordinates of which are

$$x = \frac{1}{t} = OD, \quad y = \frac{1}{u} = OF.$$

If a plane be traced passing simultaneously through both points U, V, both intersections E, G falling into one point A', the corresponding ray of the congruency $A'C'$ intersects OZ. If the right line UV be projected on YZ, XZ, the projections meet OZ in two points A'', A'''. In these points OZ is intersected by the rays of

the congruency parallel to OX, OY. The ray parallel to OZ is obtained by the point C'' where it meets XY. The coordinates of C'' are

$$x = OD'', \quad Y = OF'',$$

D'' and F'' being the points where the projection of UV intersects OX and OY.

Thus occurs to us the construction of rays passing through any point of OZ and any point of XY. We cannot go further into detail here.

12. Again, let a congruency of *axes* be represented by the equations

$$Ax + By + Cz_t + Dz_u + 1 = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z_t + D'z_u + 1 = 0.$$

By successively eliminating z_u and z_t we may replace these equations by the following two,

$$ax + by + cz_t + 1 = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z_u + 1 = 0,$$

the six new constants of which are derived from the primitive constants. In regarding x, y, z_t, z_u as point-coordinates (where z may be written instead of z_t and z_u), the last equations represent two planes. The six coordinates of both planes,

$$t = a, \quad u = b, \quad v = c,$$
$$t = a', \quad u = b', \quad v = c',$$

are the six constants of the congruency, consequently the congruency is determined by means of these two planes and the axes of coordinates.

Suppose both planes to be known. Draw any right line meeting them in M and M', project M on XZ and M' on YZ. The right line joining the two projections B and A is an axis of the congruency.

If we project on XZ and YZ any point of the right line JK along which both planes intersect each other, the right line joining both projections, B', A', is an axis parallel to XY. All axes obtained in that way meet, within XZ and YZ, both projections of JK. Hence the axes of the congruency parallel to XY constitute a paraboloid. The ray within XY is obtained by projecting the point where the traces of both planes meet on OX and OY and joining both projections, B'' and A'', by a right line, etc.

13. After these preliminary discussions we shall now proceed in a more systematic way, and henceforth exclusively make use of the coordinates r, s, ϱ, σ. When a complex of rays is represented by the linear equation

$$Ar + Bs + D\sigma + E\varrho + 1 = 0, \tag{1}$$

we may easily prove that the infinite number of rays passing through a given point of space are confined within the same plane, and, conversely, that the infinite number of rays confined within a given plane meet within the same point.

In order to select among the rays of the complex those passing through a given point $(x', y' z')$, the following two equations,

$$\begin{cases} x' = rz' + \varrho, \\ y' = sz' + \sigma, \end{cases} \tag{2}$$

are to be added to the equation of the complex. By eliminating ϱ and σ we get

$$(A - Ez')r + (B - Dz')s + (1 + Ex' + Dy') = 0. \tag{3}$$

This equation being of the first degree with regard to the remaining variables r and s, shows that all corresponding rays are parallel to a given plane, and therefore confined within the plane of that direction and passing through the point (x', y', z'). By replacing in the last equation r and s by $\frac{x - x'}{z - z'}$ and $\frac{y - y'}{z - z'}$ we obtain, in order to represent that plane, the following equation,

$$\begin{cases} (A - Ez')(x - x') + (B - Dz')(y - y') \\ \quad + (1 + Ex' + Dy')(z - z') = 0. \end{cases} \tag{4}$$

14. Again, this equation being, with regard to (x', y', z'), of the first degree, proves that, conversely, all rays confined within a given plane meet in the same point of that plane.

15. A complex the rays of which are distributed through infinite space in such a way that in each point there meet an infinite number of rays constituting a plane, and conversely, that each plane contains an infinite number of rays meeting in the same point, may be called a *linear complex of rays*. We may say, too, that, with regard to the complex, points and planes of the infinite space *correspond to each other;* each plane containing all rays which meet in the point placed within it, and each point being traversed by all rays which are confined within the plane passing through it.

16. A linear complex of rays is represented by the linear equation (1), but it is easily seen that this equation is not the *general* equation of a linear complex. The following considerations lead us to generalize the preceding developments and to render them by generalizing more symmetrical.

Hitherto we determined a ray by its two projections within XZ, YZ,

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma',$$

whence its third projection within XY is derived,

$$ry - sx = r\sigma - s\varrho. \tag{5}$$

This equation furnishes the new term $(r\sigma - s\varrho)$, which, like ϱ and σ, depend upon r and s as well as upon x' and y' in a linear way.

Again, from the equations

$$tr + us + v = 0,$$
$$t\varrho + u\sigma + w = 0,$$

expressing that the ray (r, s, ϱ, σ) falls within te plane (t, u, v, w) represented by the equation

$$tx + uy + vz + w = 0^*),$$

we deduce

$$\frac{w}{t}\, s - \frac{v}{t}\, \sigma = (r\sigma - s\varrho). \tag{6}$$

17. After introducing a new term containing $(s\varrho - r\sigma)$, the equation of the complex may be written thus,

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0. \tag{7}$$

When, after $(r\sigma - s\varrho)$ is eliminated by means of the equation

$$ry' - sx' = r\sigma - s\varrho,$$

we proceed as we did in the former case [14], the following equation is obtained in order to represent the plane corresponding to the given point (x', y', z'),

$$\begin{cases} (A - Fy' - Ez')(x - x') + (B + Fx' - Dz')(y - y') \\ \qquad + (C + Ex' + Dy')(z - z') = 0. \end{cases} \tag{8}$$

This equation may be expanded thus,

$$\begin{cases} (A - Fy' - Ez')x + (B + Fx' - Dz')y + (C + Ex' + Dy')z \\ \qquad = Ax' + By' + Cz', \end{cases} \tag{9}$$

and reduced also to the following symmetrical form,

$$\begin{cases} A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D(y'z - z'y) + E(x'z - z'x) \\ \qquad + F(x'y - y'x) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

*) Henceforth we shall make use of four plane-coordinates t, u, v, w, and accordingly represent a point by a homogeneous equation. Sometimes, where symmetry and brevity require it, likewise x, y, z shall be replaced by $\frac{\xi}{\vartheta}$, $\frac{\eta}{\vartheta}$, $\frac{\zeta}{\vartheta}$. Accordingly, by indroducing the four point-coordinates ξ, η, ζ, ϑ, a plane is represented by a homogeneous equation.

18. We may directly prove that all rays confined within a given plane meet in the same point. The equation of this plane being

$$t'x + u'y + v'z + w' = 0, \tag{11}$$

we get, in order to express that a ray falls within that plane, the following three equations,

$$\begin{gathered} t'r + u's + v' = 0, \\ t'\varrho + u'\sigma + w' = 0, \\ w's - v'\sigma - (r\sigma - s\varrho)t' = 0, \end{gathered}$$

each of which results from the other two. Between these equations and the equation of the complex $(r\sigma - s\varrho)$, r and ϱ may be eliminated. The resulting equation,

$$(Bt' - Au' - Fw')s + (Dt' - Eu' + Fv')\sigma + Ct' - Av' - Ew' = 0, \tag{12}$$

being linear with regard to the two remaining variables s and σ, represents a right line parallel to OX and intersecting YZ in a point, the coordinates of which are

$$\begin{cases} z' = \dfrac{Bt' - Au' - Fw'}{Dt' - Eu' + Fv'}, \\ y' = -\dfrac{Ct' - Av' - Ew'}{Dt' - Eu' + Fv'}. \end{cases} \tag{13}$$

Hence all rays of the complex supposed to fall within the plane (11) intersect that right line, and consequently meet in the same point. Two coordinates of that point are given by the last equations, the third,

$$x' = \frac{Cu' - Bv' - Dw'}{Dt' - Eu' + Fv'}, \tag{14}$$

is obtained by introducing the values of z' and y' into the equation of the plane.

We may represent the point corresponding to the given plane (t', u', v', w') by its equation,

$$\begin{cases} (Cu' - Bv' - Dw')t - (Ct' - Av' - Ew')u + (Bt' - Au' - Fw')v \\ \qquad + (Dt' - Eu' + Fv')w = 0, \end{cases} \tag{15}$$

which may be written thus,

$$\begin{cases} A(v'u - u'v) + B(t'v - v't) + C(u't - t'u) + D(t'w - w't) \\ \qquad + E(w'u - u'w) + F(v'w - w'v) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

19. It is easily seen that both equations (12) and (16) are the most general ones, indicating the supposed correspondence between point and plane. Therefore (10) is the most general equation of a *linear complex*.

20. According to the fundamental relation which characterizes a linear complex, the plane corresponding to a given point is determined by means of any two rays passing through that point, as the point corresponding to a given plane is determined by any two rays confined within that plane.

Suppose P and P' to be any two points of space, and p and p' the two corresponding planes. Let I be the right line joining both points, II the right line along which both planes intersect each other. Draw through I any plane intersecting II in Q, join Q to P and P' by two right lines QP, QP'. These right lines, both passing through points (P, P') and falling within planes (p, p') which pass through them, are rays of the complex. The plane PQP', containing both rays and consequently containing I, corresponds to the point Q, whence we conclude that planes passing through any points Q, Q' of II intersect each other along I. Likewise it may be proved that any plane drawn through II intersects I in the corresponding point. We shall call I and II *two right lines conjugate with regard to the linear complex*, or merely *conjugate lines*. The relation between two conjugate lines is a reciprocal one; each of them may be regarded as an axis in space around which a plane turns while the corresponding point describes the other; each also may be regarded as a ray, described by a moving point, the corresponding plane of which turns around the other.

Each right line meeting two conjugate right lines is a ray of the complex.

To each right line of space there is a conjugate one.

If a point move along a *ray of the complex*, the corresponding plane — containing each ray of the complex which passes through the point, and therefore especially the given one — turns around the ray.

Each ray of the complex may be regarded as two *coincident* conjugate lines.

21. We may also connect the preceding results with the general *principle of polar reciprocity*. Indeed the general equation (10), which represents the plane corresponding to a given point, is not altered if x', y', z' and x, y, z be replaced by one another. Consequently we may say, in introducing the denominations pole and polar plane instead of corresponding point and plane, that the polar planes of all points of a given plane pass through its pole, ond conversely, that the poles of all planes passing through a given point fall within the polar plane of that point. In our particular case a plane, containing its own pole, is determined by means of the poles of any two planes passing through that pole; likewise a point, falling within its polar plane, is determined by means of the polar planes of any two points

of its polar plane. A right line joining any two points of space is *conjugate* to the right line, along which the polar planes of both points intersect each other. If one of two conjugate right lines envelopes within a given plane a curve, the other describes a conical surface; the vertex of the cone falls within the plane containing the enveloped curve. Generally if one of the two conjugate right lines describes a configuration, the other one likewise describes such a surface. If one of the two surfaces degenerates into a cone, the other degenerates into a plane curve.*)

22. *A point of space being given, to construct the plane which contains all rays of the complex passing through the point.*

Each ray intersecting two conjugate lines is a ray of the complex. Accordingly the only right line starting from a given point and meeting any two conjugate is a ray of the complex. We obtain a new ray, starting from the same point, by means of each new pair of conjugate lines. All such lines constituting the plane corresponding to the given point, two pairs of conjugate lines are sufficient to determine that plane.

A plane of space being given, to construct the point where meet all rays of the complex confined within the plane.

Each right line joining the two points in which two conjugate right lines are intersected by a given plane being a ray of the complex, there will be obtained, within the given plane, as many rays as there are known pairs of conjugate lines. Any two such pairs are sufficient in order to determine the point within the plane corresponding to it where all rays meet.

A plane is intersected by the two lines of each conjugate pair in two points; the right lines joining two such points are rays of the complex converging all towards the point which corresponds to the plane. Again, the two planes passing through a point of space and meeting the two lines of a conjugate pair, intersect each other along a ray of the complex confined within the plane which corresponds to the point.

23. After this geometrical digression, immediately indicated by analysis, we resume the analytical way.

By putting in the general equation (9) of the plane corresponding to a given point (x', y', z'),

*) The peculiar kind of polar reciprocity we meet here was first noticed by M. Möbius in the 10th volume of „Crelle's Journal", and was afterwards expounded by L. F. Magnus in his valuable work „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes", pp. 139—145.

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0$$

we obtain

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{17}$$

in order to represent the plane corresponding to the origin.

By putting successively

$$z' = \infty,$$
$$y' = \infty,$$
$$x' = \infty,$$

the same equation becomes

$$\begin{cases} C + Ex + Dy = 0, \\ B + Fx - Dz = 0, \\ A - Fy - Ez = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Accordingly these equations represent the planes corresponding to points moved to an infinite distance along OZ, OY, OX.

By combining each of the equations (18) with (17), we get the rays conjugate to the axes of coordinates OZ, OY, OX, forming a triangle, the angles of which fall within the three planes of coordinates, XY, XZ, YZ, into the corresponding points.

24. By putting

$$w' = \infty,$$

the equation (15), representing a point corresponding to any given plane (t', u', v', w'), becomes

$$-Dt + Eu - Fv = 0,$$

and then indicates that the point corresponding to the infinitely distant plane of space falls itself, at an infinite distance, along a direction which may be represented by the equations

$$\frac{x}{D} = -\frac{y}{E} = \frac{z}{F}, \tag{19}$$

while, if rectangular coordinates were supposed,

$$Dx - Ey + Fz = 0$$

represents the plane perpendicular to it.

We shall call this direction *the characteristic direction of the complex*. It is invariably connected with the complex.

25. By putting successively

$$t' = \infty,$$
$$u' = \infty,$$
$$v' = \infty,$$

we get, in order to represent within the planes of coordinates YZ, XZ, XY, the points corresponding to these planes, the following equations:

$$(20)\qquad \begin{cases} Cu - Bv - Dw = 0, \\ Ct - Av - Ew = 0, \\ Bt - Au - Fw = 0. \end{cases}$$

Accordingly the coordinates of these points are

$$(21)\qquad \begin{cases} x = 0, \quad y = -\dfrac{C}{D} \equiv y_t, \quad z = \dfrac{B}{D} \equiv z_t, \\ y = 0, \quad x = -\dfrac{C}{E} \equiv x_u, \quad z = \dfrac{A}{E} \equiv z_u, \\ z = 0, \quad x = -\dfrac{B}{F} \equiv x_v, \quad y = \dfrac{A}{F} \equiv y_v, \end{cases}$$

whence may be derived the following relation,

$$\frac{x_v y_t z_u}{x_u y_v z_t} = -1.$$

In putting $C = -1$, the right line conjugate to OZ, if regarded as an axis, may be determined by its four coordinates [5],

$$p = A, \quad q = B, \quad \varpi = D, \quad \varkappa = E.$$

These coordinates therefore are four of the constants of the complex

$$Ar + Bs + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 1.$$

MN conjugate to OZ remains the same whatever may be the value of F. If by putting F equal to zero the last equation becomes a linear one, the complex is completely determined by MN conjugate to OZ.

26. The ratio of the three constants upon which the characteristic direction of the linear complex (19) depends,

$$D : E : F,$$

remains the same if the origin be changed or the complex moved parallel to itself. But if by turning the complex the characteristic direction simultaneously move, that ratio is altered. One of the three constants F, E, D becomes zero if the characteristic direction be confined within XY, XZ, YZ; two of them disappear, F and E, F and D, E and D if that direction fall within OX, OY, OZ. Here the general equation becomes

$$(22)\qquad \begin{cases} Ar + Bs + C + D\sigma = 0, \\ Ar + Bs + C + E\varrho = 0, \\ Ar + Bs + C + F(s\varrho - r\sigma) = 0. \end{cases}$$

27. The ratio of the three constants

$$A : B : C$$

varies if the complex be moved parallel to itself. If the plane corresponding to O pass through OZ, OY, OX, one of the three constants C, B, A becomes zero; if this plane be congruent with XY, XZ, YZ, *i. e.* if O be the point corresponding to XY, XZ, YZ, two constants A and B, A and C, B and C disappear, and the general equation of the complex becomes

$$(23) \qquad \begin{cases} D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) + C = 0, \\ D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) + Bs = 0, \\ D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) + Ar = 0. \end{cases}$$

28. In order to represent a linear complex by equations of the utmost simplicity, let us take any plane XY, XZ, YZ perpendicular to the characteristic direction, and draw through its corresponding point O the axis OZ, OY, OX. The resulting equations will assume the following forms,

$$(23^*) \qquad \begin{cases} F(s\varrho - r\sigma) + C = 0, \\ Bs + E\varrho = 0, \\ Ar + D\sigma = 0. \end{cases}$$

The planes corresponding to all points of a right line having the characteristic direction are parallel to each other; and conversely the locus of points corresponding to parallel planes is a right line of that direction. Hence we conclude that there is one fixed line, the points of which correspond to planes which are perpendicular to it. Consequently, on the supposition of rectangular coordinates, we may in only one way represent a linear complex by means of equations assuming the form of those above.

29. In order, for instance, to get the first of these equations, which by replacing $-\frac{C}{F}$ by k may be written thus,

$$s\varrho - r\sigma = k,$$

it will be sufficient to direct OZ along the fixed line. As no supposition is made either with regard to the position of the origin on OZ, or to the direction of OX and OY within the plane XY which is perpendicular to OZ, this equation will remain absolutely the same if the system of coordinates be moved parallel to itself along OZ, or turned round it. In other terms,

A linear complex of rays invariably remains the same if it be moved parallel to itself along a fixed right line or turned round it.

The fixed right line may be called the *axis of rotation*, or merely the *axis* of the complex.

30. We may give different geometrical interpretations to the last three equations, involving each a characteristic property of a linear complex of rays.

Any two planes XZ, YZ intersecting each other along OZ being given, rays of space may be determined either by their projections on both planes, or by the points where they meet them. In the first case, if a third plane intersecting XZ, YZ along OX, OY at right angles be drawn, there are two planes LMN, $L'M'N'$, parallel to each other, passing through the two projections LN, $M'N'$, and meeting OZ, OY, OX in N and N', M and M', L and L'. In the second supposition, denote the two points of intersection by U and V, and their projections by U' and V'. Accordingly $U'U$, $V'V$, and $U'V'$ may be regarded as the projections of UV on the planes XZ, YZ, and on OZ. If in the first case

$$\frac{LL'.MM'}{NN'} = k,$$

in the second

$$\frac{UU'.VV'}{U'V'} = k,$$

all rays thus determined constitute the linear complex, represented by

$$s\varrho - r\sigma = k,$$

the axis of which is OZ.

If $k = 0$, the linear complex is of a peculiar description, all its rays meet the same right line, the axis OZ.

31. The results of [29] may be derived in a direct way. Let (x', y', z') be any point of space; according to the general equation (10) its corresponding plane with regard to the complex

(24) $$s\varrho - r\sigma = k$$

will be represented by

(25) $$y'x - x'y = k(z - z').$$

In putting $x' = 0$, $y' = 0$, this equation shows that all planes corresponding to points of the axis of rotation OZ are perpendicular to this axis (in the case of oblique coordinates parallel to XY).

If the point fall within XY, we get by putting $z' = 0$,

$$y'x - x'y = kz;$$

consequently the corresponding plane passes through O. In denoting the angle which it makes with the axis of rotation by λ, we obtain

$$\cos\lambda = \frac{k}{\sqrt{y'^2 + x'^2 + k^2}},$$

whence

$$y'^2 + x'^2 = k^2 \tan^2\lambda. \tag{26}$$

Hence we conclude,

Right lines parallel to and at an equal distance from the axis of the complex are met under the same angle by planes corresponding to their points.

32. The following results are immediately derived from (26).

The plane p corresponding to any given point P passes through OP, O being the projection of P on OZ. Let the plane p and the right line OM perpendicular to it in O turn round the axis OZ, through an angle $\frac{\pi}{2}$, and denote them after turning by p' and OM'. The projection of OP on OM' is a constant, and so is the perpendicular drawn from P to p'.

Again, k being given we may, by determining λ, construct the plane corresponding to a given point, and, conversely, by determining OP, construct the point corresponding to a given plane.

The following theorem is the geometrical interpretation of the equation (25).

Draw through a point P its corresponding plane p, and the plane XY perpendicular to the axis of the complex meeting that axis in O. Let R be an arbitrary point of p, and R' its projection on XY. The double area of the triangle POR' divided by $R'R$ is a constant, and equal to k.

33. In order to generalize, we may start from the equation

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0, \tag{7}$$

and proceed in the following way. By replacing x, y, z by $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ (see [16], note), and omitting the accents, we immediately derive from equation (10)

$$\begin{cases} \xi = & Cu - Bv - Dw, \\ \eta = -Ct & + Av + Ew, \\ \zeta = & Bt - Au - Fw, \\ \vartheta = & Dt - Eu + Fv, \end{cases} \tag{27}$$

$\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ indicating any point, and t, u, v, w its corresponding plane. From the first three of these equations results the equation

$$A\xi + B\eta + C\zeta = -(AD - BE + CF)w,$$

which, multiplied member by member by the fourth equation,

$$Dt - Eu + Fv = \vartheta,$$

and divided by ϑw, furnishes the following relation,

$$(28)\quad (Ax + By + Cz)\left(D\frac{t}{w} - E\frac{u}{w} + F\frac{v}{w}\right) = -(AD - BE + CF).$$

In a similar way we obtain

$$(29)\quad \begin{cases} = \dfrac{(C\vartheta + E\xi + D\eta)}{\zeta} \cdot \dfrac{Bt - Au - Fw}{v} \\ = \dfrac{B\vartheta - D\zeta + F\xi}{\eta} \cdot \dfrac{-Ct + Av + Ew}{u} \\ = \dfrac{A\vartheta - E\zeta - F\eta}{\xi} \cdot \dfrac{Cu - Bv - Dw}{t} \\ = -(AD - BE + CF). \end{cases}$$

34. In starting again from the equation (26),

$$s\varrho - r\sigma = k,$$

and in supposing that there is a right line determined by means of the coordinates of any two of its points (x', y', z') and (x'', y'', z'') according to [31], its conjugate line will be represented by the system of equations,

$$y'x - x'y = k(z - z'),$$
$$y''x - x''y = k(z - z''),$$

which, after eliminating successively y and x, may be replaced by the following ones:

$$x(x''y' - x'y'') = k[(x'' - x')z - (x''z' - x'z'')],$$
$$y(x''y' - x'y'') = k[(y'' - y')z - (y''z' - y'z'')].$$

In denoting the coordinates of the two conjugate lines by

$$r_0,\ s_0,\ \varrho_0,\ \sigma_0, \text{ and } r^0,\ s^0,\ \varrho^0,\ \sigma^0,$$

the following relations are immediately obtained:

$$r_0 = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}, \qquad s_0 = \frac{y'' - y'}{z'' - z'},$$

$$\varrho_0 = -\frac{x''z' - x'z''}{z'' - z'}, \qquad \sigma_0 = -\frac{y''z' - y'z''}{z'' - z'},$$

$$s_0\varrho_0 - r_0\sigma_0 = -\frac{x''y' - x'y''}{z'' - z'},$$

$$r^0 = k\frac{x'' - x'}{x''y' - x'y''}, \qquad s^0 = k\frac{y'' - y'}{x''y' - x'y''},$$

$$\varrho^0 = -k\frac{x''z' - x'z''}{x''y' - x'y''}, \qquad \sigma^0 = -k\frac{y''z' - y'z''}{x''y' - x'y''}.$$

Whence

$$\frac{r_0}{r^0} = \frac{s_0}{s^0} = \frac{\varrho_0}{\varrho^0} = \frac{\sigma_0}{\sigma^0} = -\frac{(s_0\varrho_0 - r_0\sigma_0)}{k}$$

and

$$(s_0\varrho_0 - r_0\sigma_0)(s^0\varrho^0 - r^0\sigma^0) = k^2.$$

Not any two conjugate right lines intersect each other; if congruent they belong to the complex.

35. A linear complex depends upon five constants, four of which fix in space the position of its axis. In the case of the equations (23), this axis falling within an axis of coordinates, there remains only one constant. The position of the axis of the complex and its remaining constant may be determined by means of the five independent constants of the general equation (7).

For that purpose we shall make use of the transformation of coordinates. If the axes of coordinates be changed, the coordinates of a ray change at the same time, and we get formulae analogous to the formulae in the case of ordinary coordinates, in order to express the coordinates of one system by means of the coordinates in the other.

36. Let

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma$$

be the equations of a ray referred to the system of coordinates (x, y, z). If referred to another sytem (x', y', z'), its coordinates will be replaced by new ones $(r', s', \varrho', \sigma')$, but their equations retain the same shape,

$$x' = r'z' + \varrho',$$
$$y' = s'z' + \sigma'.$$

If the primitive system of coordinates be only displaced parallel to itself, the coordinates of the new origin being (x^0, y^0, z^0), we obtain

$$x' = x - x^0, \quad y' = y - y^0, \quad z' = z - z^0;$$

and by substituting in the last equations,

$$x = r'z + (\varrho' + x^0 - r'z^0),$$
$$y = s'z + (\sigma' + y^0 - s'z^0),$$

whence, by comparison with the primitive equations,

$$(30) \qquad \begin{cases} r = r', \\ s = s', \\ \varrho = \varrho' + x^0 - rz^0, \\ \sigma = \sigma' + y^0 - sz^0. \end{cases}$$

We have further

$$(31) \qquad s\varrho - r\sigma = (s'\varrho' - r'\sigma') + x^0 s - y^0 r.$$

If $x^0 = 0$, $y^0 = 0$, and accordingly the origin move along OZ, the expression $(s\varrho - r\sigma)$ remains unaltered [29].

37. If OY and OX turn round OZ, forming in the new position OY', OX' the angles α' and α with OX, we have

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' = rz + \varrho,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha' = zs + \sigma;$$

whence, on putting $(\alpha' - \alpha) = \vartheta$,

$$x' = \frac{r \sin\alpha' - s \cos\alpha'}{\sin\vartheta} z' + \frac{\varrho \sin\alpha' - \sigma \cos\alpha'}{\sin\vartheta},$$
$$y' = -\frac{r \sin\alpha - s \cos\alpha}{\sin\vartheta} \cdot z' - \frac{\varrho \sin\alpha - \sigma \cos\alpha'}{\sin\vartheta}.$$

We immediately derive from these equations of the ray in the new system (x', y', z'),

$$(31^*) \quad \begin{cases} r' \sin\vartheta = r \sin\alpha' - s \cos\alpha', \\ \varrho' \sin\vartheta = \varrho \sin\alpha' - \sigma \cos\alpha', \\ -s \sin\vartheta = r \sin\alpha - s \cos\alpha, \\ -\sigma \sin\vartheta = \varrho \sin\alpha - \sigma \cos\alpha, \end{cases}$$

whence

$$(32) \quad \begin{cases} r = r' \cos\alpha + s' \cos\alpha', \\ \varrho = \varrho' \cos\alpha + \sigma' \cos\alpha', \\ s = r' \sin\alpha + s' \sin\alpha', \\ \sigma = \varrho' \sin\alpha + \sigma' \sin\alpha', \end{cases}$$

and

$$(33) \quad (s\varrho - r\sigma) = (s'\varrho' - r'\sigma') \sin\vartheta.$$

If specially $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, the last four equations become

$$(34) \quad \begin{cases} r = r' \cos\alpha - s' \sin\alpha, \\ \varrho = \varrho' \cos\alpha - \sigma' \sin\alpha, \\ s = r' \sin\alpha + s' \cos\alpha, \\ \sigma = \varrho' \sin\alpha + \sigma' \cos\alpha, \end{cases}$$

and the expression

$$s\varrho - r\sigma$$

will not be altered by the transformation of coordinates [29].

38. Again, let OX and OZ turn round OY; let α' and α be the angles formed by these axes in their new position, OX' and OZ', with OZ, and $\alpha' - \alpha = \vartheta$. In the new system of coordinates the primitive equations of the ray become

$$(z' \sin\alpha + x' \sin\alpha') = (z' \cos\alpha + x' \cos\alpha')r + \varrho,$$
$$y' = (z' \cos\alpha + x' \cos\alpha')s + \sigma.$$

From the first of these equations we derive

$$x'(\sin\alpha' - r\cos\alpha') = -z'(\sin\alpha - r\cos\alpha) + \varrho,$$

whence

$$r' = -\frac{\sin\alpha - r\cos\alpha}{\sin\alpha' - r\cos\alpha'}, \tag{35}$$

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\sin\alpha' - r\cos\alpha'}. \tag{36}$$

After replacing in the second equation of this number x' by $(r'z' + \varrho')$, we obtain

$$y' = (\cos\alpha + r'\cos\alpha')sz' + (\sigma + s\varrho'\cos\alpha'),$$

whence

$$s' = (\cos\alpha + r'\cos\alpha')s,$$
$$\sigma' = \sigma + s\varrho'\cos\alpha';$$

and by eliminating r' and ϱ' by means of (35) and (36),

$$s' = \frac{s\sin\vartheta}{\sin\alpha' - r\cos\alpha'}, \tag{37}$$

$$\sigma' = \frac{(s\varrho - r\sigma)\cos\alpha' + \sigma\sin\alpha'}{\sin\alpha' - r\cos\alpha'}. \tag{38}$$

From (35)—(38) we derive

$$s'\varrho' - r'\sigma' = \frac{(s\varrho - r\sigma)\cos\alpha + \sigma\sin\alpha}{\sin\alpha' - r\cos\alpha'}; \tag{39}$$

from (36) and (37),

$$\frac{s'}{\varrho'} = \frac{s}{\varrho}\sin\vartheta. \tag{40}$$

On the supposition of rectangular axes of coordinates, the last equations become

$$\begin{cases} r' = -\dfrac{\sin\alpha - r\cos\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \\ \varrho' = \dfrac{\varrho}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \\ s' = \dfrac{s}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \\ \sigma' = -\dfrac{(s\varrho - r\sigma)\sin\alpha - \sigma\cos\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \end{cases} \tag{41}$$

$$s'\varrho' - r'\sigma' = \frac{(s\varrho - r\sigma)\cos\alpha + \sigma\sin\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \tag{42}$$

$$\frac{\varrho'}{s'} = \frac{\varrho}{s}. \tag{43}$$

In order to pass from the first system of coordinates to the second, r, s, ϱ, σ and r', s', ϱ', σ' are to be replaced by one another, while the sign of α is to be changed. Thus we get the following formulae:

$$(44)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{\sin\alpha + r'\cos\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \\ \varrho = \dfrac{\varrho'}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \\ s = \dfrac{s'}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \\ \sigma = \dfrac{(s'\varrho' - r'\sigma')\sin\alpha + \sigma'\cos\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \end{cases}$$

$$(45)\qquad s\varrho - r\sigma = \frac{(s'\varrho' - r'\sigma')\cos\alpha - \sigma\sin\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}.$$

39. The general equation of the linear complex

$$(7)\quad Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0$$

becomes, if the origin is moved to any point (x^0, y^0, z^0) (30),

$$(A - Fy^0 - Ez^0)r + (B + Fx^0 - Dz^0)s + (C + Ex^0 + Dy^0) + D\sigma' + E\varrho' + F(s\varrho - r\sigma) = 0.$$

If

$$\frac{x^0}{D} = -\frac{y^0}{E} = \frac{z^0}{F},$$

the primitive equation is not altered. Consequently the complex remains the same if it be moved parallel to itself along a direction indicated by the last equations. We obtain in denoting by ξ, η, ζ, the angles which this direction makes with OX, OY, OZ,

$$(46)\qquad \frac{\cos\xi}{D} = -\frac{\cos\eta}{E} = \frac{\cos\zeta}{F}.$$

40. In order to get OZ congruent with a right line OM of the determined direction and passing through O, we may in the first instance turn the system of coordinates round OZ in its primitive position through an angle α such that ZX in its new position contains OM. Accordingly we obtain

$$\cos\alpha = \frac{\cos\xi}{\sin\zeta},$$

whence

$$\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\zeta - \cos^2\xi}{\cos^2\xi} = \frac{\cos^2\eta}{\cos^2\xi} = \frac{E^2}{D^2}.$$

By making use of the formulae (34) the equation of the complex (7) becomes

$$(A\cos\alpha + B\sin\alpha)r' - (A\sin\alpha - B\cos\alpha)s' + (E\cos\alpha + D\sin\alpha)\varrho' - (E\sin\alpha - D\cos\alpha)\sigma' + C + F(s'\varrho' - r'\sigma') = 0,$$

and may be written thus,

$$(47)\qquad A'r + B's + C' + D'\sigma + F'(s\varrho - r\sigma) = 0,$$

in omitting the accents of the new coordinates and in putting

$$(48)\qquad \begin{cases} E\cos\alpha + D\sin\alpha = 0, \\ A' = (AD - BE)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \quad B' = (BD + AE)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \\ D' = (D^2 + E^2)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \qquad C' = C, \quad F' = F. \end{cases}$$

41. In order to give within ZX to OZ the required direction along OM, the formulae (44) are to be used after having replaced α by ξ. Accordingly the equation (47) is transposed into the following one,

$$A'(\sin\xi + r'\cos\xi) + B's' + C'(\cos\xi - r'\sin\xi)$$
$$+ D'\big((s'\varrho' - r'\sigma')\sin\xi + \sigma'\cos\xi\big) + F'\big((s'\varrho' - r'\sigma')\cos\xi - \sigma'\sin\xi\big) = 0,$$

and may be written thus,

$$(48^*)\qquad A''r + B''s + C'' + F''(s\varrho - r\sigma) = 0,$$

on omitting the accents of the coordinates and putting

$$(49\qquad \begin{cases} D'\cos\xi = F'\sin\xi, \\ A'' = (A'F' - C'D')\dfrac{\cos\xi}{F'}, \\ B'' = -B', \\ C'' = (C'F' + A'D')\dfrac{\cos\xi}{F'}, \\ F'' = (D'^2 + F'^2)\dfrac{\cos\xi}{F'}. \end{cases}$$

42. Finally, the origin may be moved within XY to a point the coordinates of which are x^0 and y^0. Accordingly the equation of the complex, on replacing ϱ and σ by $\varrho + x^0$ and $\sigma + y^0$, becomes

$$(A'' - F''y^0)r + (B'' + F''x^0)s + C'' + F''(s\varrho - r\sigma) = 0,$$

and by putting

$$(50)\qquad y^0 = \frac{A''}{F''}, \quad x^0 = -\frac{B''}{F''}$$

is reduced to

$$(51)\qquad (s\varrho - r\sigma) = -\frac{C''}{F''} = k.$$

43. By successive substitution we obtain

$$k = -\frac{C''}{F''}$$
$$= -\frac{C'F' + A'D'}{D'^2 + F'^2}$$
$$= -\frac{CF + (AD - BE)(D^2 + E^2)\dfrac{\cos^2\alpha}{D^2}}{(D^2 + E^2)^2\dfrac{\cos^2\alpha}{D^2} + F^2};$$

and finally, on observing that

$$\cos^2\alpha = \frac{D^2}{D^2+E^2},$$

the symmetrical expression

$$k = -\frac{AD-BE+CF}{D^2+E^2+F^2}. \tag{52}$$

In order to replace OZ and OX by each other, we may make use of the formulae (41) and (42) on putting $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. By means of the last of these formulae the equation of the linear complex (51) is immediately transformed into the following one,

$$\sigma = kr, \tag{53}$$

the constant k being the same as before.

Again, on interchanging OY and OX, we get

$$\varrho = ks. \tag{54}$$

44. If k become equal to zero the complex is of a peculiar description, all its rays meet a fixed line. If the complex be represented by the general equation

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0, \tag{7}$$

this peculiar case is indicated by the following condition,

$$AD - BE + CF = 0. \tag{55}$$

45. By eliminating from the general equation of the complex σ, ϱ and $(s\varrho - r\sigma)$ by means of the equations

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$
$$sx - ry = s\varrho - r\sigma,$$

we get

$$(A - Fy - Ez)r + (B + Fx - Dz)s + (C + Dy + Ex) = 0.$$

If there exist a point (x, y, z) where all rays of the complex meet, this point will be determined by means of the following three equations,[1])

$$\begin{cases} A - Fy - Ez = 0, \\ B + Fx - Dz = 0, \\ C + Ex + Dy = 0. \end{cases} \tag{56}$$

These three equations can subsist simultaneously only in the case where (55) is satisfied.

If this condition be satisfied, the locus of points, where all rays of the complex meet, is a right line, the projections of which are represented by the last equations (56).

46. Such rays as belong to both linear complexes,

$$(57)\quad \begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\varrho + F'(s\varrho - r\sigma) = 0, \end{cases}$$

constitute a *linear congruency of rays represented by the system of the two equations.* In order to determine the congruency each of the two complexes,

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = 0$$

may be replaced by any other represented by

$$(58)\quad \Omega + \mu\Omega' = 0,$$

where arbitrary values are given to the coefficient μ.

In each of the two complexes by means of which the congruency is determined, there is a plane corresponding to each point of space which contains all rays starting from that point. Both planes corresponding to the same point intersect each other along a single ray, belonging to both complexes, *i. e.* to the congruency. *With regard to the congruency one ray corresponds to a given point of space.* The planes corresponding to the same point, in all complexes, represented by (58), meet along a fixed line, the corresponding ray of the congruency.

Conversely, there is in each of the complexes (58) a point corresponding to a given plane in which all rays confined within the plane meet. By means of two such complexes we get, within the given plane, two points: the right line joining the two points is the only ray of the plane common to both complexes, and therefore belonging to the congruency. We call it *the ray of the congruency corresponding to the given plane.*

To each point, as well as to each plane, corresponds only one ray. There are not any two rays of the congruency intersecting one another, or, in other terms, confined within the same plane*).

47. Suppose that AB is any given right line, and $A'B'$, $A''B''$ its two conjugate with regard to the complexes Ω, Ω'. Let C be any point of AB. Each ray starting from C, if confined within the plane $A'B'C$ belongs to Ω, if confined within $A''B''C$ to Ω'. Therefore the intersection of the two planes $A'B'C$, $A''B''C$, *i. e.* the right line starting from C and meeting both conjugate, is the ray of the congruency which corresponds to the point C. If C move along AB, all rays of the congruency obtained in that way are the rays of one generation of a *hyperboloid*, while the given right line AB and its two conjugate $A'B'$, $A''B''$ are rays of its other generation. In replacing Ω and Ω' by other complexes arbitrarily taken among the

*) [Die Ausnahmepunkte werden erst in (57) erwähnt.]

complexes (58), the conjugate will be replaced by others, all intersected by the rays of the congruency starting from AB. Hence

The right lines conjugate to a given one, with regard to all complexes intersecting one another along a linear congruency, belong to one generation of a hyperboloid, while the right lines of its second generation are rays of the congruency meeting the given line.

48. If a point move along a given right line of space, according to the last number, its corresponding ray generally describes a hyperboloid. We may say that the same hyperboloid is described by the ray which corresponds to a plane passing through the given right line and turning round it. If the ray be the same in both cases, the point where it meets the given line AB is a point of the surface, and the plane confining both AB and the ray, the tangent plane in that point.

49. The hyperboloid generated by a ray of a linear congruency, the corresponding point of which moves along AB, varies if this line turn round one of its points C. All the new hyperboloids contain the ray which corresponds to C, but there is no other ray common to any two of them. If AB describe a plane, by turning round C through an angle π, there will be one ray of a hyperboloid passing through any point of space. A linear congruency therefore may be generated by a variable hyperboloid turning round one of its rays.

In an analogous way, a linear complex may be generated by a revolving variable congruency.

50. While in each of the two complexes Ω and Ω' there is a fixed line — the axis of the complex around which its rays are symmetrically distributed — there is in a linear congruency a characteristic section parallel to both axes of the complexes, and a characteristic direction perpendicular to it.

The characteristic section, if conducted through the origin O, may be represented by the equation

$$ax - by + cz = 0.$$

The two right lines starting from O and parallel to the two axes of the complexes are represented by the double equations,

$$\frac{x}{D} = -\frac{y}{E} = \frac{z}{F},$$

$$\frac{x}{D'} = -\frac{y}{E'} = \frac{z}{F'}.$$

These lines being confined within the section, we get in order to determine the constants of its equation,

$$aD + bE + cF = 0,$$
$$aD' + bE' + cF' = 0,$$

whence

$$(D'E - E'D)b + (D'F - F'D)c = 0,$$
$$(D'E - E'D)a - (E'F - F'E)c = 0.$$

Accordingly the equation of the section becomes

(59) $$(E'F - F'E)x + (D'F - F'D)y + (D'E - E'D)z = 0,$$

and the double equation of the right line perpendicular to it,

(60) $$\frac{x}{E'F - F'E} = \frac{y}{D'F - F'D} = \frac{z}{D'E - E'D}.$$

51. By giving to OZ the characteristic direction, the two complexes (57) will be represented by linear equations of the form

(61) $$\begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\varrho = 0, \end{cases}$$

the origin and the direction of OX and OY, perpendicular to OZ, remaining arbitrary.

Again, OZ may be moved parallel to itself, and accordingly ϱ and σ replaced by $(\varrho + x^0)$ and $(\sigma + y^0)$, x^0 and y^0 being the coordinates of the new origin. If especially

$$C + Dy^0 + Ex^0 = 0,$$
$$C' + D'y^0 + E'x^0 = 0,$$

whence

$$x^0 = \frac{C'D - D'C}{D'E - E'D},$$
$$y^0 = -\frac{C'E - E'C}{D'E - E'D};$$

by the mere disappearance of C and C' the equations of the two complexes become

(62) $$\begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + D'\sigma + E'\varrho = 0. \end{cases}$$

OZ in its new position is a completely determined right line, which may be called the *axis of the congruency*. It is easily seen that it intersects at right angles the two axes of rotation of the complexes Ω and Ω', and consequently the axes of all complexes represented by (58).

52. The planes corresponding in the two complexes (62) to a given point (x', y', z') are represented by

(63) $$\begin{cases} (A - Ez')x + (B - Dz')y + (Ex' + Dy')z = Ax' + By', \\ (A' - E'z')x + (B' - D'z')y + (E'x' + D'y')z = A'x' + B'y'. \end{cases}$$

In order to express that both corresponding planes are the same, we obtain the following relations,

$$(64)\quad \begin{cases} (A - Ez') : (B - Dz') : (Ex' + Dy') : (Ax' + By') = \\ (A' - E'z') : (B' - D'z') : (E'x' + D'y') : (A'x' + B'y'). \end{cases}$$

Since both planes pass through the given point, any two equations, hence derived, are sufficient in order to determine the locus of points having, in both complexes, the same corresponding plane. From any two of the following six equations where the accents are omitted, the remaining four may be derived:

$$(65)\quad \begin{cases} (D'E - E'D)z^2 - [(B'E - E'B) - (A'D - D'A)]z \\ \qquad - (A'B - B'A) = 0, \end{cases}$$

$$(66)\quad \begin{cases} (B'D - D'B)y^2 + [(B'E - E'B) + (A'D - D'A)]xy \\ \qquad + (A'E - E'A)x^2 = 0, \end{cases}$$

$$(67)\quad (A'D - D'A)y + (A'E - E'A)x + (D'E - E'D)yz = 0,$$

$$(68)\quad (B'D - D'B)y + (B'E - E'B)x - (D'E - E'D)xz = 0,$$

$$(69)\quad (A'B - B'A)y + (A'E - E'A)xz + (B'E - E'B)yz = 0,$$

$$(70)\quad (A'B - B'A)x - (A'D - D'A)xz - (B'D - D'B)yz = 0,*)$$

53. According to the first two equations (65), (66), the locus in question is a system of two right lines both intersecting OZ. These lines are confined within two planes parallel to XY and determined by (65); their direction within these planes is given by (66). We shall call them the *„directrices“*, and the characteristic section parallel to both and equidistant from them, *the central plane of the linear congruency*. Both „directrices“ intersect at right angles the axis of the congruency, as the axes of all complexes do.

54. We may distinguish two general classes of linear congruencies; either both directrices are *real* or both *imaginary*. In a particular case the two directrices are congruent. Finally, one of the two directrices may pass at an infinite distance.

55. If the directrices are real, and the plane XY be conducted through one of them, the following condition,

$$(71)\qquad A'B - B'A = 0,$$

is derived from (65). In order to determine within XY the direction of that directrix, we get from (67), by putting $z = 0$,

$$(72)\qquad (A'D - D'A)y + (A'E - E'A)x = 0.$$

*) We may observe that any equation which, like those above, is homogeneous with regard to $(A'B - B'A)$, $(A'C - C'A)$ . . . will not be altered if the complexes $\mathfrak{Q}$ and $\mathfrak{Q}'$ are replaced by any of the complexes $(\mathfrak{Q} + \mu\mathfrak{Q}')$.

There is among the infinite number of complexes containing the congruency, which are represented by

$$\Omega + \mu\Omega' = 0,$$

one of a particular description. It is obtained if, starting from (62), we put

$$\mu = -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'};$$

whence

$$(A'D - D'A)\sigma + (A'E - E'A)\rho = 0. \tag{73}$$

All rays of that complex, and therefore all rays of the congruency, meet within XY a fixed right line, represented by (72), on replacing ρ and σ by x and y. This line therefore is the axis of that complex, and one of the two directrices of the congruency. In the same way it may be proved that likewise all rays of the congruency meet the other directrix. Hence

All rays of a congruency meet its two directrices.

Accordingly, both directrices being real and known, we may immediately draw through any given point the only corresponding ray of the congruency.

56. In that peculiar class of congruencies indicated by the condition

$$D'E - E'D = 0, \tag{74}$$

one of the two directrices passes at an infinite distance. By putting simultaneously

$$A'B - B'A = 0,$$

we get, in order to represent the only remaining directrix, now confined within XY, the same equation as before (72). But among the complexes,

$$\Omega + \mu\Omega' = 0,$$

there is, besides the complex (73), the axis of which is the directrix, another complex, represented by

$$D\Omega' - D'\Omega \equiv (A'D - D'A)r + (B'D - D'B)s = 0,$$

the rays of which are parallel to a given plane. Its equation may be transformed into

$$Ar + Bs = 0; \tag{75}$$

accordingly the equation of the plane becomes

$$Ax + By = 0.$$

Hence in this peculiar case

All rays of the linear congruency meet the only directrix, and are parallel to a given plane.

57. From the last considerations we conclude that among the complexes intersecting each other along a linear congruency, and represented by

$$\Omega + \mu\Omega' = 0, \tag{76}$$

there are in the general case two, of a peculiar description, all the rays of which meet their axes. These axes, the directrices of the congruency, are two conjugate right lines with regard to each of the complexes (76).

Generally there is only one ray of the congruency passing through a given point, as there is only one ray confined within a given plane. But each of the two directrices may be considered as the locus of points, from which start an infinite number of rays, constituting a plane which passes through the other directrix. It may be likewise regarded as enveloped by planes, confining each an infinite number of rays, which converge towards a point of the other directrix.

58. We may represent *any two* complexes Ω, Ω' in any position whatever by equations depending only upon the position of their axes and their constants. Let Δ be the shortest distance of the two axes from each other, and ϑ the angle between their directions.

Suppose that OZ intersects at right angles the axes of both complexes. Let OX be the axis of the first complex Ω, k its constant, OX perpendicular to XZ. The equation of the complex will be

$$\sigma = kr.$$

If the axis OY be turned round O till, in its new position OY', the angle $Y'OX$ becoming ϑ, the plane ZOY' passes through the axis of the second complex, the last equation, by putting

$$\sigma = \sigma' \sin\vartheta,$$
$$r = r' + s' \cos\vartheta,$$

assumes the following form,

$$\sigma' \sin\vartheta = kr' + ks' \cos\vartheta.$$

The axis of the second complex Ω' meets OZ in a point O', $O'O$ being Δ. O' may be regarded as the origin of new coordinates, OY and OZ being replaced by $O'Y''$ congruent with the axis of Ω', and by $O'X''$ perpendicular to ZY''; then the second complex Ω' will be represented by the equation

$$\varrho'' = k's'',$$

ϱ'' and s'' being the new ray-coordinates and k' the constant of the complex. In order to make $O'X''$ parallel to OX', it is to be turned

round O' till, in its new position $O'X'''$, the angle $Y'''O'X'''$ becomes ϑ. Accordingly, by putting

$$\varrho'' = \varrho''' \sin\vartheta,$$
$$s'' = r''' \cos\vartheta + s''',$$

the equation of the complex is transformed into the following,

$$\varrho''' \sin\vartheta = k' r''' \cos\vartheta + k' s'''.$$

Finally, by displacing the origin O' into O, ϱ''' becomes $\varrho^{IV} - \Delta r'''$, whence

$$\varrho^{IV} \sin\vartheta = (k' \cos\vartheta + \Delta \sin\vartheta) r''' + k' s''.$$

On omitting the accents, both complexes Ω and Ω', referred to the same axes of coordinates OZ, OY, OX, the two last of which include an angle ϑ, are represented by the following equations,

$$(77) \qquad \begin{cases} \sigma \sin\vartheta = kr + k\cos\vartheta \,.\, s \\ \varrho \sin\vartheta = (k' \cos\vartheta + \Delta \sin\vartheta) r + k' s. \end{cases}$$

59. In order to determine the directrices of the congruency, represented by the system of the last equations (77), the equations (65) and (66) may be transformed by putting

$$A = k, \qquad B = k\cos\vartheta, \quad D = -\sin\vartheta, \quad E = 0,$$
$$A' = k'\cos\vartheta + \Delta\sin\vartheta, \quad B' = k', \quad D' = 0, \quad E' = -\sin\vartheta$$

into those following,

$$(78) \qquad \begin{cases} 0 = (z\sin\vartheta)^2 - [(k+k')\cos\vartheta + \Delta\sin\vartheta] z \sin\vartheta \\ \qquad\qquad - (kk'\sin^2\vartheta - \Delta k \sin\vartheta\cos\vartheta), \end{cases}$$

$$(79) \qquad 0 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{(k-k')\cos\vartheta - \Delta\sin\vartheta}{k'} \cdot \frac{y}{x} - \frac{k}{k'}.$$

On denoting the roots of these equations by $z'\sin\vartheta$, $z''\sin\vartheta$, and $\left(\frac{y}{x}\right)'$, $\left(\frac{y}{x}\right)''$, we obtain

$$z' + z'' = -\frac{(k+k')\cos\vartheta + \Delta\sin\vartheta}{\sin\vartheta},$$
$$(z'-z'')^2 = \frac{4kk' + [(k-k')\cos\vartheta - \Delta\sin\vartheta]^2}{\sin^2\vartheta},$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)'' = \frac{(k-k')\cos\vartheta - \Delta\sin\vartheta}{k'},$$
$$\left(\left(\frac{y}{x}\right)' - \left(\frac{y}{x}\right)''\right)^2 = \frac{4kk' + [(k-k')\cos\vartheta - \Delta\sin\vartheta]^2}{k'^2}.$$

The roots of both equations are simultaneously either real, or imaginary, or congruent. In the last case we have

$$(k-k')\cos\vartheta - \Delta\sin\vartheta = 2\sqrt{-kk'},$$

whence

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)'' = \sqrt{-\frac{k}{k'}}.$$

The central plane of the congruency is represented by

$$z = -\frac{(k+k')\cos\vartheta + \Delta\sin\vartheta}{2\sin\vartheta}. \tag{80}$$

In two peculiar cases this equation becomes

$$z = -\tfrac{1}{2}\Delta,$$

either if

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

or, whatever may be ϑ, if

$$k + k' = 0.$$

Hence the axes of any two complexes selected among those intersecting each other along a given congruency are at equal distances from its central plane if their directions are perpendicular to each other, or if the constants of both complexes are opposite.

60. Without entering into a more detailed discussion of the last results we may finally treat the inverse problem: a congruency being given by means of its two directrices, to determine the complexes passing through it. On the supposition of rectangular coordinates, the two directrices may be represented by the following systems of equations,

$$y - ax = 0, \quad z = \vartheta,$$
$$y + ax = 0, \quad z = -\vartheta.$$

These directrices are the axes of two complexes of a peculiar description, ranging among the infinite number of complexes which intersect each other along the congruency. The two complexes, if moved parallel to themselves till their axes fall within XY, are represented by the equations

$$\sigma - a\varrho = 0,$$
$$\sigma + a\varrho = 0,$$

whence, in order to represent them in their primitive position, the following equations are derived,

$$\sigma - a\varrho + \vartheta s - \vartheta ar = 0,$$
$$\sigma + a\varrho - \vartheta s - \vartheta ar = 0.$$

By adding the two equations, after having multiplied the second by an undetermined coefficient μ, the following equation results,

$$(1+\mu)\sigma - (1-\mu)a\varrho + (1-\mu)\vartheta s - (1+\mu)\vartheta ar = 0,$$

which, on putting

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} = \lambda,$$

becomes

$$\sigma - \lambda a\varrho + \lambda\vartheta s - \vartheta a r = 0. \tag{81}$$

By varying λ all complexes intersecting each other along the congruency are represented by this equation. Their axes are parallel to XY and meet OZ. According to (19) and (52) we may immediately derive the direction of the axes and their constants. The following way of proceeding leads us to the same results, giving besides the position in space of their axes.

By turning OX and OY round OZ through an angle ω, by means of the formula (34), in which α is to be replaced by ω, the last equation is transformed into the following one,

$$(\cos\omega + \lambda a \sin\omega)\sigma' + (\sin\omega - \lambda a\cos\omega)\varrho' + (\lambda\cos\omega + a\sin\omega)\vartheta s' + (\lambda\sin\omega - a\cos\omega)\vartheta r' = 0,$$

whence, by putting

$$\tan\omega = \lambda a, \tag{82}$$

we obtain

$$(1+\tan^2\omega)\sigma' + (\lambda\tan\omega - a)\vartheta r' + (\lambda + a\tan\omega)\vartheta s' = 0.$$

Finally, by displacing the system of coordinates parallel to itself in such a way that the origin moves along OZ through z^0, we get

$$(1+\tan^2\omega)\sigma' + (\lambda\tan\omega - a)\vartheta r' + (\lambda + a\tan\omega)\vartheta s' - (1+\tan^2\omega)z^0 s' = 0,$$

whence, by putting

$$z^0 = \frac{\lambda + a\tan\omega}{1+\tan^2\omega}\cdot\vartheta, \tag{83}$$

there results

$$\sigma' = -\frac{\lambda\tan\omega - a}{1+\tan^2\omega}\cdot\vartheta r' = kr'. \tag{84}$$

The values of $\tan\omega$, z^0, and k remain real if both directrices become imaginary. In this case, XY always remaining the central plane of the congruency and OZ its axis, a, ϑ, and μ are to be replaced by $a\sqrt{-1}$, $\vartheta\sqrt{-1}$, $\mu\sqrt{-1}$. If a be real, we may put

$$a = \tan\alpha,$$

2α being the angle between the directions of the two directrices, bisected by XZ. Accordingly we get

$$\lambda = \frac{\tan\omega}{\tan\alpha}, \tag{85}$$

$$(86)\qquad \begin{cases} z^0 = \vartheta \dfrac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha} \cdot \dfrac{\tan\omega}{1+\tan^2\omega} \\ \quad = \vartheta \dfrac{\sin\omega\cos\omega}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ \quad = \vartheta \dfrac{\sin 2\omega}{\sin 2\alpha}, \end{cases}$$

$$(87)\qquad \begin{cases} k = \vartheta \dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\omega}{\tan\alpha(1+\tan^2\omega)} \\ \quad = \vartheta \dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ \quad = \vartheta \dfrac{\sin(\alpha+\omega)\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha\cos\alpha}. \end{cases}$$

The expression of z^0 shows that the axis within the central plane is directed along one of two right lines bisecting, within this plane, the angle between the directions of the two directrices. These two right lines, having a peculiar relation to the congruency, may be called its *second* and *third* axis. The three axes, perpendicular to each other, meet in the *centre* of the congruency.

In order to express the angle ω by means of z^0, we get the following equation,

$$\sin 2\omega = \frac{z^0}{\vartheta}\sin 2\alpha,$$

indicating two directions perpendicular to each other, and corresponding to any value of z^0.

61. By replacing in the expression

$$z^0 = \frac{\vartheta}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\tan\omega}{1+\tan^2\omega}$$

$\tan\omega$ by $\frac{y}{x}$, we obtain on omitting the accent of z^0,

$$(88)\qquad z(y^2+x^2) = \frac{\vartheta}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot xy.$$

The axes of all complexes constituting the congruency are confined within the surface represented by that equation. But this equation remaining unaltered if the axes OX and OY are replaced by one another, it is evident that the same surface contained the axes of two different series of complexes; one of the two series constituting the given congruency, while the other constitutes a strange one, obtained by turning the given congruency round its axis through a right angle.[2])

62. In representing any three linear complexes by

$$(89)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\varrho + F'(s\varrho - r\sigma) = 0, \\ \Omega'' \equiv A''r + B''s + C'' + D''\sigma + E''\varrho + F''(s\varrho - r\sigma) = 0, \end{cases}$$

the system of these three equations represents a *linear configuration of rays*. The complexes may be replaced by any three selected among those represented by

$$\Omega + \mu\Omega' + \nu\Omega'' = 0,$$

on giving to μ and ν any values whatever. By combining the three complexes Ω, Ω', Ω'' we get three congruencies, and accordingly three couples of directrices. Each ray of the configuration, belonging simultaneously to the three congruencies, meets both directrices of each couple. Hence in the general case the configuration is a *hyperboloid; its rays constitute one of its generations, while the directrices of all congruencies passing through it are right lines of its other generation.* Any three directrices are sufficient in order to determine the hyperboloid.

63. Let P and P', Q and Q', R and R' be the three couples of directrices, each couple determining a central plane. The three central planes H, K, P meet in one point C, which shall be called the *centre* of the configuration. The segment of any ray of a congruency bounded by both directrices being bisected by the central plane, the three right lines drawn through the centre C of the configuration to the three couples of directrices are bisected in the centre; they may be called *diameters* of the configuration.

Let, for instance, π and π' be the extremities of that diameter, $\pi C \pi'$, which meets both directrices P and P'. The ray of the configuration [3]) passing through π is parallel to P', the ray passing through π' parallel to P. Both planes p and p', drawn through P and P' parallel to the central plane H, each confining two right lines (one directrix and the ray parallel to the other) which belong to the two generations of the hyperboloid, touch that configuration, and the point where both right lines in each plane meet is the point of contact.

Draw through the six directrices P and P', Q and Q', R and R' six planes p and p', q and q', r and r' parallel to the central planes H, K, P. The six planes thus obtained constitute a paralellopiped circumscribed to the configuration, the three diameters of which join each the points of contact within two opposite planes. The axes of the three corresponding congruencies (Ω, Ω'), (Ω, Ω''), (Ω', Ω'') are equal to the distance of the three couples of opposite planes; their centres are easily found.

64. The hyperboloid thus obtained is not changed if the complexes Ω, Ω', Ω'' be replaced by any three others taken among the complexes

$$\Omega + \mu\Omega' + \nu\Omega'' = 0,$$

but the three congruencies vary, and their directrices and the three diameters of the hyperboloid. The directrices may be either real or imaginary; accordingly the three diameters either intersect the hyperboloid or do not meet it. In the intermediate case, where both congruencies are congruent, the corresponding diameter falls within the asymptotic cone of the surface.

65. Conversely, starting from the hyperboloid and any three of its diameters, we may revert to the three corresponding congruencies and the series of complexes by means of which these congruencies are determined. If especially the three diameters are the axes of the hyperboloid, the axes of the three congruencies meet in the same point, the centre of the surface, and are directed along its axes.

There is a double way of reverting from a given hyperboloid to the congruencies, and further on to the complexes. The right lines constituting each of its two generations may be considered as its rays, while the right lines of its other generation will be found to be the directrices of the congruencies passing through the surface.

66. It might be desirable to support in the analytical way the geometrical results explained in the last numbers. For that purpose we may select in order to determine the configuration, three complexes of that peculiar description where all rays meet the axis. Accordingly the axes of the three complexes Ω, Ω', Ω'' are three of the six directrices P, Q, R for instance, confined within the planes p, q, r. In assuming these planes as planes of coordinates XY, XZ, YZ, the three complexes, constituting the configuration, are represented by equations of the following form,

$$(90)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv C + D\sigma + E\varrho = 0, \\ \Omega' \equiv B's + D'\sigma + F'(s\varrho - r\sigma) = 0, \\ \Omega'' \equiv A''r + E''\varrho + F''(s\varrho - r\sigma) = 0. \end{cases}$$

In order to represent by means of a single equation between x, y, z a configuration determined by means of three equations between ray-coordinates, these coordinates are to be eliminated by means of the following two equations,

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

to which the third derived one,

$$sx - ry = s\varrho - r\sigma,$$

may be added. In our case we may at first eliminate $s\varrho - r\sigma$, whence

$$(B' + Fx')s - F'yr + D'\sigma = 0,$$
$$(A'' - F''y)r + F''xs + E''\varrho = 0,$$

and after that ϱ and σ,

$$Ezr + Dzs = C + Dy + Ex,$$
$$(B' + F'x - D'z)s - F'yr + D'y = 0,$$
$$(A'' - F''y - E''z)r + F''xs + E''x = 0.$$

Finally, by putting the values of r and s taken from the last two equations into the first one, we obtain

$$\{(B' + F'x - D'z)E'' - F''D'y\}Exz$$
$$+\{(A'' - F''y - E''z)D' + E''F'x\}Dyz$$
$$+\{(A'' - F''y - E''z)(B' + F'x - D'z) + F'F''xy\}(C + Dy + Ex) = 0,$$

which, by the disappearance of terms of the third order, becomes

$$(91)\quad \begin{cases} A''B'C + A''(B'E + CF')x + B'(A''D - CF'')y - C(A''D' + E''B')z \\ \qquad + A''F'Ex^2 - B'F''Dy^2 + CE''D'z^2 \\ + (A''F'D - B'F''E)xy - (A''D'E + CE''F')xz \\ \qquad + (CF''D' - B'E''D)yz = 0. \end{cases}$$

After dividing by $A''B'C$ and replacing

$$-\frac{E}{C},\ -\frac{D}{C},\ \frac{D'}{B'},\ -\frac{F'}{B'},\ \frac{E''}{A''},\ \frac{F''}{A''}$$

by ξ, η, ξ', ξ', ξ'', η'', the last equation assumes the following symmetrical form,

$$(92)\quad \begin{cases} 1 - (\xi + \xi')x - (\eta + \eta'')y - (\xi' + \xi'')z \\ \qquad + \xi\xi'x^2 + \eta\eta''y^2 + \zeta'\zeta''z^2 \\ + (\xi'\eta + \xi\eta'')xy + (\xi'\zeta'' + \xi\xi')xz + (\eta\zeta'' + \eta''\zeta')yz = 0. \end{cases}$$

In order to represent the configuration this equation replaces the three equations (90), which may be written thus,

$$(93)\quad \begin{cases} \eta\sigma + \xi\varrho - 1 = 0, \\ \zeta'\sigma - \xi'(s\varrho - r\sigma) + s = 0, \\ \zeta''\varrho + \eta''(s\varrho - r\sigma) + r = 0. \end{cases}$$

It shows that the configuration is a hyperboloid touching the three planes XY, XZ, YZ. The rays within these planes are represented by

$$(94)\quad \begin{cases} z = 0, & \xi x + \eta y = 1, \\ y = 0, & \xi' x + \zeta' z = 1, \\ x = 0, & \eta'' y + \zeta'' z = 1, \end{cases}$$

the directrices within them by

$$(95)\qquad \begin{cases} z=0, & \xi' x+\eta'' y=1, \\ y=0, & \xi x+\zeta'' z=1, \\ x=0, & \eta y+\zeta' z=1. \end{cases}$$

The points of contact, being within each plane the intersection of the ray and the directrix, are easily obtained.

The rays within the three planes of coordinates which form one edge of a circumscribed parallelopiped meet the directrices within the planes forming the opposite edge.

II. On Complexes of Luminous Rays within Biaxal Crystals.

1. A single ray of light when meeting the surface of a doubly refracting crystal is divided into two rays determined by means of their four coordinates, r, s, ϱ, σ. All incident rays constituting a configuration, especially all rays starting from a luminous point and forming a conical surface, constitute within the crystal a new configuration, represented by the system of three equations between ray-coordinates. All incident rays constituting a congruency, emanating, for instance, in all directions from a luminous point, constitute within the crystal, after refraction, another congruency. Finally, a complex of incident rays, all rays, for instance, emanating in all directions from every point of a luminous curve, constitute within the crystal another complex of refracted rays. The congruency of refracted rays is represented by two, the complex by a single equation between ray-coordinates.

2. But before entering into the discussions indicated by the foregoing remarks, a short digression on double refraction might be desirable.

A biaxal crystal being cut along any plane whatever, we may suppose that this plane is congruent with xy, and that the point where an incident ray meets it is the origin of coordinates O. Let

$$(1)\qquad x=pz,\quad y=qz$$

be the equations of the incident ray, whence

$$(2)\qquad \frac{x}{p}=\frac{y}{q},$$

the equation of the plane of incidence. In the moment of incidence the front of the corresponding elementary wave, perpendicular to the ray, will be represented by

$$(3)\qquad z+qy+px=0.$$

After the front of the wave has moved in air through the unit of distance, its equation becomes

$$z + qy + px = w \tag{4}$$

on putting

$$1 + p^2 + q^2 = w^2.$$

At this moment the front of the wave intersects xy along a right line, which we may denote by RR, the equation of which is

$$qy + px = w. \tag{5}$$

If the optical density of the surrounding medium increases, the value of w decreases in the same ratio.

3. Around the point O, where the incident ray meets the section of the crystal, let the wave-surface be described as it is at that moment when the front of the elementary wave intersects xy along RR. The position of the axes of elasticity of the crystallized medium being known with regard to the axes of coordinates, the equation of the wave-surface only depends upon three constants a, b, c, which are to be referred to the same unit as w. If both systems of axes are congruent, the wave-surface is represented by the well-known equation

$$\begin{cases} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ - [a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2] + a^2b^2c^2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

which, for simplicity, may be written thus,

$$\Omega = 0.$$

4. The wave-surface is intimately connected with three ellipsoids, the equations of which are

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \tag{8}$$

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1. \tag{9}$$

By means of the *first* and the *second* ellipsoid the wave-surface may be obtained most easily. The third ellipsoid has been introduced by myself on account of the following remarkable property. With regard to this ellipsoid the wave-surface is its own polar surface, *i. e.* the polar plane of any point of the surface touches it in another point, and *vice versâ*, the pole of any plane tangent to the surface is one of its points.

The wave-surface and the three ellipsoids depend upon the same constants. When the crystal turns around the point of incidence O, both the surface and the three ellipsoids simultaneously turn with it.

In the new position their equations involve three new constants, indicating the position of the axes of elasticity with regard to the axes of coordinates. Now the wave-surface may be represented by

$$\Omega' = 0,$$

and the third ellipsoid in the corresponding position by

(10) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 - 1 \equiv E = 0.$$

From the six constants of this equation, which may be regarded as known, you may derive the six constants of the wave-surface by determining both the direction and the length of the axes of the third ellipsoid.

Within the plane xy, supposed to be any section whatever of the crystal, OX and OY may be directed along the axes of the ellipse along which this plane is intersected by the third ellipsoid. Accordingly the constant B disappears from the last equation. Besides, if OZ be directed along that diameter of the ellipsoid which is conjugate to the plane xy, and cease therefore, in the general case, to be perpendicular to it, both constants D and E likewise disappear.

5. According to Huyghens's principle, we obtain both rays into which an incident ray is divided, when entering the crystal, by the following general construction. Construct the two planes passing through the trace RR and tangent to the wave-surface described within the crystal around the point of incidence O. Let H and H' be the points of contact within these planes. The two right lines OH, OH' drawn through the point of incidence O and the two points of contact H, H' will be the refracted rays.

By means of the theorem referred to in the last number I have replaced this construction by the following one, much easier to manage. Construct with regard to the third auxiliary ellipsoid E the polar line of the trace RR. This polar line, which may be denoted by SS, meets the wave-surface within the crystal in the two points H and H', OH and OH' being, as before, the two refracted rays.[4])

The plane HOH', containing both refracted rays OH, OH', may be called *the plane of refraction*. There are, generally speaking, four tangent planes passing through RR, as there are four points where the wave-surface is intersected by SS. We get therefore four rays, all confined within the plane of refraction, but two of them, not entering the crystal, are foreign to the question.

6. The plane of refraction may be constructed solely by means of the third ellipsoid E. The details of this construction depend upon

the well-known different modes of determining the polar line SS. On proceeding in this way we meet some remarkable corollaries concerning double refraction.*)

7. The poles of all planes passing through the trace RR, represented by

$$(5) \quad qy + px = w,$$

are points of SS. All right lines passing through the point of incidence O and these poles fall within the plane of refraction confining SS. These right lines may likewise be regarded as diameters of the ellipsoid E conjugate to diametral planes passing through the trace along which the surface of the crystal, *i. e.* the plane xy, is intersected by the wave-front in its primitive position, the trace being parallel to RR and represented by

$$(11) \quad qy + px = 0.$$

Hence

The plane of refraction is that diametral plane of the ellipsoid E, the conjugate diameter of which is perpendicular to the plane of incidence in O.

Accordingly the plane of refraction, conjugate to (6), is represented by the equation

$$(12) \quad \frac{\partial E}{\partial x} q = \frac{\partial E}{\partial y} p,$$

which may be expanded into the following one,

*) In concluding a former paper, „Discussion de la forme générale des ondes lumineuses“ (Crelle's Journal, V. xix. pp. 1 & 91, Mai 1838 [S. 384 dieser Ausgabe]), I gave the following construction:

„Construisez, par rapport à l'ellipsoide directeur, la ligne droite polaire (SS) de celle qui est perpendiculaire au plan d'incidence en O'. Elle coupera la surface de l'onde, decrite autour du point O, en deux points. Les deux lignes droites qui vont du point O aboutir à ces points seront les deux rayons réfractés; tandis que les deux plans qui, contenant la perpendiculaire en O' (RR), passent par ces deux mêmes points seront les fronts des deux ondes planes correspondantes. Enfin il a été démontré, dans ce qui précède, que les deux plans de vibration sont ceux qu'on obtient en conduisant par les rayons lumineux (réfractés) des plans perpendiculaires aux fronts des ondes correspondantes.“

At the present occasion I resume the discussion, announced by myself twenty-six years ago, of a part of this construction. More recently, in the eighteenth Leçon of his valuable work, „Théorie mathématique de l'Elasticité“ (1852), M. Lamé reproduces the curious relation between the wave-surface and the third ellipsoid. [S. 247.] He presents in the following Leçon [S. 286] a remarkable theorem, „which is one of those immediately derived from this relation.“ [8]

$$(13) \qquad (Ax + By + Dz)q = (Bx + Cy + Ez)p,$$

or

$$(14) \qquad (Aq - Bp)x + (Bq - Cp)y + (Dq - Ep)z = 0.*)$$

8. These equations remain unaltered if p and q vary in such a way that the ratio $\frac{p}{q}$ remains the same, *i. e.* if the angle of incidence vary while the plane of incidence remains the same. The same equations do not contain w, the value of which depends upon the density of the surrounding medium. Hence

All rays of light confined within the same plane of incidence, after being divided into two by double refraction, are confined again within the same plane — the plane of refraction. This plane remains the same if the surrounding medium be changed.

9. The plane xy, *i. e.* the surface of the crystal, containing the trace (11), its conjugate diameter, the equations of wich are

$$(15) \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0,$$

or

$$(16) \qquad \begin{cases} Ax + By + Dz = 0, \\ Bx + Cy + Ez = 0, \end{cases}$$

is confined within the plane of refraction, whatever may be the incident ray. The same may be proved analytically by observing that (12) is satisfied by means of the two equations (15). Hence

A ray of light of any direction whatever meeting the surface of a biaxal crystal in a fixed point is so refracted that the plane containing both refracted rays passes through a fixed right line (15).

If without the crystal the plane of incidence turns round the perpendicular to the section, within the crystal the plane of refraction simulta-

*) On representing any one of both refracted rays by the equations

$$x = rz, \qquad y = sz,$$

the last equation, written thus,

$$(1) \qquad (Aq - Bp)r + (Bq - Cp)s + (Dq - Ep) = 0,$$

indicates a relation between the direction of the incident ray, determined by the constants p and q, and the direction of the refracted one, determined by r and s.

This equation will not be altered if the incident ray, moved parallel to itself, meet the section of the crystal in any point

$$x = \varrho, \qquad y = \sigma.$$

If r and s be regarded as variable, ϱ and σ being constant, the equation (1) represents the plane of refraction corresponding to the incident ray

$$x = pz + \varrho, \qquad y = qz + \sigma,$$

and containing both refracted rays.

neously turns round the diameter of the third ellipsoid conjugate to the section.

10. In order to construct the plane of refraction, we want to know another diameter conjugate to any plane passing through the trace (11). In selecting among these planes the wave-front itself in its primitive position, the plane of refraction will be obtained by drawing a plane trough both diameters conjugate to the section of the crystal and the primitive wave-front.

The wave-front in its primitive position is represented by

$$px + qy + z = 0,$$

its conjugate diameter by the equations

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = p \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = q \cdot \dfrac{\partial E}{\partial z}, \end{cases}$$

which, if expanded, become

$$(18) \qquad \begin{cases} Ax + By + Dz = p(Dx + Ey + Fz), \\ Bx + Cy + Ez = q(Dx + Ey + Fz). \end{cases}$$

In order to prove in the analytical way that the diameter conjugate to the primitive wave-front falls within the plane of refraction, it is sufficient to observe that, by eliminating $\frac{\partial E}{\partial z}$ between the two equations (17), the equation of the plane of refraction (12) is obtained.

11. If a ray of light meet the surface of a crystal in a given point, the third ellipsoid remains invariably the same as long as the position of the crystal is not altered. Therefore the diameter conjugate to the wave-front remaining likewise the same, whatever may be the section of the crystal passing through the point of incidence, the plane of refraction always passes through that fixed diameter. Again, if the incident ray, displaced parallel to itself, meet the surface of the crystal in a new point, this new point of incidence becomes the centre of the third ellipsoid, likewise displaced parallel to itself. The diameter conjugate to the primitive wave-front, always passing through the point of incidence, retains the same direction. We may finally observe that the surface of the crystal, if a curved one, may be replaced for any incident ray by the plane tangent to it in the point of incidence.

If a ray of light meet a biaxal crystal in a given point, whatever may be the surface bounding the crystal and containing that point, the plane of refraction passes through a fixed right line.

If a system of parallel rays meet the surface of a biaxal crystal, each ray of which after double refraction is divided into two, there is

within the crystal a fixed direction, not depending upon the shape of the surface, so that the directions of both refracted rays into which any incident ray is divided, and that fixed direction, are confined within the same plane.

12. By putting

$$Dq = Ep,$$

the equation of the plane of refraction becomes

$$(Aq - Bp)x + (Bq - Cp)y = 0,$$

which, after eliminating p and q, may be written thus,

$$(AE - DB)x + (BE - DC)y = 0. \tag{19}$$

In this case the plane of refraction is perpendicular to xy and passes through OZ. The plane of incidence perpendicular to xy, or its trace within this plane, is represented by

$$Dy = Ex. \tag{20}$$

It is easily seen that this trace is perpendicular to the trace of that diametral plane which, with regard to the ellipsoid E, is conjugate to OZ. Indeed this plane is represented by

$$\frac{\partial E}{\partial z} \equiv Dx + Ey + Fz = 0,$$

and its trace within xy by

$$Dx + Ey = 0.$$

Each ray within the plane of incidence (20) is divided by double refraction into two, both confined within the same *vertical* plane of refraction. That is especially the case with regard to the ray incident at right angles; the corresponding plane of refraction, represented by (19), contains the incident ray and both the refracted rays.

13. Besides the vertical ray, there is in each plane of incidence one ray confined with both refracted rays within the same plane. After eliminating p and q between the general equations of the planes of incidence and of refraction,

$$qx = py,$$
$$(Ax + By + Dz)q = (Bx + Cy + Ez)p,$$

the following equation is obtained,

$$B(y^2 - x^2) + (A - C)xy + (Dy - Ex)z = 0, \tag{21}$$

representing a cone of the second degree, the locus of incident rays which are confined within their corresponding planes of refraction. This cone passes through the vertical OZ, and intersects xy within

two right lines perpendicular to each other. These lines are congruent with the two axes of the ellipse

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, \tag{22}$$

along which the plane xy is intersected by the ellipsoid E. (That is instantly seen by putting $B = 0$ [4].) Hence both rays, grazing the surface of the crystal along the axes of the ellipse (22), are confined with both corresponding refracted rays within the same plane.

If especially the crystal be cut in such a way that xy become a *circular* section of the ellipsoid E, each ray grazing the surface of the crystal will be contained within the corresponding plane of refraction. This plane therefore is easily obtained by means of the trace of the plane of incidence and the diameter OZ' of the ellipsoid E conjugate to its circular section xy.

14. In the preceding numbers the plane of refraction has been determined without determining SS' confined within it. This right line, passing through the infinitely distant pole of xy, is parallel to the diameter OZ' conjugate to xy and represented by the equations (16), which by eliminating successively y and x may be replaced by the following ones,

$$\begin{cases} (B^2 - AC)x + (BE - CD)z = 0, \\ (B^2 - AC)y + (BD - AE)z = 0. \end{cases} \tag{23}$$

The direction of SS' being known, any one of its points, *i. e.* the pole of any plane passing through RR', will be sufficient to construct it. If the plane be parallel to the diameter just determined, its pole will fall within the plane xy, and may be also regarded as the pole of RR', with regard to the ellipse (22) along which this plane is intersected by E. The trace RR' being represented by

$$qy + px = w,$$

where

$$w^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

the two lines, the equations of which are

$$(Ax + By)\frac{w}{p} = 1,$$

$$(Bx + Cy)\frac{w}{q} = 1,$$

will meet in the pole mentioned. Hence, on denoting its coordinates by x^0 and y^0,

$$\begin{cases} x^0 = \dfrac{Bq - Cp}{B^2 - AC} \cdot \dfrac{1}{w}, \\ y^0 = \dfrac{Bp - Aq}{B^2 - AC} \cdot \dfrac{1}{w}. \end{cases} \tag{24}$$

Finally, the equations of SS thus obtained are

$$\frac{x - x^0}{CD - BE} = \frac{y - y^0}{AE - BD} = \frac{z}{B^2 - AC}. \tag{25}$$

In order to complete the construction of the two refracted rays, the points (M, M') in which SS meets the wave-surface Ω within the crystal are to be joined with O by means of two right lines OM and OM'.

15. If rays of every direction meet the crystal in O, the corresponding wave-fronts in that moment when, within the crystal, the wave-surface Ω is formed, will envelope a sphere,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

the radius of which is equal to unity. The locus of poles of the wave-fronts, if taken with regard to the ellipsoid E, is a new ellipsoid, which, referred to axes of coordinates directed along the axes of all auxiliary ellipsoids, is represented by the equation

$$\frac{x^2}{b^2c^2} + \frac{y^2}{a^2c^2} + \frac{z^2}{a^2b^2} = 1,$$

or

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = a^2b^2c^2. \tag{26}$$

Its axes are obtained by multiplying the axes of the *second* auxiliary ellipsoid (8), to which it is similar, by abc.

16. The new fourth auxiliary ellipsoid (26) is fitted to connect the constructions of the refracted rays if, the section of the crystal remaining the same, the direction of the incident rays vary. Indeed a right line (MM') drawn through any point Y of the fourth ellipsoid (26) parallel to OZ, *i. e.* to the diameter conjugate to xy with regard to the third ellipsoid E, meets the wave-surface Ω, within the crystal, in two points M and M'. OM and OM' will be the two refracted rays corresponding to that incident ray which is perpendicular to the plane conjugate to OY.

17. After this digression we resume our subject.

Let xy be the section of a biaxal crystal and OZ perpendicular to it. Let a ray of any direction starting from any point of OZ meet the section of the crystal in a point the coordinates of which are

$$x = \varrho, \qquad y = \sigma.$$

Let

$$\begin{cases} x = pz + \varrho, \\ y = qz + \sigma \end{cases} \tag{27}$$

be the equations of the incident ray. In order to express that this ray meets OZ we obtain the following relation,

(28) $$\frac{p}{q} = \frac{\varrho}{\sigma}.$$

Let

(29) $$\begin{cases} x = rz + \varrho, \\ y = sz + \sigma, \end{cases}$$

be the equations of any one of the two corresponding refracted rays. Let us finally suppose that, without the crystal, z is negative, within it, positive. Accordingly in the equations of the incident ray, positive values of z, in the equations of the refracted rays, negative ones are to be rejected.

Again, let

$$\Omega = 0$$

be the general equation of the wave-surface, and

$$E \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 - 1 = 0$$

the equation of the third auxiliary ellipsoid; the position of both being determined by the position of the crystal with regard to the axes of coordinates.

18. According to the footnote of [7], we have between the four constants p, q, r, s, upon which the direction of the incident and the refracted ray depends, the following relation,

(30) $$(Aq - Bp)r + (Bq - Cp)s + (Dq - Ep) = 0.$$

By means of (28) this equation may be transformed into the following one,

(31) $$(A\sigma - B\varrho)r + (B\sigma - C\varrho)s + (D\sigma - E\varrho) = 0,$$

and then represents a *complex of refracted rays*. As no supposition is made regarding the position of the luminous point on OZ, the corresponding incident rays may start in every direction from all its points. They constitute therefore a complex of rays emanating from OZ, perpendicular to the section of the crystal, and considered as a luminous right line. This complex of incident rays, after entering the crystal, passes into the complex of double refracted rays represented by the last equation.

19. By admitting that OX and OY, within the section of the crystal, were directed along the axes of the ellipse, along which xy is intersected by the ellipsoid E, the constant B disappears from the equation of the complex, which then may be written thus,

(32) $$(Ar + D)\sigma = (Cs + E)\varrho.$$

We have hitherto supposed OZ to be perpendicular to xy, and will continue to do so for incident rays without the crystal; but for

the refracted rays entering it (the axes OX, OY, perpendicular to each other, remaining the same) the direction of OZ may be changed by replacing it by the diameter OZ' of the ellipsoid E, conjugate to xy. Then the constants D and E likewise disappear, and the equation of the complex assumes the most simple form,

$$Ar\sigma = Cs\varrho.$$

20. On denoting by a_0 and b_0 the two semiaxes of the ellipse along which xy is intersected by the ellipsoid E, we get

$$A = \frac{1}{a_0^2}, \quad B = \frac{1}{b_0^2}.$$

We may suppose, too, that a_0 falling within OX, is greater than b_0 falling within OY, whence the square of the excentricity of the ellipse e_0^2 becomes $\frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}$.

After having introduced the new constants, the last equation may be written in the following ways,

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot \frac{\varrho}{r}, \tag{33}$$

$$\frac{r\sigma - s\varrho}{r} = e_0^2 \cdot \sigma, \tag{34}$$

$$\frac{s\varrho - r\sigma}{s} = -\frac{a_0^2 - b_0^2}{b_0^2} \cdot \varrho. \tag{35}$$

Besides, on observing that $\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{q}{p}$,

$$\frac{s}{r} = \frac{b_0^2}{a_0^2} \cdot \frac{q}{p}. \tag{36}$$

In order to get a geometrical interpretation of these equations, let any refracted ray of the complex be projected in the ordinary way on the three planes of coordinates XY, XZ and YZ; each axis of coordinates will be met by two of the three projections. The intercepts on OZ' are $\frac{\sigma}{s}$ and $\frac{\varrho}{r}$; on OY, σ and $\frac{r\sigma - s\varrho}{r}$; on OX, ϱ and $\frac{s\varrho - r\sigma}{s}$. Hence

With regard to all rays of the complex, the two intercepts on each axis of coordinates are in the same ratio.

For OZ', *i. e.* for the diameter of the ellipsoid E conjugate to the section of the crystal, this ratio is the ratio of the squares of the axes of the ellipse within this plane. For OY, *i. e.* for the shorter axis of this ellipse, it is equal to the square of its excentricity; for OX the greater axis equal to $\left(-e_0^2 \cdot \frac{a_0^2}{b_0^2}\right)$.

Finally, if any incident ray, without, be projected on the section xy of the crystal along OZ, *i. e.* perpendicularly, and one of the two corresponding refracted rays, within the crystal, along OZ', the projections thus obtained are the traces of the planes of incidence and of refraction, $\frac{q}{r}$ and $\frac{s}{r}$ indicating the trigonometrical tangents of the angles, between the two traces and the greater axis of the ellipse within the section xy. *The ratio of the tangents is equal to the ratio of the squares of the axes of the ellipse.*

21. In order to get a general idea of the distribution of the refracted rays constituting the complex, we may determine first the cone formed by rays passing through any given point within the crystal. If M be this point and x_0, y_0, z_0' its coordinates, the equations

$$\begin{cases} x_0 = rz_0' + \varrho, \\ y_0 = sz_0' + \sigma \end{cases} \tag{37}$$

are to be combined with the equation of the complex, which, on putting $\frac{b_0}{a_0} = \beta$, may be written thus,

$$s\varrho = \beta^2 r\sigma. \tag{38}$$

By eliminating ϱ and σ, we get

$$x_0 s - \beta^2 y_0 r = (1 - \beta^2) z_0' rs. \tag{39}$$

This equation shows that the locus of rays of the complex which pass through the point M is a cone of the second degree. Its equation in ordinary coordinates x, y, z' (z' being referred to OZ') is

$$\begin{cases} x_0(y - y_0)(z' - z_0') - \beta^2 y_0(x - x_0)(z' - z_0') \\ = (1 - \beta^2) z_0'(x - x_0)(y - y_0). \end{cases} \tag{40}$$

From this equation we immediately derive that, whatever may be the position of M within the crystal, the cone always contains three rays parallel to OX, OY, OZ', as well as a fourth ray passing through the origin O. Besides, the cone depends upon the only constant β, the ratio of the two axes of the ellipse, here represented by

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1, \tag{41}$$

along which xy is intersected by the third auxiliary ellipsoid E.

The equation (39), only depending upon the ratio of the constants x_0, y_0, z_0, shows that the cone in question of double refracted rays *is not at all altered if its centre moves along a right line passing through the origin O.*

22. In the peculiar case where M lies within the section of the crystal xy all corresponding incident rays likewise meet in that same

point, constituting the plane of incidence passing through OZ, and represented by

$$y'x = x'y.$$

Here the cone of refracted rays degenerates into a system of two planes, which after putting $z_0' = 0$, are represented by

$$(42) \qquad \begin{cases} z' = 0, \\ x_0(y - y_0) = \beta^2 y_0(x - x_0). \end{cases}$$

The second of these equations represents the plane of refraction corresponding to the plane of incidence.*)

23. If M fall within one of both the other planes of coordinates XZ and YZ, the cone of double refracted rays likewise degenerates into two planes.

24. Either by putting $z' = 0$ in (40), or, after having eliminated r and s between the three equations (37) and (38), by replacing the remaining variables ϱ and σ by x and y, we obtain

$$(43) \qquad y_0 x - \beta^2 x_0 y = (1 - \beta^2)xy.$$

This equation represents, within xy, the trace of the cone of refracted rays which meet in M. It is an equilateral hyperbola, having its asymptotes parallel to OX and OY, and passing through the projection of M. The coordinates of its centre are

$$y = \frac{y_0}{1 - \beta^2}, \quad x = -\frac{\beta^2 x_0}{1 - \beta^2},$$

whence

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{\beta^2}\frac{y_0}{x_0}.$$

As the equation (43) does not involve the constant z_0', we conclude that

*) In the present researches, the auxiliary ellipsoid E, which may be considered as described round any point of the section of the crystal, as well as the wave-surface itself, has no other signification than to indicate by its constants the molecular constitution of the crystal so far as the transmission of luminous vibrations is concerned. Our equations only containing the ratio of these constants, the ellipsoid E and its elliptical trace (41) may be supposed here to have any dimensions whatever.

The last equation (42) represents the plane of refraction as it represents its trace within xy. It likewise represents, if the point M falls within the circumference of the ellipse (41), the normal to that curve in the point M. Hence is derived an elegant construction of the plane of refraction.

If within xy round any point of incidence as centre the ellipse (41) be described, the traces of the planes, both of incidence and of refraction, are such two diameters of that ellipse, the second of which is parallel to the normal to it at the point where the first intersects it.

The cone of double refracted rays continually changes if its centre be moved along a right line parallel to OZ', but its trace within the section of the crystal always remains the same hyperbola.

25. Secondly, we may determine the curve enveloped by refracted rays confined within any given plane. If the plane be

$$tx + uy + vz + w = 0,$$

the equation of this curve will result from the combination of the equation of the complex

$$s\varrho = \beta^2 r\sigma \tag{38}$$

with the two equations

$$tr + us + v = 0,$$
$$t\varrho + u\sigma + w = 0,$$

expressing that a ray (r, s, ϱ, σ) falls within that plane. By eliminating r and ϱ, we obtain

$$ws - \beta^2 v\sigma + (1 - \beta^2)us\sigma = 0, \tag{44}$$

$\frac{1}{\sigma}$ and $\left(-\frac{s}{\sigma}\right)$ being the coordinates of the projection, within yz', of the refracted ray. The projection envelopes an hyperbola; so does the ray itself within the given plane. The last equation (44) does not contain t, and therefore will not be altered if the given plane turns round its trace within yz', represented by

$$uy + vz' + w = 0. \tag{45}$$

Hence it follows that the projections of all refracted rays which meet that trace are tangents to the same hyperbola (44), the asymptotes of which are parallel to OY and OZ', and which especially is touched by the trace itself, with regard to which

$$\sigma = -\frac{w}{u}, \quad \frac{\sigma}{s} = \frac{w}{v}.$$

The refracted rays themselves are tangents to a hyperbolic cylinder having as base the hyperbola (44) and OX as axis.

26. In order to particularize, let us, in the first instance, suppose that the trace (45) is parallel to OZ' and intersects OY in any point Q, OQ being equal to $\left(-\frac{w}{u}\right)$. Then v being equal to zero, the equation (44) becomes

$$\left(w + (1 - \beta^2)u\sigma\right)s = 0,$$

indicating that the hyperbola of the general case degenerates into two points, falling within OY, one at an infinite distance, while the distance of the other (Q') from O is

$$(46) \qquad OQ' = \sigma = -\frac{1}{1-\beta^2}\frac{w}{u} = \frac{1}{1-\beta^2}OQ.$$

Accordingly the hyperbolic cylinder degenerates into two right lines, met by all refracted rays. One of the two lines within the plane xy along which the crystal is cut is parallel to OX, and intersects OY in Q', the other is infinitely distant. Hence all rays within a plane intersecting xz' along a trace (QZ_0') parallel to OZ' are divided into two sets. The rays of one set being parallel to the plane xy may be here omitted. The rays of the other set meet in a fixed point of that same plane along which the crystal is cut. If the plane turns round its trace QZ_0', the fixed point moves, within xy, parallel to OX, describing a right line $Q'X_0$. Each ray meeting both right lines QZ_0' and $Q'X_0$ is a ray of the complex.

27. If, in the second instance, the trace (45) is parallel to OY and intersects OZ' in R, OR being equal to $\left(-\frac{w}{v}\right)$, the equation (44) becomes

$$ws = \beta^2 v\sigma,$$

representing a point of OZ', the distance of which from O is

$$(47) \qquad OR' = -\frac{\sigma}{s} = -\frac{1}{\beta^2}\frac{w}{v} = \frac{1}{\beta^2}OR.$$

The hyperbolic cylinder therefore degenerates into a right line $(R'X_0)$ within xz' parallel to OX and passing through R'. Hence

All refracted rays of the complex confined within a plane intersecting yz' along a trace (RY_0) parallel to OY converge into a fixed point of the plane xz'. If the plane turns round its trace, that point describes, within xz', a right line $R'X_0$ parallel to OX. Each ray meeting both lines RY_0 and $R'X_0$ is a ray of the complex.

28. The axes of coordinates OX and OY may be interchanged by writing a_0 instead of b_0, and reciprocally. Then we get analogous results if, instead of traces within YZ', we consider traces within XZ'. Especially we may immediately conclude from the last equation written thus,

$$(48) \qquad b_0^2 \cdot OR' = a_0^2 \cdot OR,$$

that the relation between the two right lines $R'X_0$ and RY_0 is a mutual one.

29. All rays intersecting two fixed right lines constitute a *linear congruency*, the fixed right lines being its directrices (Sect. I., 55). Consequently *the complex of refracted rays may be generated in three different ways by a variable linear congruency.* In each case the two directrices of the congruency move parallel to any two of the three

axes of coordinates OX, OY, OZ', intersecting the third axis in two points, the distances of which from O are in a given ratio.

30. Hitherto we have supposed that the plane xy is any section whatever of the crystal. Let us now, in particularizing again, admit that the crystal is cut along one of the two circular sections of the third auxiliary ellipsoid E, then represented by

$$A(x^2 + y^2) + Fz^2 = 1;$$

β being equal to unity, the equation of the complex becomes

$$r\sigma = s\varrho. \tag{49}$$

In this peculiar case therefore all rays of the complex meet the diameter OZ', conjugate with regard to E to its circular section xy. Hence *all refracted rays of the complex intersect OZ' as all corresponding incident rays start from OZ.*

Both the diameter of the third auxiliary ellipsoid E perpendicular to its circular section xy, and its diameter conjugate to that section, fall within a principal section of the ellipsoid containing its greatest and least axis, and consequently also its two optic axes. The rectangular axes of coordinates OX and OY may, without changing the equation of the complex, turn round O within the section xy. If one of them, OX for instance, become the vertical projection of OZ', the plane xz' is a *principal plane* of the ellipsoid E, containing the two optic axes, and OY the mean axis of the ellipsoid E.

31. If the plane xy is a principal section of the third auxiliary ellipsoid E (and therefore of all auxiliary ellipsoids), the axis OZ', becoming perpendicular to xy, is congruent with OZ. Then the equation of the ellipsoid E, referred to rectangular coordinates, becomes

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

and may be written thus

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = abc.$$

Hence the equation of the complex is

$$ar\sigma = bs\varrho. \tag{50}$$

If the crystal be turned round OY through an angle α, we get, after replacing x and z by

$$x\cos\alpha - z\sin\alpha,$$
$$x\sin\alpha + z\cos\alpha,$$

the following equation of the ellipsoid E,

$$\begin{cases} (a\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha)x^2 + by^2 - 2(a-c)\sin\alpha\cos\alpha \,.\, xz \\ \qquad + (a\sin^2\alpha + c\cos^2\alpha)z^2 = abc. \end{cases} \tag{51}$$

The axes of the elliptic trace within xy being always directed along OY and OX, the equation of the complex assumes the form of the equation (32), which, after putting $E = 0$ and

$$A : C : D = (a\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha) : b : -(a-c)\sin\alpha\cos\alpha,$$

passes into the following one,

(52) $\quad (a\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha)r\sigma - bs\varrho - (a-c)\sin\alpha\cos\alpha\,.\,\sigma = 0.$

32. The equations (51) and (52) of the last number belong to the case in which one of the three axes of elasticity, OY, falls within the section of the crystal. The two remaining axes of elasticity are confined within the plane XZ, where one of them, corresponding to c, makes with OZ an angle α, this angle being counted towards OX.

The two equations may be regarded as representing the *general* case of *uniaxal crystals* cut along any plane whatever. Indeed let OC be the single optic axis making with the normal to the section xy of the crystal any angle α. Draw through OC the plane xz perpendicular to xy, and OY perpendicular to that plane. The rectangular system of coordinates being thus determined, the equations (51) and (52), after having replaced c by a, will belong to uniaxal crystals.

33. If the optic axis of an uniaxal crystal falls within the section xy, the equation of the complex, on putting $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, becomes

$$cr\sigma = as\varrho.$$

In the case of uniaxal crystals, each plane passing through the optic axis may be regarded as a principal section of the ellipsoid E. Therefore the equation of the complex assumes the form of the equation (50); the form of the two equations being the same as in the general case, where the direction of the third axis is oblique to xy.

If in the case of uniaxal crystals the circular section of E is congruent with the section xy of the crystal, we get in order to represent the complex of double refracted rays, on putting $\alpha = 0$, the following equation,

$$rs = s\varrho,$$

indicating that the plane of refraction is congruent with the plane of incidence, or, in other terms, that both the ordinary and the extraordinary ray into which any incident ray, starting from OZ, is divided by double refraction, likewise meet OZ.

34. The preceding fragmentary researches on double refraction — only calculated to present a new and curious instance of a complex — may be concluded by a last remark.

All the results we have hitherto obtained, especially the determination of the complex of double refracted rays, only depend, 1st,

upon the direction of the diameter of the ellipsoid E conjugate to the section of the crystal; 2ndly, upon the ratio of the axes of the elliptical trace along which the same ellipsoid meets that section. Here, therefore, the third auxiliary ellipsoid E,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = abc,$$

may be replaced by the following one,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

which is similar to it. It is immediately seen that, along the different directions, the reciprocal values of optical elasticity within the crystal are indicated by the *radii vectores* of the new ellipsoid, as the squares of these values are represented by the *radii vectores* of the second auxiliary ellipsoid,

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$$

Additional Note.

Received December 11, 1865.

I. Coordinates of a right line.

1. A right line, if considered as an axis round which a plane revolves, is determined by any two positions of the revolving plane; analytically, by means of two groups of plane-coordinates. If considered as a geometrical locus, described by a point, it is determined by any two positions of the moving point; analytically, by means of two groups of point-coordinates.

Let the plane- and point-coordinates

$$\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}, \quad \frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}$$

be such that

$$tx + uy + vz + w\varpi = 0, \tag{1}$$

which equation, if geometrically interpreted, indicates that each point $\left(\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}\right)$ falls within each plane $\left(\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$, or, which is the same, that each plane $\left(\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$ passes through each point $\left(\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}\right)$. I called such coordinates „associated plane- and point-coordinates“ *), and here whe shall make use of that denomination. By two couples of associated either plane- or point-coordinates,

*) Geometrie des Raumes, No. 5.

$$\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}, \quad \frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'},$$
$$\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}, \quad \frac{x'}{\varpi'}, \frac{y'}{\varpi'}, \frac{z'}{\varpi'},$$

the *same* right line is determined.

We may employ homogeneous instead of ordinary equations*); accordingly each group of three coordinates is replaced by a group of four:

$$t, u, v, w, \quad t', u', v', w',$$
$$x, y, z, \varpi, \quad x', y', z', \varpi'.$$

2. Both planes (t, u, v, w) and (t', u', v', w'), represented in point-coordinates by the equations

$$tx + uy + vz + w\varpi = 0,$$
$$t'x + u'y + v'z + w'\varpi = 0,$$

are arbitrarily chosen amongst those passing through the right line, and may be replaced by any two others, the equations of which have the form

$$(t + \mu t')x + (u + \mu u')y + (v + \mu v')z + (w + \mu w')\varpi = 0,$$

where μ denotes any arbitrary coefficient. But the position of the right line with regard to the axes of coordinates OX, OY, OZ is not characteristically connected with such a plane, except in the case where the plane itself has a peculiar relation to the axes. There are four such cases; the plane may either pass through the origin, or project the right line on the three planes of coordinates. Accordingly, in putting

$$w + \mu w' = 0, \quad v + \mu v' = 0, \quad u = \mu u' = 0, \quad t + \mu t' = 0,$$

the last equation successively becomes

$$(2) \quad \begin{cases} (tw' - t'w)x + (uw' - u'w)y + (vw' - v'w)z = 0, \\ (tv' - t'v)x + (uv' - u'v)y - (vw' - v'w)\varpi = 0, \\ (tu' - t'u)x - (uv' - u'v)z - (uw' - u'w)\varpi = 0, \\ -(tu' - t'u)y - (tv' - t'v)z - (tw' - t'w)\varpi = 0. \end{cases}$$

Any two of the four planes represented by these equations are sufficient to fix the position of the right line. They contain five constants, which by division may be reduced to four, the necessary number upon which the line depends. Besides the five constants in the two equations we meet a sixth one in both remaining equations.

*) I first introduced homogeneous equations into analytical geometry, Crelle's Journal, v. 5, p. 1, 1830. [S. 124 dieser Ausgabe.]

But the right line being determined by the former five, the sixth ought to be a function of them. The equation of condition, connecting the six constants, may, for instance, be obtained by adding the three last equations, after having multiplied the first of them by $-(tu'-t'u)$, the second by $(tv'-t'v)$, and the third by $-(uv'-u'v)$. Thus we obtain

$$(3)\qquad \begin{cases} (tu'-t'u)(vw'-v'w)-(tv'-t'v)(uw'-u'w) \\ \qquad +(uv'-u'v)(tw'-t'w)=0. \end{cases}$$

The following six constants, taken with an arbitrary sign,

$$\pm(uv'-u'v),\quad \pm(tv'-t'v),\quad \pm(tu'-t'u),$$
$$\pm(tw'-t'w),\quad \pm(uw'-u'w),\quad \pm(vw'-v'w),$$

may be regarded *as the six coordinates of the right line.*

3. In quite a similar manner, when in order to fix the position of the right line we replace the two planes by the two points (x, y, z, ϖ) and (x', y', z', ϖ'), we get the following equations in plane coordinates,

$$(4)\qquad \begin{cases} (x\varpi'-x'\varpi)t+(y\varpi'-y'\varpi)u+(z\varpi'-z'\varpi)v=0, \\ (xz'-x'z)t+(yz'-y'z)u-(z\varpi'-z'\varpi)w=0, \\ (xy'-x'y)t-(yz'-y'z)v-(y\varpi'-y'\varpi)w=0, \\ -(xy'-x'y)u-(xz'-x'z)v-(x\varpi'-x'\varpi)w=0, \end{cases}$$

representing four points, the first of which is at an infinite distance on the right line of which the position is to be determined, while the three others are the points in which that line meets the three planes of coordinates. Accordingly we may likewise regard the six constants of the last four equations, taken with an arbitrary sign,

$$\pm(x\varpi'-x'\varpi),\quad \pm(y\varpi'-y'\varpi),\quad \pm(z\varpi'-z'\varpi),$$
$$\pm(yz'-y'z),\quad \pm(xz'-x'z),\quad \pm(xy'-x'y),$$

as *the six coordinates of the right line.* These six coordinates are connected by the following equation of condition:

$$(5)\qquad \begin{cases} (xy'-x'y)(z\varpi'-z'\varpi)-(xz'-x'z)(y\varpi'-y'\varpi) \\ \qquad +(yz'-y'z)(x\varpi'-x'\varpi)=0. \end{cases}$$

4. In denoting the distance of the right line from the origin of coordinates by δ, the angles with it makes with the three axes OX, OY, OZ by α, β, γ, and the angles which the normal to the plane passing through it and the origin makes with the same axes by λ, μ, ν, the following relations are obtained:

$$\text{I.}\quad \left\{ \begin{array}{l} (uv' - u'v) : -(tv' - t'v) : (tu' - t'u) : (tw' - t'w) : \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (uw' - u'w) : (vw' - v'w) \end{array} \right.$$

$$\text{II.}\quad \left\{ \begin{array}{l} = (x\varpi' - x'\varpi) : \quad (y\varpi' - y'\varpi) : (z\varpi' - z'\varpi) : (yz' - y'z) : \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -(xz' - x'z) : (xy' - x'y) \end{array} \right.$$

$$\text{III.}\quad \left\{ \begin{array}{l} = \quad \cos\alpha \quad : \quad \cos\beta \quad : \quad \cos\gamma \quad : \quad \delta\cos\lambda \quad : \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \delta\cos\mu \quad : \quad \delta\cos\nu. \end{array} \right.$$

5. Hence we conclude that

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma, \quad \delta\cos\lambda, \quad \delta\cos\mu, \quad \delta\cos\nu$$

may likewise be regarded as line-coordinates. Here the equation of condition between the six coordinates becomes

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

which, added to the two following ones,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

reduces to four the number of constants upon which the position of the line depends.

6. The two sets of ratios I. and II. retain the same generality after putting $w = w' = \pm 1$, $\varpi = \varpi' = \pm 1$. If we suppose, again, that both planes and both points, by which the line is determined, are coincident, we get, choosing the under signs, two new sets of equal ratios,

$$\text{IV.}\quad \left\{ \begin{array}{l} = (udv - vdu) : -(tdv - vdt) : (tdu - udt : \\ \qquad\qquad\qquad\qquad dt \quad : \quad du \quad : \quad dv \end{array} \right.$$

$$\text{V.}\quad \left\{ \begin{array}{l} = \quad dx \quad : \quad dy \quad : \quad dz \quad : \\ \qquad\qquad (ydz - zdy) : -(xdz - zdx) : (xdy - ydx). \end{array} \right.$$

Thus we obtain two systems of differential coordinates, dx, dy, dz indicating the direction of the line, dt, du, dv the direction of the normal to the plane passing through it and the origin of coordinates. We may regard x, y, z, t, u, v as functions of time.

7. We can represent the direction of a *force* by the right line, and its intensity by the distance of the two points by which the position of the line is fixed. In denominating the projections of the force on OX, OY, OZ by X, Y, Z, and the projections of its moment with regard to the origin on YZ, XZ, XY by L, M, N, we obtain the following new set of equal ratios:

$$\text{VI.}\quad = X : Y : Z : L : M : N.$$

Therefore X, Y, Z, L, M, N may also be considered as six line-coordinates. The equation of condition between them becomes

$$XL + YM + ZN = 0. \tag{6}$$

8. The six coordinates of each system range into two groups of three, to each coordinate of one group corresponds one of the other. By exchanging the three axes of coordinates, the three couples of corresponding coordinates are exchanged, both groups remaining the same.

We may, in order to pass from the six coordinates of a right line to its five absolute coordinates, divide any five of them by the sixth. Here we meet two cases, in dividing either by a coordinate of the first or the second group.

9. Let us divide the first two and the three last terms of the ratios I. by the third $(tu'-t'u)$. In putting

$$\frac{uv'-u'v}{tu'-t'u} = r, \quad -\frac{tv'-t'v}{tu'-t'u} = s, \quad \frac{tw'-t'w}{tu'-t'u} = -\sigma,$$

$$\frac{uw'-u'w}{tu'-t'u} = \varrho, \quad \frac{vw'-v'w}{tu'-t'u} = \eta,$$

where, according to the equation of condition (3),

$$\eta = r\sigma - s\varrho,$$

r, s, $(-\sigma)$, ϱ and η will be the *five* absolute coordinates of the right line. The last two of the four equations (2), representing the planes projecting the right line on the planes XZ and YZ, as well as the projections themselves, may now be written thus,

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

r and s being the trigonometrical tangents of the angles made by the two projections with the axis OZ, ϱ and σ the segments intercepted by them on the axes OX and OY.

Again, let us divide the first five terms of the set of ratios II. by the sixth $(xy'-x'y)$. In putting

$$\frac{x\varpi'-x'\varpi}{xy'-x'y} = -\varkappa, \quad \frac{y\varpi'-y'\varpi}{xy'-x'y} = \pi, \quad \frac{z\varpi'-z'\varpi}{xy'-x'y} = \xi,$$

$$\frac{yz'-y'z}{xy'-x'y} = p, \quad -\frac{xz'-x'z}{xy'-x'y} = q,$$

where, according to the equation of condition (5),

$$\xi = p\varkappa - q\pi,$$

p, q, $(-\varkappa)$, π and ξ will be the *five* new coordinates. We meet four of them in the last two of the four equations (4), representing the

two points where the planes XZ and YZ are intersected by the right line. These equations assume the following form,

$$t = pv + \pi w,$$
$$u = qv + \varkappa w,$$

and may, in denoting the coordinates of the points within their planes by x_y, z_y, and y_x, z_x, be written thus,

$$x_y t + z_y v + w = 0,$$
$$y_x u + z_x v + w = 0;$$

whence

$$p = -\frac{z_y}{x_y}, \quad \pi = -\frac{1}{x_y}, \quad q = -\frac{z_x}{y_x}, \quad \varkappa = -\frac{1}{y_x}.$$

We may add to the former six sets of equal ratios the two following:

VII. $= r : s : 1 : (-\sigma) : \varrho : \eta (\equiv r\sigma - s\varrho)$.
VIII. $= -\varkappa : \pi : \xi (\equiv p\varkappa - q\pi) : p : q : 1$.

10. We have thus obtained eight different systems of line-coordinates, the coordinates being the six terms of each of the eight sets of equal ratios I. to VIII. In changing the position of the origin and the direction of the axes of coordinates, the coordinates of each system are changed. But I do not here transcribe the formulæ of transformation of line-coordinates, observing only that these formulæ may be immediately transferred from one system to any other.

II. Complexes. Congruencies. Surfaces generated by a moving right line. Developable surfaces and curves of double curvature.

11. A homogeneous equation between any six line-coordinates is said to represent the *complex* of those lines the coordinates of which verify that equation. According to the identity of ratios I. to VIII., the following equations,

$F[(uv' - u'v), -(tv' - t'v), (tu' - t'u), (tw' - t'w), (uw' - u'w), (vw' - v'w)] = 0,$

$F[(x\varpi' - x'\varpi), (y\varpi' - y'\varpi), (z\varpi' - z'\varpi), (yz' - y'z), -(xz' - x'z), (xy' - x'y)] = 0,$

$F[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma, \delta\cos\lambda, \delta\cos\mu, \delta\cos\nu] = 0,$

$F[(udv - vdu), -(tdv - vdt), (tdu - udt), dt, du, dv] = 0,$

$F[dx, dy, dz, (ydz - zdy), -(xdz - zdx), (xdy - ydx)] = 0,$

$F[X, Y, Z, L, M, N] = 0,$

$F[r, s, 1, (-\sigma), \varrho, \eta] = 0,$

$F[(-\varkappa), \pi, \xi, p, q, 1] = 0,$

represent the same complex; F being supposed to indicate always the same homogeneous function of the different groups of line-coordinates. The *complex* is said to be of the nth *degree*, and represented by Ω_n if its equations are of that degree.

12. Starting from the first equation,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\Omega_n \equiv F[&(uv'-u'v),\ -(tv'-t'v),\ (tu'-t'u),\ (tw'-t'w),\\ &(uw'-u'w),\ (vw'-v'w)]=0,\end{aligned}\right.$$

t, u, v, w and t', u', v', w' are to be referred to any two planes passing through any line of the *complex*. Let one of the two planes (t', u', v', w') be any given one. Then the last equation, in regarding t', u', v', w' as constant and t, u, v, w as variable, represents within the given plane a *curve* enveloped by tangent-planes (t, u, v, w). The lines of the *complex*, confined within the plane, also envelope the same curve, the class of which is the same as the degree of the *complex*. Hence

A complex Ω_n of the nth degree being given, in each plane traversing space there is a curve of the nth class enveloped by lines of the complex.

The equations of such curves fully agree with the general equation of the *complex* itself. We have only to consider in this equation t', u', v', w' as constant in referring them to the given plane, while t, u, v, w are regarded as variable plane-coordinates.

If $n = 1$, the curve in each plane is replaced by a point; each line within the plane passing through that point belongs to the linear complex.

If $n = 2$, the curves enveloped are conics, which may degenerate into systems of two real or imaginary points.

13. If, in the second equation of the same *complex*,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\lambda\Omega_n \equiv F[&(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\\ &-(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)]=0,\end{aligned}\right.$$

where we put $\varpi' = \varpi = 1$, and λ denotes a constant, x', y', z' are referred to any given point in space and therefore regarded as constant, while x, y, z are the variable coordinates of the points of any line of the *complex*, that equation represents a *cone* of the nth order, the geometrical locus of lines of the complex passing through the given point. Hence

A complex of the nth degree being given, each point of space is the centre of a cone of the nth order into which lines of the complex converge.

In linear complexes the lines meeting in a given point constitute a plane. If $n = 2$, the cones are of the second order, and may degenerate into two real or imaginary planes.

14. The right lines constituting a complex Ω_n may be distributed either within planes traversing space, or according to points into which they converge. We hitherto considered Ω_n as a *complex of right lines*, the number of which is ∞^3. We may as well regard it either as a complex of curves, or as a complex of cones, the number both of curves and cones being ∞^3. Therefore we may say that

$$\Omega_n = 0$$

represents at the same time as well in each plane a curve of the nth class as cones of the nth order having each point of space as centre.

The curve in a plane revolving round a given line, or moving parallel to itself, generates a surface. The cone the centre of which describes a given right line envelopes a surface. The number of surfaces both generated by the curve and enveloped by cones is ∞. There is one of each kind of surfaces corresponding to any given line, all surfaces will be exhausted if that line turns in all directions round any of its points. Accordingly we may likewise consider Ω_n as a complex of surfaces, either described by curves or enveloped by cones.

15. In denoting by μ any constant coefficient,

$$\Omega_n + \mu\Omega_m = 0 \tag{3}$$

represents an infinite number of complexes. The lines congruent in any two of them belong simultaneously to all. All these congruent lines constitute a *congruency* (Ω_n, Ω_m), which we say is represented by the equations of the two complexes.

Each plane traversing space confines a curve of each of the two complexes, the mn tangents common to both curves belong to the *congruency*. All curves within the same plane belonging to the different complexes (3) which pass through the congruency, touch the same mn of its lines. Again, each point is the centre of a cone belonging to the different complexes (3). All such cones meet along the same mn lines, likewise belonging to the *congruency*. Therefore in a congruency (Ω_n, Ω_m) *there are mn lines confined within each plane as there are mn lines passing through each point.* The number of lines constituting a congruency is ∞^2.

If $m = 1$, there are in each plane n lines of the *congruency* (Ω_n, Ω_1) passing throug the same point, as n of its lines converging into each point fall within the same plane; plane and point corresponding to each other.

16. In denoting by μ and ν any two constant coefficients,

$$\Omega = \Omega' + \mu\Omega'' + \nu\Omega''' = 0 \tag{4}$$

represents an infinite number (∞^2) of complexes. All these complexes meet along the lines which simultaneously belong to any three of them, especially to

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0, \quad \Omega''' = 0. \tag{5}$$

By means of these equations the position of such a line is determined, after having arbitrarily assumed the value of one of the four constants upon which the line depends; in other terms, three of these four constants are functions of the fourth, varying each by an infinitely small quantity if this one does. Hence we conlude that a line the coordinates of which verify the three equations (5), generates a *surface* in passing successively into all its positions. *This surface* (Ω', Ω'', Ω''') *is said to be represented by the system of the three equations* (5).

17. Any point of space being given, there are three cones described by lines which belong to the three complexes (5) and pass through the given point. Generally the thre cones (11) do not intersect along the same line. In certain positions only of the point they do. In this case their common intersection belongs to the *surface* (Ω' Ω'', Ω'''), and therefore the point itself also.

Put

$$\begin{cases} \lambda' \Omega' \equiv F' [(x-x'), \quad (y-y'), \quad (z-z'), \quad (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z), \quad (xy'-x'y)] = 0, \\ \lambda'' \Omega'' \equiv F'' [(x-x'), \quad (y-y'), \quad (z-z'), \quad (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z), \quad (xy'-x'y)] = 0, \\ \lambda''' \Omega''' \equiv F''' [(x-x'), \quad (y-y'), \quad (z-z'), \quad (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z), \quad (xy'-x'y)] = 0. \end{cases} \tag{6}$$

If x', y', z', are referred to any arbitrary point, and x, y, z regarded as variable, these equations represent the three cones, ($x'y'z'$) being their common centre, and their generating lines belonging to the three complexes (5). Without changing the conditions of mutual intersection, the three cones may be moved parallel to themselves till the origin of coordinates becomes their common centre. After that displacement their equations are transformed into the following ones:

$$\begin{cases} F' [x, y, z, (yz'-y'z), \quad -(xz'-x'z), \quad (xy'-x'y)] = 0, \\ F'' [x, y, z, (yz'-y'z), \quad -(xz'-x'z), \quad (xy'-x'y)] = 0, \\ F''' [x, y, z, (yz'-y'z), \quad -(xz'-x'z), \quad (xy'-x'y)] = 0. \end{cases} \tag{7}$$

These equations being homogeneous with regard to (x, y, z), will, in the general case, not be simultaneously verified by the three variables.

In order to express that they subsist simultaneously, we obtain, after having eliminated x, y, z,

$$\varphi(x', y', z') = 0, \tag{8}$$

φ indicating a function which involves the primitive constants of the three complexes (5). This function might be rendered homogeneous by introducing ϖ'. This equation, in regarding the coordinates as variable, represents in ordinary point-coordinates the *surface* which in line-coordinates is represented by the system of the three equations (5).

18. Likewise there are in each plane traversing space three curves enveloped by lines of the three complexes Ω', Ω'', Ω'''. In the general case these curves have no common tangent. In certain positions of the plane they have, and then the common tangent belongs to the *surface* (Ω', Ω'', Ω'''). Reciprocally, within a plane passing through any generating line of the *surface*, the curves enveloped by the lines of any complex Ω touch the generating line, and continue to do so if the plane revolves round it. The plane in each of its positions is a *tangent-plane* of the *surface*.

Put

$$(9)\quad \begin{cases} \Omega' \equiv F' [(uv' - u'v), \ -(tv' - t'v), \ (tu' - t'u), \ (t - t'), \\ \qquad\qquad (u - u'), \ (v - v')] = 0, \\ \Omega'' \equiv F'' [(uv' - u'v), \ -(tv' - t'v), \ (tu' - t'u), \ (t - t'), \\ \qquad\qquad (u - u'), \ (v - v')] = 0, \\ \Omega''' \equiv F''' [(uv' - u'v), \ -(tv' - t'v), \ (tu' - t'u), \ (t - t'), \\ \qquad\qquad (u - u'), \ (v - v')] = 0. \end{cases}$$

In regarding t, u, v as variable plane-coordinates, and referring t', u', v' to the traversing plane, these equations represent, within that plane, the three curves enveloped by lines of the three complexes Ω', Ω'', Ω'''. On this account they may be reduced to equations between two variables only, and therefore will not, in the general case, be verified by any values of the three variables reduced to two. By eliminating the variables between the last three equations, an equation,

$$\psi(t', u', v') = 0, \tag{10}$$

will be obtained, which, if t', u', v' are regarded as variable, represents in plane-coordinates the *surface* (Ω', Ω', Ω''').

19. In order to derive the equations (9) from the equations (6) (both systems of equations representing the same *surface*), we may first pass from (6) to the three new equations,

$$F'\,[(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y),\ (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z')]=0,$$
$$F''\,[(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y),\ (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z')]=0,$$
$$F'''\,[(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y),\ (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z')]=0,$$

and then replace x, y, z, x', y', z' by t, u, v, t', u', v'. The last equations are likewise obtained by merely exchanging amongst themselves the constant coefficients in each of the three equations (6). The way of exchanging is obvious. Hence, in considering that the equation (10) is derived exactly by the same algebraical operations from (9) as (8) from (7), we may conclude that (10) may be derived from (8) by a mere exchange of constants and a substitution of plane- for point-coordinates.

20. In a congruency $(\mathfrak{Q}_n, \mathfrak{Q}_m)$ there are mn lines meeting in a given point. Two, three, four of these lines may coincide. In this case the cones of both complexes $\mathfrak{Q}_n$ and $\mathfrak{Q}_m$, the common centre of which is the given point, are tangent one to another, or osculate each other along the double or multiple line. In order to get the analytical expression of these new conditions, we may, as we did before, replace both cones by such as have the origin as centre. In putting

$$\frac{x}{z}=p,\quad \frac{y}{z}=q,$$

the equations of these new cones may be written thus (No. 17),

$$\begin{cases} f(p, q, x', y', z')=0, \\ f'(p, q, x', y', z')=0, \end{cases} \tag{11}$$

f und f' representing two functions of the variables p and q, by means of which the lines constituting the two cones are determined, x', y', z' being the coordinates of the given point. If two of the mn intersecting lines of the two cones are coincident along any right line (p, q), we get for the determination of that line, besides the two equations (11), the following new one,

$$\frac{\partial f}{\partial q}:\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial f'}{\partial q}:\frac{\partial f'}{\partial p},$$

which, if expanded, likewise assumes the form

$$f''(p, q, x', y', z')=0, \tag{12}$$

f'' indicating a new function. By eliminating p and q between the three equations (11) and (12), we get an equation of the form

$$\psi(x', y', z')=0, \tag{13}$$

representing, if x', y', z' be regarded as variable, a *developable surface*, the locus of those points through which *double lines of the congruency* pass, or, in other terms, the locus of the double lines themselves.[5])

In supposing that *three* intersecting lines of the two cones (11) fall within the same line (p, q), the following new equation of condition is obtained

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2}{\frac{\partial^2 f'}{\partial p^2}\left(\frac{\partial f'}{\partial q}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f'}{\partial p\,\partial q}\cdot\frac{\partial f'}{\partial q}\cdot\frac{\partial f'}{\partial p} + \frac{\partial^2 f'}{\partial q^2}\left(\frac{\partial f'}{\partial p}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^3}{\left(\frac{\partial f'}{\partial p}\right)^3} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^3}{\left(\frac{\partial f'}{\partial q}\right)^3},$$

which again may be expanded into an equation of the form

$$f'''(p, q, x', y', z') = 0. \tag{14}$$

This equation, combined with the three former equations (11) and (12), furnishes a new equation of condition,

$$\psi(x', y', z') = 0. \tag{15}$$

The system of the two equations (13) and (15) gives, as locus of points through which *triple* lines of the congruency pass, a curve of *double curvature.*[5])

In pursuing the same course a new equation of the same form as (13) and (15) is obtained, which, combined with these, indicates that there is a certain number of points into which quadruple lines of the congruency converge.

In congruencies of a peculiar description only we meet quintuple lines.

21. In quite the same manner we may determine the position of planes within which two, three, four of the mn lines of the congruency (Ω_n, Ω_m) coincide. In that case both curves within the plane, enveloped by lines of the complexes Ω_n and Ω_m, touch or osculate one another on a common tangent.

In operating on the first two equations (9) as we did on the first two equations (6), we get, in order to represent in plane-coordinates the locus enveloped by planes confining a double line of the congruency, the following equation,

$$\psi(t, u, v) = 0, \tag{16}$$

which, as the remarks of No. 19 here likewise hold, is derived by a mere exchange of constants from (13). Each plane passing through a double line being an enveloping tangent plane of the represented surface, this surface degenerates into a *curve of double curvature.*[5])

Another equation may be derived from (15) in the same way. Let it be

$$\psi'(t, u, v) = 0, \tag{17}$$

the system of the two equations (16) and (17) representing a *developable surface*, the tangent planes of which confine the triple lines of

the congruency. Finally, there are certain tangent planes of the *developable surface* which confine the quadruple lines of the congruency. These planes, as well as the points of the curve of double curvature through which the quadruple lines pass, are determined by associated plane- and point-coordinates, both being functions of the constants of the congruency, and are obtained one from another by the above-mentioned exchange of these constants.

22[5]). The double lines of a congruency constitute a *surface*, degenerated into a *developable* one, as they envelope a surface, degenerated into a *curve of double curvature*. The *developable surface* is represented in point-coordinates by a single equation (13), in plane-coordinates by the system of two equations (16) and (17). *The curve of double curvature* is represented in plane-coordinates by a single equation (16), in point-coordinates by the system of two equations (13) and (15). The tangent-planes of the *surface*, confining triple lines of the congruency, osculate the curve; the points of the *curve*, through which these triple lines pass, are osculating points of the *surface*, in which three consecutive tangent planes meet. The *curve*, in certain points where the tangent is an osculating one, is osculated by a plane in four points. Through such a point pass four consecutive tangent planes of the *surface*, the common intersection of which is a line of inflexion of the developable *surface*. The quadruple lines of the congruency pass through such points, and are confined within such planes.*)

III. On a new System of Coordinates.[6])

23. We have hitherto determined the position of a right line in space in making use of the ordinary system of three axes OX, OY, OZ intersecting each other. The new question is whether we may substitute for this system another, by means of which we are enabled to fix immediately the position of a right line without recurring to points and planes.

---

*) In two remarkable papers „On a New Analytical Representation of Curves in Space," published in the third and fifth volume of the Quarterly Journal of Mathematics, Professor Cayley employed before me, in order to represent cones, the six coordinates of a right line, depending upon any two of its points. Having lately only seen the papers, I hasten to mention it now. But, besides the coincidence referred to, the leading views of Professor Cayley's paper and mine have nothing in common. On this occasion I may state that the principles upon which my paper is based were advanced by me, nearly twenty years ago (Geometry of Space, No. 258), but this had entirely escaped from my memory when I recurred to Geometry some time since.

In the ordinary system of coordinates, (1) the position of a point is determined by means of three planes parallel to the planes of coordinates and meeting in that point, (2) the position of a plane by a linear equation between the three coordinates of a point, regarded as variable; both point and plane depending upon three constants.

In an analogous way a right line is determined by the intersection of four linear complexes. Such a linear complex depends upon the position of its axis and a constant (paper presented, No. 29). A right line, regarded as the direction of a *force*, belongs to the complex, if the moment of rotation of the force with regard to the axis, divided by its projection on the axis, be equal to the constant. Accordingly any four axes in space being given, the position of a right line is fixed by means of four constants, obtained by dividing the four moments of rotation with regard to the four axes by the four corresponding projections on the same axes.[6])

The four axes of the complexes constitute the new system of coordinates; the four constants are the four coordinates of the given right line. The right line intersecting the four axes is the origin of coordinates, its four coordinates being equal to zero.

In the new system of coordinates a right line is determined in the most general way by its four coordinates; but an equation between the four coordinates is not in a general way sufficient to represent a linear complex, depending as it does on five constants.

We may *ad libitum* increase the number of coordinates of a right line.

24. Let $P, Q, R, S, T, U\ldots$ be the axes of any number of complexes, and $p, q, r, s, t, u\ldots$ the corresponding coordinates of a given right line (according to the last number). Let

$$\Omega_p \equiv \Xi_p - p = 0, \quad \Omega_q \equiv \Xi_q - q = 0, \quad \Omega_r \equiv \Xi_r - r = 0,$$
$$\Omega_s \equiv \Xi_s - s = 0, \quad \Omega_t \equiv \Xi_t - t = 0, \quad \Omega_u \equiv \Xi_u - u = 0\ldots$$

be the equations of the complexes. In order to express that the complexes meet along the same line, the following equations of condition are obtained,

$$(18) \qquad \begin{cases} \Omega_t \equiv \varkappa\,\Omega_p + \lambda\,\Omega_q + \mu\,\Omega_r + \nu\,\Omega_s, \\ \Omega_u \equiv \varkappa'\Omega_p + \lambda'\Omega_q + \mu'\Omega_r + \nu'\Omega_s, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

were we may suppose that P, Q, R, S are the former four axes of coordinates; $\varkappa, \varkappa', \lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ indicate any constant coefficients.

In putting the coordinates $p, q, r, s, t, u\ldots$ equal to zero, the general equations of the complexes become

$$\Xi_p = 0, \quad \Xi_q = 0, \quad \Xi_r = 0, \quad \Xi_s = 0, \quad \Xi_t = 0, \quad \Xi_u = 0.$$

These new equations represent complexes of a peculiar kind, the lines of which intersect their axes, the may be said to represent the axes themselves.

In order to satisfy the equation (18), we put

$$(19) \qquad \begin{cases} \Xi_t \equiv \varkappa\, \Xi_p + \lambda\, \Xi_q + \mu\, \Xi_r + \nu\, \Xi_s, \\ \Xi_u \equiv \varkappa'\, \Xi_p + \lambda'\, \Xi_q + \mu'\, \Xi_r + \nu'\, \Xi_s, \end{cases}$$

whence

$$(20) \qquad \begin{cases} t = \varkappa p + \lambda q + \mu r + \nu s, \\ u = \varkappa' p + \lambda' q + \mu' r + \nu' s. \end{cases}$$

The equations (19) require that the *origin* met by the axes P, Q, R, S be likewise met by the new axes $T, U \ldots$

Therefore $p, q, r, s, t, u \ldots$ may be regarded as coordinates of the right line along which all complexes meet; the axes of the complexes intersecting the same right line being the axes of coordinates. A right line being completely determined by the first four coordinates, those remaining depend upon them by linear equations (20).

The system of four axes of coordinates depends upon 16, of five axes upon 19, of six upon 22 constants.

Having thus established a system of coordinates which, independently of points and planes, fixes the position of a right line in space, we are enabled, by regarding right lines as elements of space, to reconstruct the whole geometry without recurring to the ordinary system. Here we are guided by analogy. As far as I may judge, the task is a most grateful but at the same time a long and laborious one.

IV. Geometry of Forces.

25. In recapitulating the contents of the first three paragraphs of this note, new considerations have been suggested to me, which seem calculated, while greatly increasing again this kind of inquiry, to put the key-stone to it. Hitherto, when I borrowed technical terms from mechanical science, the only intention was to simplify the expression. But *force* may be regarded as a merely geometrical notion, and there is only one step more to be taken in order to arrive at a „*Geometry of Forces*“, as there is a geometry based on the notion of right lines.

Forces depend upon five independent constants, four of which indicate their position, while the fifth indicates their intensity. We may call these constants the *five coordinates of the forces.*

In order to fix the direction of a *force*, we may employ line-coordinates and choose the following,

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ M,$$

indicating the projections of the *force* on the three axes of coordinates OX, OY, OZ and its three moments of rotation with regard to these axes. Between them the following equation of condition holds good,

$$XL + YM + ZN = 0$$

(see No. 7). The quotients obtained by dividing any five of them by the sixth are the absolute values of coordinates. From these quotients the intensity of the force has disappeared.

The *same six constants*, reduced by the last equation to five independent ones, *may be regarded as the absolute values of the coordinates of the force*. Instead of homogeneous equations between them, if regarded as variable, representing complexes of lines (of directions of the forces), we now get ordinary equations between the same variables representing *complexes of forces*.

The extension of all former developments thus indicated immediately occurs to us. A single instance may be referred to here. *Forces* constituting a linear complex are such passing in all directions through each point of space as have their intensity equal to the segments taken on their directions from the point to a certain plane corresponding to it. Forces common to two linear complexes and passing through a given point are confined within the same plane, the distance from the points where their directions meet a given line within the plane being their intensity. Forces, the coordinates of which verify simultaneously three linear equations, are distributed through space in such a manner that there is one force of a given intensity passing through each point of space, or, as we may add, confined in each plane.

The general contents of this note (except § IV.) were in a verbal communication presented by me at the last Birmingham Meeting of the British Association. As they concern the principles on which the original paper is based, giving to them a symmetry and a generality I was not before aware of, I thought it necessary to add the note to that paper. At the same time I also endeavoured to give an idea of the great fertility of the method developed. But as I am now preparing a volume for publication on this subject, I do not think it suitable to enter here into any details. The work will embrace the theory of the general equation of the second degree between line-coordinates, requiring no means of discussion but those employed by

me in the case of equations of the same degree between point- or plane-coordinates. The complex of lines represented by such an equation may be regarded likewise as a complex of *curves of the second class*, one of which is confined in each plane, or as a complex of *cones of the second order*, each point of space being the centre of such a cone. In reducing the number of constants upon which the complex depends from 19 to 9, we pass in particularizing step by step from the general complex to a surface of the second order and class, determined by its tangents.

I intend resuming the consideration of the mechanical part of this note. Then a last generalization will occur to us, the equation of condition, hitherto admitted between the six coordinates x, y, z, L, M, N, being removed.

Contents.

I. On Linear Complexes of Right Lines.

Preliminary explanations. — Point-cooordinates. Equations between them representing surfaces by means of their points. Plane coordinates. Equations between them representing surfaces enveloped by planes, 1. Double definition of right lines, either by means of their points or by means of traversing planes. Rays. Axes. The two projections of a ray within two planes of coordinates depend upon four linear constants, which may be regarded as ray-coordinates r, s, ϱ, σ and t, u, v_x, v_y. The two points in which two planes of coordinates are intersected by an axis, depend upon four linear constants which are its coordinates x, y, z_t, z_u and p, q, ϖ, $\varkappa$, 2—5. Complexes of rays or axes represented by one equation between their four coordinates. Congruent lines of two complexes constitute a congruency, of three complexes a configuration (*surface gauche*). In a complex every point is the vertex of a cone, every plane contains an enveloped curve. In a congruency there is a certain number of right lines passing through a given point, and confined within a given plane, 6, 7. A configuration of rays represented by three linear equations, either between r, s, ϱ, σ or t, u, v_x, v_y, is a paraboloid, or a hyperboloid, 8. A configuration of axes represented by three equations, either between p, q, ϖ, $\varkappa$ or x, y, z_t, z_u, is either a hyperboloid or a paraboloid, 9. In a congruency of rays or axes represented by two linear equations, there is one ray and one axis passing through a given point and confined within a given plane, 10. Construction, by means of two fixed

points, of the rays of a congruency represented by two linear equations between t, u, v_x, v_y, 11. Construction, by means of two planes, of the axes of a congruency represented by two linear equations between x, y, z_t, z_u, 12.

Linear complexes of rays. — In a complex represented by a linear equation between r, s, ϱ, σ, all rays traversing a given point constitute a plane; all rays confined within a given plane meet in the same point. Points and planes corresponding to each other, 13 — 15. A new variable $(s\varrho - r\sigma)$ introduced. The general equation of a *linear complex* is $Ar + Bs + C + D\sigma + E\varrho + F(s\varrho - r\sigma) = 0$. Equation of a plane corresponding to a given point, of a point corresponding to a given plane, 16—19. Conjugate right lines. Each ray intersecting any two conjugate lines is a ray of the complex. A ray of the complex may be regarded as two congruent conjugate lines. Principle of polar reciprocity applied, 20. Construction of the plane corresponding to a given point, of the point corresponding to a given plane, 21, 22. Geometrical determination of the constant of the general equation of the complex. There is a characteristic direction given by the double equation $\frac{x}{D} = -\frac{y}{E} = \frac{z}{F}$. If that direction falls within xy, the term $(s\varrho - r\sigma)$ disappears and the general equation becomes linear. If any plane perpendicular to it is taken as one of the three planes of rectangular coordinates, and the corresponding point within it as origin, the general equation assumes one of the forms, $s = k\varrho$, $r = k\sigma$, $s\varrho - r\sigma = k$. A linear complex may, without being altered, turn round a fixed line, and move along it parallel to itself, 23—29. Geometrical interpretation of the last equations, 30. Points and planes corresponding to one another with regard to the complex $s\varrho - r\sigma = k$. Geometrical interpretations, 31, 32. Generalization, 33. Conjugate lines with regard to the complex $s\varrho - r\sigma = k$, 34. A linear complex depends upon five constants, four of which give the position of its axis, 35. Formulae of the transformation of ray-coordinates corresponding to any displacement of the axes of coordinates, 36—38. Analytical determination of the axis of a complex, represented by the general equation. Determination of k, 39—43. In the peculiar case in which k is equal to zero, all rays meet the axis of the complex, 44. Rays passing through the same point, 45.

Linear congruencies of rays. — A linear congruency, along which an infinite number of complexes intersect each other, is represented by the equations of any two of them. Through a given point of space only one ray passes, corresponding to that point, as there is

only one ray confined within a given plane, 46. There is in each complex passing through the congruency one line conjugate to a given right line: all these lines belong to one generation of a hyperboloid, the second generation of which contains rays of the congruency. Generation of a linear congruency by a variable hyperboloid, 47—49. Characteristic section of a congruency to which the axes of all passing complexes are parallel. The axis of the congruency is a fixed right line, perpendicular to that section on which the axes of all complexes meet at right angles, 50, 51. The locus of points having in all complexes the same corresponding plane is a system of two right lines, the directrices of the congruency. Central plane parallel to both directrices and equidistant from them. The directrices may be real or imaginary, 52—54. In the first case there are amongst the complexes two of a peculiar description [44] having both directrices as axes. All rays of the congruency meet both its directrices, 55. The peculiar case in which one of the two directrices is infinitely distant, 56. Each of any two complexes being given by means of its constant k and the position of its axis, to determine both directrices of the congruency, 57—59. A congruency being given by means of its two directrices, to determine the constants and the axes of the complexes passing through it. Centre of the congruency. The two secondary axes within the central plane, 60. Locus of the axes of all complexes meeting along the same congruency, 61.

Linear configurations of rays represented by the equations of three linear complexes. An infinite number of congruencies meet along a linear configuration. Generally it is a hyperboloid. Its rays constitute one of its generations, while the directrices of all congruencies constitute the other, 62. The central planes of all congruencies meet in the same point: the centre of the configuration. Its diameters meet both directrices of the different congruencies, 63. A configuration is determined by means of three complexes, or by means of three congruencies, obtained by combining them two by two. Three couples of planes drawn through both directrices of each of the congruencies parallel to its central plane constitute a parallelopiped circumscribed to the hyperboloid. Each ray intersects all six directrices. The ray within each of the six planes is parallel to the directrix within the opposite plane; the point in which it meets the directrix within the same plane is the point of contact. Three diameters determined by both points of contact within the three couples of opposite planes. Imaginary diameters correspond to imaginary directrices, asymptotes to congruent directrices, 64. A hyperboloid being given, we may

return to the congruencies and complexes which constitute it, 65. The equations of the configurations transformed into an equation between x, y, z, 66.

II. On Complexes of Luminous Rays within Biaxal Crystals.

Complexes of doubly refracted rays corresponding to complexes of incident rays, 1.

Digression on double refraction. Huyghens's principle. The author's construction presented, 1838. Auxiliary ellipsoids. The ellipsoid E, with regard to which the wave-surface is its own polar surface. The plane of refraction, containing both refracted rays, passes through SS, the polar line of RR, along which the surface of the crystal is intersected by the front of the incident elementary wave at that moment when, within the crystal, the wave-surface is formed, 2—6. The plane of refraction is congruent with the diametral plane of E, the conjugate diameter of which is perpendicular to the plane of incidence in O, 7. All rays incident within the same plane are, after double refraction, confined again within the same plane, 8. While the plane of incidence turns round the vertical in O, the corresponding plane of refraction turns round that diameter of E, the conjugate diametral plane of which is the surface of the crystal, 9, 10. Whatever may be the plane or curved surface met by an incident ray in any given point O, all corresponding planes of refraction pass through a fixed right line, 11. Peculiar cases of complexes. The plane of refraction perpendicular to the surface of the crystal. The incident and the two refracted rays confined within the same plane. A circular section of E falling within the surface of the crystal, 12, 13. Analytical determination of SS, 14. A fourth auxiliary ellipsoid, 15, 16.

Complex of doubly refracted rays determined by means of E. Its equation depending upon the constants of E, 17, 18. By taking as axes of coordinates three conjugate diameters of E, two of which, falling within the surface of the crystal, are perpendicular to each other, the general equation of the complex becomes $r\sigma = ks\varrho$, the constant k being the ratio of the squares of the two rectangular diameters, 19. Geometrical interpretation, 20. Refracted rays of the complex passing through a given point constitute a cone of the second order. The cone remains the same if the given point moves along a right line, passing through O, 21. Peculiar cases, 22—24. A hyperbola enveloped by the doubly refracted rays within any given plane. Its determination, 25. Peculiar cases. Geometrical interpretations, 26—28. The complex generated in three different was by a variable

linear congruency, 29. Peculiar case of a complex, the crystal being cut along a circular section of E. All doubly refracted rays meet that diameter of E the conjugate plane of which is the circular section, 30. Peculiar case in which the surface of the crystal is a principal section, 31. Case of uniaxal crystals, 32, 33. The ellipsoid E replaced by a new ellipsoid, the *radii vectores* of which indicate the reciprocal values of optical elasticity, 34.

Additional Note.

Coordinates of a right line, 1—10. Complexes. Congruencies. Surfaces generated by a moving right line. Developable surfaces and curves of double curvature, 11—22. A new system of coordinates, 23, 24. Geometry of forces, 25.

35.

Fundamental Views regarding Mechanics.

(Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Bd. 156, S. 361—380. 1866.)

Being encouraged by the friendly interest expressed by English geometricians, I have resumed my former researches, which have been entirely abandoned by me since 1846. While the details had escaped from my memory, two leading questions have remained dormant in my mind. The first question was to introduce right lines as elements of space, instead of points and planes, hitherto employed; the second question to connect, in mechanics, translatory and rotatory movements with each other by a principle in geometry analogous to that of reciprocity. I proposed a solution of the first question in the geometrical paper presented to the Royal Society. I met a solution of the second question, which in vain I sought for in Poinsot's ingenious theory of coupled forces, by pursuing the geometrical way. The indications regarding complexes of forces, given at the end of the „Additional Notes", involve it. I now take the liberty of presenting a new paper, intended to give to these indications the developments they demand, reserving for another communication a succinct abstract of the curious properties of complexes of right lines represented by equations of the *second* degree, and the simple analytical way of deriving them.

I.

1. We usually represent a force geometrically by a limited line, *i. e.* by means of two points (x', y', z') and (x, y, z), one of which (x', y', z') is the point acted upon by the force, while the right line passing through both points indicates its direction, and the distance between the two points its intensity. We may regard the six quantities

$$(1) \quad x-x', \quad y-y', \quad z-z', \quad yz'-y'z, \quad zx'-z'x, \quad xy'-x'y$$

as the six *coordinates of the force.* The six coordinates of a force represent its three projections on the three axes of coordinates OX,

OY, OZ, and its three moments with regard to the same axes. By means of the three first coordinates the intensity P and the direction of the force; by means of the three last the resulting moment R and the direction of its axis; by the quotient $\frac{R}{P}$ the distance of the force from the origin, and therefore its position in space is determined.

Accordingly we may, as far as we do *not* regard the point acted upon by the force, replace its six coordinates (1) by

(2) $$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N.$$

But a force depending upon five constants only, there exists between these new coordinates an equation of condition, namely,

(3) $$LX + MY + NZ = 0,$$

which indicates that the axis of the resulting moment R (the moment of the force with regard to the origin) is perpendicular to the direction of the force. In replacing the coordinates (2) by the equivalent primitive ones (1), the last equation becomes an identical one between the six point-coordinates x', y', z', x, y, z, and therefore is involved in the form given to the coordinates of the force.

The three last coordinates,

$$yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y,$$

remain unchanged in replacing x, y, z by $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$. Consequently we may substitute for them

$$Yz' - Zy', \quad Zx' - Xz', \quad Xy' - Yx'.$$

Thus, in omitting the accents of x', y', z',

(4) $$X,\ Y,\ Z,\ Yz - Zy,\ Zx - Xz,\ Xy - Yx$$

become the coordinates of the force. Now x, y, z denote the coordinates of *any* point of the line along which the force acts, its intensity and direction being given by X, Y, Z. The form of the new coordinates (4) involves the equation of condition (3).

2. If any number of given forces, represented by the symbols (x', y', z', x, y, z) or (X, Y, Z, L, M, N), act upon or pass through given points, according to the fundamental law of statics, the *resulting effect* is obtained by adding the corresponding six coordinates of the forces

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z', \quad yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y.$$

If the six sums thus obtained,

(5) $$\begin{cases} \Sigma(x - x'), & \Sigma(y - y'), & \Sigma(z - z'), & \Sigma(yz' - y'z), & \Sigma(zx' - z'x), \\ & & \Sigma(xy' - x'y), \end{cases}$$

or

$$\Sigma X,\quad \Sigma Y,\quad \Sigma Z,\quad \Sigma L,\quad \Sigma M,\quad \Sigma N,$$

satisfy the condition

$$\Sigma L\,.\,\Sigma X+\Sigma M\,.\,\Sigma Y+\Sigma N\,.\,\Sigma Z=0, \tag{6}$$

and therefore assume the form of the expressions (1), they are the six coordinates of a resulting force which replaces the given ones. In the general case I propose to call the cause producing the resulting effect *dyname*. The six sums (5) or (6), not satisfying the last equation of condition, may be regarded as the *six coordinates of the dyname*; the first three indicating the intensity and the direction of a force P, the last three the intensity of a moment and the direction of its axis.

In the case of a force (P) depending upon five constants, the moment and the direction of its axis are determined by means of these constants, *i. e.*, by means of

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N, \tag{2}$$

in admitting

$$LX+MY+NZ=0.$$

This equation not being admitted, the corresponding dyname (P, R) depends upon six *linear* constants (2), independent of each other. There is no relation admitted between the direction of the force (P) and the direction of the axis of the moment (R).

In denoting the angle between both directions by φ, we have

$$\frac{LX+MY+NZ}{PR}=\cos\varphi. \tag{7}$$

3. A linear complex of right lines*) is represented by a homogeneous equation of the first degree,

$$\begin{cases} A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D(yz'-y'z)+E(zx'-z'x) \\ \qquad +F(xy'-x'y)\equiv\Omega=0, \end{cases} \tag{8}$$

between the six line-coordinates

$$(1)\quad (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (zx'-z'x),\ (xy'-x'y),$$

regarded as variables. These quantities are simultaneously the coordinates of a force. Let us replace the homogeneous equation (8) by the general one of the first degree,

$$\Omega-1\quad\Xi=0. \tag{9}$$

Forces the coordinates of which satisfy this equation constitute a *linear complex of forces*. The six coordinates of the two points (x', y', z') and (x, y, z) by which the force is determined may likewise be regarded as variables replacing the coordinates (1).

*) See geometrical Paper, p. 734, Philosophical Transactions, 1865. [S. 479 dieser Ausgabe.]

In order to get the forces of the complex Ξ acting upon any given point of space (x', y', z'), we must regard the coordinates of this point as constant. On this supposition the equation of the complex, which may be written thus,

$$(10)\qquad \left|\begin{array}{l} (A + Fy' - Ez')x \\ + (B - Fx' + Dz')y \\ + (C + Ex' - Dy')z \end{array}\right| = Ax' + By' + Cz' + 1,$$

represents a *plane*. Therefore the geometrical locus of the second points (x, y, z), by which the forces acting on the given point (x', y', z') are determined, is a plane. This plane may be called *conjugate* to the point acted upon.

In a linear complex there are acting upon each point of space forces in all directions, the intensity of each force being the segment on its direction between the point acted upon and its conjugate plane.

4. In supposing the forces, and consequently their coordinates, to be infinite, the equation (9) of the complex Ξ becomes

$$\Omega = 0.$$

This equation, therefore, representing a complex of right lines, indicates the position of those forces of the complex Ξ the intensity of which is infinite.

From my geometrical paper*) we deduce that, by a proper transformation of coordinates, the function Ω may be reduced, in putting

$$(11)\qquad C' = \frac{AD + BE + CF}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}},$$

$$(12)\qquad F' = \sqrt{D^2 + E^2 + F^2},$$

to the simple expression

$$F'(xy' - x'y) + C'(z - z').$$

Accordingly the general equation of the complex Ξ assumes the form

$$(13)\qquad F'(xy' - x'y) + C'(z - z') = 1;$$

and in putting

$$(14)\qquad \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2} = \frac{C'}{F'} = k,$$

$$(15)\qquad \frac{1}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}} = \frac{1}{F'} = kk',$$

may be written thus,

$$(16)\qquad (xy' - x'y) + k(z - z' - k') = 0.$$

*) Geometrical Paper, p. 746. [S. 494 dieser Ausgabe.]

There is in a complex of right lines an axis round which it may revolve, and along which it may be displaced parallel to itself, without being changed. After this double movement each line of the complex occupies the place formerly taken by another of its lines. After the transformation of coordinates, the axis of the complex Ω, which may be likewise called *the axis of the complex of forces* Ξ, coincides with OZ; the origin being arbitrarily chosen on OZ, and the axes OX and OY being any two right lines drawn through this point perpendicular to OZ and to each other.

The form of the last equation shows that a linear complex of forces Ξ, like the corresponding complex of lines Ω, *remains unaltered when rotating round its axis or moving parallel to it*, i. e. each force of the complex in its new direction and the new position of the point upon which it acts, continues to belong to the complex in retaining its intensity.

5. Let

$$\Xi \equiv \Omega - 1 = 0, \quad \Xi' \equiv \Omega' - 1 = 0 \tag{17}$$

represent any two linear complexes of forces. Congruent forces of both complexes, the coordinates of which satisfy simultaneously both equations (17), constitute a *congruency of forces*. Their coordinates satisfy likewise the equation

$$\Xi - \Xi' \equiv \Omega - \Omega' = 0, \tag{18}$$

derived from the primitive ones by eliminating their constant term. Hence

In a congruency, the forces act along right lines constituting a linear complex.

The forces of a congruency belonging simultaneously to two complexes, those of them passing through a given point meet the right line along which the two conjugate planes of the point in the two complexes intersect each other.

In a congruency, there act on every point of space an infinite number of forces along right lines constituting a plane, their intensity being given by the distance of the point acted upon from the points of a given right line confined within that plane.

6. Let

$$\Xi \equiv \Omega - 1 = 0, \quad \Xi' \equiv \Omega' - 1 = 0, \quad \Xi'' \equiv \Omega'' - 1 = 0 \tag{19}$$

represent any three linear complexes of forces. Forces, the coordinates of which satisfy simultaneously the three equations, constitute a *double congruency of forces*. Hence we derive immediately the following theorem: —

In a double congruency of forces there is passing through each point of space one single force of given direction and given intensity.

The intensity of the force is equal to the distance between the point acted upon and the point where the three planes conjugate in the three complexes meet.

7. We may derive from the equations (19) the two following:

$$\Omega - \Omega' = 0, \quad \Omega - \Omega' = 0. \tag{20}$$

The coordinates of forces of the double congruency satisfy likewise both equations (20), the system of which represents a congruency of right lines.

The forces of a double congruency act upon right lines which constitute a congruency.

I proved in the geometrical paper that all lines of a congruency intersect two given lines. Hence

All forces constituting a double congruency meet two fixed lines.

8. In following our way we meet congruent forces of four complexes constituting a *threefold congruency*. Their coordinates satisfy simultaneously the equations of the four complexes,

$$\Xi = 0, \quad \Xi' = 0, \quad \Xi'' = 0, \quad \Xi''' = 0, \tag{21}$$

as well as the equations

$$\Xi - \Xi' = 0, \quad \Xi - \Xi'' = 0, \quad \Xi - \Xi''' = 0 \tag{22}$$

derived from them, the system of which represents a rectilinear hyperboloid. Hence

The forces belonging to a threefold congruency act along the generatrices of a hyperboloid*), the points of which are the points acted upon. There are conjugated to such a point in the four complexes of forces (21) four planes meeting in another point of the same generatrix. The distance between the two points represents the intensity of the corresponding force, varying if the point acted upon move on the generatrix.

9. There are only two forces belonging simultaneously to five complexes, *i. e.* there are two right lines, on each point of which one single force of given intensity acts along its direction. Indeed by means of the five equations of the complexes, we may determine, by elimination, five of the six coordinates, which, for simplicity, may be denoted by X, Y, Z, L, M, N, as linear functions of the sixth. Accordingly the equation of condition,

$$LX + MY + NZ = 0,$$

*) Geometrical Paper, p. 757. [S. 505 dieser Ausgabe.]

may be transformed into an equation of the second degree with regard to the sixth coordinate.

10. In the complexes hitherto considered, the forces acting along a right line vary in intensity when the point acted upon moves on that line. According to the more usual notion there is, along a given line, one single force of given intensity acting upon any point of the line. In order to represent complexes of such forces, we replace the coordinates (1), made use of hitherto, either by the coordinates

$$(2) \qquad X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

in admitting the equation of condition

$$(3) \qquad LX + MY + NZ = 0,$$

or by the coordinates

$$(4) \qquad X,\ Y,\ Z,\ Yz - Zy,\ Zx - Xz,\ Xy - Yx.$$

In both systems of coordinates there is no trace left of the point acted upon by the force. The same coordinates belong to right lines and the homogeneous equation

$$(23) \qquad AX + BY + CZ + DL + EM + FN - \Phi = 0$$

represents the same linear complex of lines which was formerly represented by the equation

$$\Omega = 0.$$

Put

$$(24) \qquad \Psi \equiv \Phi - 1 = 0.$$

All forces, the coordinates of which satisfy this equation, constitute such a new complex. It is essential not to confound such complexes with the former ones.[2])

11. The coordinates $x,\ y,\ z$ of any point on the direction of a force are introduced in making use of the coordinates (4). Accordingly the equation of the complex Ψ becomes

$$(25) \qquad AX + BY + CZ + D(Yz - Zy) + E(Zx - Xz) + F(Xy - Yx) = 1$$

If

$$Yz = Zy,$$
$$Zx = Xz,$$
$$Xy = Yx,$$

the corresponding forces pass through the origin; for these forces, belonging to the complex Ψ, we obtain

$$AX + BY + CZ = 1.$$

Let

$$x = az,\quad y = bz$$

indicate the direction of any of these forces, we obtain

$$X = aZ, \quad Y = bZ,$$

whence

$$Z = \frac{1}{Aa + Bb + C},$$

and the intensity of the force

$$P = \frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{Aa + Bb + C}. \tag{26}$$

If the system of coordinates is displaced parallel to itself, any point (x_0, y_0, z_0) becoming the new origin, X, Y, Z remain unaltered, while x, y, z are replaced by $(x + x_0)$, $(y + y_0)$, $(z + z_0)$. Accordingly the equation (25) is transformed into the following one:

$$AX + BY + CZ + D\big(Y(z + z_0) - Z(y + y_0)\big)$$
$$+ E\big(Z(x + x_0) - X(z + z_0)\big) + F\big(X(y + y_0) - Y(x + x_0)\big) = 1.$$

In putting $x, y, z = 0$, the following relation

$$(A - Ez_0 + Fy_0)X + (B + Dz_0 - Fx_0)Y + (C - Dy_0 + Ex_0)Z = 1 \tag{27}$$

is obtained between the coordinates of forces passing through the new origin. Let, in the primitive system of coordinates,

$$x - x_0 = a(z - z_0),$$
$$y - y_0 = b(z - z_0)$$

indicate the direction of any such force, its intensity is

$$P = \frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{(A - Ez_0 + Fy_0)a + (B + Dz_0 - Fx_0)b + (C - Dy_0 + Ex_0)}$$

$$= \frac{1}{(A - Ez_0 + Fy_0)\cos\alpha + (B + Dz_0 - Fx_0)\cos\beta + (C - Dy_0 + Ex_0)\cos\gamma}$$

$$= \frac{1}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + D(z_0\cos\beta - y_0\cos\gamma) + E(x_0\cos\gamma - z_0\cos\alpha) + F(y_0\cos\alpha - x_0\cos\beta)}.$$

There is one force passing simultaneously through both origins, determined by the relations

$$x_0 : y_0 : z_0 = X : Y : Z,$$

by which the last expression for P is reduced to the former (26). The force acting along the same right line is the same. All other forces of the complex $\mathfrak{q}$ passing through the primitive origin, when displaced parallel to themselves, so as to meet the new origin, generally change their intensity. This intensity is not changed if, the direction of the force remaining the same,

$$Ez_0 = Fy_0,$$
$$Dz_0 = Fx_0,$$
$$Dy_0 = Ex_0,$$

i. e. if the new origin describes what we may call a diameter of the complex. We do not enter into any detail, because the results thus obtained would be involved in the following developments.

12. Indeed, in so transforming the arbitrary system of rectangular coordinates — as we did in the case of complexes Ξ — that the new axis OZ coincides with the axis of the complex of lines Φ, the equation (24) is replaced by the equation

$$N + k(Z - k') = 0, \tag{28}$$

k and k' retaining their signification of No. 4, and may be written thus,

$$P(\delta \cos \nu + k \cos \gamma) = kk', \tag{29}$$

in denoting by γ and ν the angles which the directions of the forces and of the axes of their moments make with OZ, and by δ the distances of the lines along which the forces act from the origin. Hence we conclude that the intensities of forces of the complex are the same if

$$\delta \cos \nu + k \cos \gamma = \text{const.} \tag{30}$$

That is especially the case if the line along which a force acts be displaced parallel to OZ or turned round it. Hence

A force of a complex Ψ which, while retaining its intensity, is displaced parallel to the axis of the complex or turns round it, in all its new positions continues to belong to the complex.

13. The lines along which congruent forces of any two complexes Ψ act constitute a linear complex of lines. The congruent forces of three complexes Ψ are directed along lines of a congruency, and consequently meet two fixed lines, *there is one force passing through each point of space, and one confined within each plane traversing it.* The congruent forces of four complexes Ψ are directed along the generatrices of a hyperboloid, their intensity only varying from one generatrix to another. Finally, five complexes Ψ meet along two forces (either real or imaginary).

14. A *dyname*, determined by its six *linear* coordinates,

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N, \tag{2}$$

represents the effect produced by two forces not intersecting each other, the points acted upon not being regarded. The six sums of the corresponding coordinates of both forces are the six coordinates of the dyname. Reciprocally, a dyname, the coordinates of which are

given, may be resolved into equivalent pairs of forces; but a dyname depending upon six, a pair of forces upon ten constants, four of these ten constants may be chosen arbitrarily. Let

$$x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,$$
$$x',\ y',\ z',\ \lambda',\ \mu',\ \nu',$$

be the coordinates of such a pair of forces. The following relations,

$$x + x' = X, \quad y + y' = Y, \quad z + z' = Z,$$
$$\lambda + \lambda' = L, \quad \mu + \mu' = M, \quad \nu + \nu' = N,$$

take place, and besides the following two:

$$L x + M y + N z = 0,$$
$$L' x' + M' y' + N' z' = 0.$$

The last equation may be developed thus,

$$(L - \lambda)(X - x) + (M - \mu)(Y - y) + (N - \nu)(Z - z) = 0,$$

and reduced by means of the preceding one as follows:

$$(31) \qquad \left\{\begin{array}{l} L x + M y + N z \\ + X\lambda + Y\mu + Z\nu \\ = LX + MY + NZ. \end{array}\right.$$

If the coordinates of the dyname be regarded as constant, $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ as variable, this equation represents a linear complex of forces. By interchanging the two forces we meet again the same equation. Hence

A dyname may be resolved into pairs of forces, the forces of all pairs constitute a linear complex.

We must desist from entering into any further detail.

15. Any number of dynames being given, the coordinates of the resulting dyname are obtained by adding the coordinates of the given ones. If the six sums are equal to zero, equilibrium exists.

16. Dynames (P, R) the coordinates of which satisfy the linear equation

$$(32) \qquad \Psi \equiv AX + BY + CZ + DL + EM + FN - 1 = 0,$$

constitute a *complex of dynames.* In supposing P and R, and therefore the coordinates of the dyname, infinite, the last equation becoming homogeneous,

$$(33) \qquad AX + BY + CZ + DL + EM + FN = 0$$

represents a *complex of two variable lines.* [3])

Dynames the coordinates of which satisfy simultaneously two linear equations,

$$\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{P}' = 0,$$

constitute a *congruency of dynames*. In eliminating the constant term, the resulting equation,

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}' = 0,$$

represents a complex of two variable lines.[3])

II.

1. We determine a force producing repulsion or attraction by means of two points in space, one of which is the point acted upon. In quite an analogous way we may represent a rotation, or the force producing it, by means of two planes,

$$(1) \qquad \begin{cases} t'x + u'y + v'z = 1, \\ tx + uy + vz = 1, \end{cases}$$

the coordinates of which are t', u', v' and t, u, v, one of the two planes (t', u', v') being acted upon. The right line, along which both planes meet, is the axis of rotation. The plane acted upon (t', u', v') may in a double way turn round the axis of rotation in order to coincide with the second plane (t, u, v); but there is no more ambiguity in admitting that during the rotation the rotating-plane does not pass through the origin, and consequently its coordinates do not become infinite. (In an analogous way we determine the distance of two points.)

Let us regard the six quantities,

$$(2) \quad t - t', \quad u - u', \quad v - v', \quad uv' - u'v, \quad vt' - v't, \quad tu' - t'u,$$

as the six coordinates of the rotatory force, as they are the six coordinates of its axis of rotation. As far as we do not regard the plane acted upon by the rotatory force, we may replace them by the following six,

$$(3) \qquad \mathfrak{X}, \ \mathfrak{Y}, \ \mathfrak{Z}, \ \mathfrak{L}, \ \mathfrak{M}, \ \mathfrak{N},$$

in admitting the equation of condition,

$$(4) \qquad \mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = 0.$$

Finally we may write the coordinates (2) in the following way,

$$(5) \qquad \mathfrak{X}, \ \mathfrak{Y}, \ \mathfrak{Z}, \ \mathfrak{Y}v - \mathfrak{Z}u, \ \mathfrak{Z}t - \mathfrak{X}v, \ \mathfrak{X}u - \mathfrak{Y}t,$$

(t, u, v) being *any* plane passing through the axis of rotation.

2. The notation of the preceding number being rather unusual, it appears suitable to introduce a few remarks before proceeding.

In referring to the „Additional Notes“ of the geometrical paper*), we get

*) Philosophical Transactions, 1865, p. 776. [S. 528 dieser Ausgabe.]

(6) $$X : Y : Z = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu,$$

(7) $$L : M : N = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma;$$

and in putting

(8) $$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{P}^2,$$

(9) $$\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{R}^2,$$

there results

(10) $$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{P}}{\delta}.$$

Here the angles made by the axis of rotation with the three axes of coordinates OX, OY, OZ are denoted by λ, μ, ν; the angles made with the same axes of coordinates by the right line perpendicular to the plane containing the origin and the axis of rotation by α, β, γ; δ denotes the distance of the axis of rotation from the origin; finally, let us call P the *intensity* of the rotatory force, R its moment, and the right line passing through the origin and making, with the three axes of coordinates, the angles α, β, γ, *the axis of the moment.*

3. Both the intensity (P) and the moment (R) of a rotatory force depend only upon the position of the origin; they do not depend upon the direction of the axes of coordinates. Indeed p and p' denoting the distance of the planes (t, u, v), (t', u', v'), by means of which a rotatory force $(t'u'v', tuv)$ is determined, from the origin, and ω the angle between the planes, we have

(11) $$\mathfrak{P}^2 = (t - t')^2 + (u - u')^2 + (v - v')^2 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2} - \frac{2\cos\omega}{pp'}.$$

Again, the intensity (P) being given according to (10), the moment of the rotatory force (R) remains the same when the axis of rotation gets into any other position, as long as δ, the distance of the axis from the origin, does not change, and in particular when the axis of rotation turns round the axis of the moment.

4. The six coordinates of an ordinary force $(x'y'z', xyz)$ remain the same when, the mutual distance of the two points $(x'y'z')$ and (x, y, z) not being altered, the point (x', y', z') acted upon moves along the direction of the force. So do the six coordinates of a rotatory force $(t'u'v', tuv)$ when, P remaining the same, the plane (t', u', v') acted upon rotates round the axis of rotation. A repulsive or attractive force may act on each point of its direction, a rotatory force on each plane passing through its axis. Let

$$t'x + u'y + v'z - 1 = s' = 0,$$
$$tx + uy + vz - 1 = s = 0,$$

be the equations of the planes (t', u', v') and (t, u, v) by which a rotatory force is determined. In denoting by μ' and μ any two arbitrary constants, the following equations,

$$s - \mu' s' = 0,$$
$$s' - \mu s = 0,$$

represent any two new planes passing through the axis of rotation. Let (t_0', u_0', v_0') and (t_0, u_0, v_0) be the corresponding symbols of the new planes. The first of the two planes, depending upon the constant μ', may be regarded as any plane acted upon by the rotatory force, and accordingly the second plane, depending upon the constant μ, may be determined so that the intensity of the rotatory force, and therefore its moment, shall not be changed. In this supposition

$$t - t' = t_0 - t_0',$$
$$u - u' = u_0 - u_0',$$
$$v - v' = v_0 - v_0',$$

whence we derive

$$\mu + \mu' = 2.$$

There are three values of μ',

$$\frac{t}{t'}, \frac{u}{u'}, \frac{v}{v'},$$

indicating planes acted upon parallel to OX, OY, OZ; let G, H, I be the points in which the corresponding second plane meets the same axes. If any other plane passing through the axis of rotation and intersecting the axes of coordinates in the points G', H', I' is taken as the plane acted upon by the rotatory force, the corresponding second plane intersects the same axes in three points G_1, H_1, I_1, such that the three couples of points,

$$O, G \text{ and } G' G,$$
$$O, H \text{ and } H', H,$$
$$O, I \text{ and } I', I,$$

constitute, on the three axes of coordinates, three systems of harmonic points.[4])

5. If any force be given, its intensity (P) is quite independent of the axes of rectangular coordinates, which may be arbitrarily chosen, but its moment (R) depends upon the choice of the origin. The point upon which the force acts, if free, is impelled along a given line. If the point acted upon be attached to any fixed point, the translatory movement is changed into a rotatory one. Any plane perpendicular to the direction of the force revolves, if one of its points

be fixed, round an axis, confined within the plane, passing through the fixed point and perpendicular to the direction of the force. This axis is the axis of the moment of the force with regard to the fixed point which in the considerations of Part I. was the origin of coordinates. The cause producing the double effect is called *force*. This definition involves that the direction of the force and the direction of the axis of its moment be perpendicular to each other. If there is a moment, the axis of which is not perpendicular to the direction of the translatory movement produced, the cause of it is no more a mere force: we called it a *dyname*.

If any rotatory force be given, both the intensity of the force and the intensity of its moment are independent of the direction of the axes of coordinates, only both depend upon the position of the origin (3). A plane perpendicular to the axis of rotation remains the same during the revolution. If there is another invariable plane, *i. e.* a plane not able to turn round any axis confined within it, and therefore, this axis being infinitely distant, not able to be displaced parallel to itself, the revolution is stopped and transformed into a translatory movement of the plane acted upon. Indeed the intersection of the two invariable planes becoming an invariable line, able only to move along its own direction, the plane acted upon and all the planes connected with it are displaced along the invariable line. The movement along this direction may be decomposed into three, along the axes of coordinates. The cause producing the double movement is called *rotatory force*. If the condition that both axes (of rotation and of translation) are perpendicular to each other be *not* fulfilled, we shall call it *a (rotatory) dyname*. If any point of the line, moveable only along its own direction, be fixed, it endures a pressure along that line which is proportional to the translatory movement, and may be likewise decomposed along the axes of coordinates.

6. Let us, in order to confirm in the analytical way the general views of the last number, consider a rotation the axis of which is confined in the plane XY, and within this plane directed parallel to OX. Let us admit, too, that the plane acted upon, passing through the axis of rotation, is parallel to OZ. Under these conditions, the symbol for the rotation being $(0u0,\ 0uv)$, its coordinates are

$$0,\quad 0,\quad v,\quad -uv,\quad 0,\ 0.$$

Accordingly OZ is the axis of the moment; we obtain

$$\mathfrak{P} = v,\quad \mathfrak{R} = uv,\quad \delta = \frac{1}{u};$$

and in putting

$$\delta v = -\tan\omega,$$

we have

$$\mathfrak{P} = -\frac{\tan\omega}{\delta}, \quad \mathfrak{R} = -\frac{\tan\omega}{\delta^2}.$$

Here ω denotes the *angle of rotation*, taken in starting from the plane acted upon in the direction from OZ to OY. In passing to infinitesimals, the last equation becomes

$$\mathfrak{P} = -\frac{\omega}{\delta}, \quad \mathfrak{R} = -\frac{\omega}{\delta^2}.$$

7. When two rotations take place simultaneously, there is a resulting one in the case only where both axes of rotation are confined within the same plane. Let

$$\mathfrak{X}, \ \mathfrak{Y}, \ \mathfrak{Z}, \ \mathfrak{Y}v - \mathfrak{Z}u, \ \mathfrak{Z}t - \mathfrak{X}v, \ \mathfrak{X}u - \mathfrak{Y}t,$$
$$\mathfrak{X}', \ \mathfrak{Y}', \ \mathfrak{Z}', \ \mathfrak{Y}'v' - \mathfrak{Z}'u', \ \mathfrak{Z}'t' - \mathfrak{X}'v', \ \mathfrak{X}'u' - \mathfrak{Y}'t',$$

be the six coordinates of the rotation, (t, u, v) and (t', u', v') being any two planes containing their axes. If both axes be confined in the same plane, t', u', v' may be replaced by t, u, v. In this supposition, by adding the corresponding coordinates, we get

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{X}', \ \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}', \ \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}',$$
$$(\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}')v - (\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}')u, \ (\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}')t - (\mathfrak{X}+\mathfrak{X}')v, \ (\mathfrak{X}+\mathfrak{X}')u - (\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}')t.$$

These six sums are the coordinates of a new rotation, the axis of which is within the same plane (t, u, v). Here the three equations of condition,

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{X}' = 0, \ \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}' = 0, \ \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}' = 0,$$

which render the six coordinates of the resulting rotation equal to zero, are sufficient to express that equilibrium exists.

In the general case, were both axes of rotation are not confined within the same plane, the six sums of coordinates

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{X}', \ \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}', \ \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}',$$
$$(\mathfrak{Y}v + \mathfrak{Y}'v') - (\mathfrak{Z}u + \mathfrak{Z}'u'), \ (\mathfrak{Z}t + \mathfrak{Z}'t') - (\mathfrak{X}v + \mathfrak{X}'v'),$$
$$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{X}'u') - (\mathfrak{Y}t + \mathfrak{Y}'t'),$$

are the coordinates of a *dyname*. When equilibrium exists we get, in order to express that all resulting effect be destroyed, six equations of condition by putting the six coordinates equal to zero.

8. By generalizing, the following theorem is immediately derived: —

Any number of rotatory forces acting simultaneously, the coordinates of the resulting rotatory force, if there is such a force, if there is not, the coordinates of the resulting rotatory dyname, are obtained by adding

the coordinates of the given rotatory forces. In the case of equilibrium the six sums obtained are equal to zero.

Accordingly the given rotatory forces (or rotations) being represented by the general symbols $(t'u'v', tuv)$, their coordinates are

$$t - t', \quad u - u', \quad v - v', \quad uv' - u'v, \quad vt' - v't, \quad tu' - t'u,$$

and

$$\Sigma(t - t'), \quad \Sigma(u - u'), \quad \Sigma(v - v'),$$
$$\Sigma(uv' - u'v), \quad \Sigma(vt' - v't), \quad \Sigma(tu' - t'u),$$

the coordinates of the resulting force or dyname.

9. The theorem of the last number embraces the statics of rotatory forces as the analogous theorem of Part I., No. 2 involves the statics of ordinary forces. We gave this theorem as the expression of known statical laws. Inversely we might, having previously stated the theorem in a direct way, deduce from it the theorems of statics. Indeed the theorem follows from the mere consideration that the corresponding coordinates of forces, — the three first of which, X, Y, Z, are represented by segments of right lines, the three last, L, M, N, by areas, — indicating homogeneous quantities, may be added, and after addition the sums obtained interpreted in the same way.

The following numbers will show the application of the new theorem, and of its inverse, regarding decomposition of rotatory forces or dynames.

10. Any number n of rotatory forces acting simultaneously on the same plane (t', u', v') may be represented by symbols, t', u', v' being the same in all. By adding their coordinates, the six sums obtained (2) may be written thus,

$$\Sigma t - nt', \qquad \Sigma u - nu', \qquad \Sigma v - nv',$$
$$\Sigma u \,.\, v' - \Sigma v \,.\, u', \quad \Sigma v \,.\, t' - \Sigma t \,.\, v', \quad \Sigma t \,.\, u' - \Sigma u \,.\, t';$$

or in putting

$$\Sigma t = n\vartheta, \qquad \Sigma u = n\varrho, \qquad \Sigma v = n\sigma,$$

thus

$$n(\vartheta - t'), \quad n(\varrho - u'), \quad n(\sigma - v'),$$
$$n(\varrho v' - \sigma u'), \quad n(\sigma t' - \vartheta v'), \quad n(\vartheta u' - \varrho t').$$

These expressions are the coordinates of the resulting rotatory force; ϑ, ϱ, σ are the coordinates of a plane, replacing in the theory of rotation the centre of gravity, which may be called the *central plane of* the given planes (t, u, v), by which, the plane acted upon (t', u', v') being given, the rotatory forces are determined. The resulting axis

of rotation is the intersection of the given plane (t', u', v') and the central plane $(\vartheta, \varrho, \sigma)$. The intensity of the resulting force is

$$u\sqrt{(\vartheta - t')^2 + (\varrho - u')^2 + (\sigma - v')^2}.$$

In the case of equlibrium,

$$\vartheta = t', \quad \varrho = u', \quad \sigma = v',$$

i. e. *the central plane is congruent with the plane acted upon by the given rotatory forces.*

11. A rotatory force,

$$(t', u', v', tuv),$$

may be decomposed into three,

$$(t'u'v', t'u'v), \quad (t'u'v', t'uv'), \quad (t'u'v', tu'v')^*),$$

the six coordinates of which are

0	0	$v - v'$	$-u'(v - v')$	$t'(v - v')$	0
0	$u - u'$	0	$v'(u - u')$	0	$-t'(u - u')$
$t - t'$	0	0	0	$-v'(t - t')$	$u'(t - t')$.

In adding these coordinates, we get

$$t - t', \quad u - u', \quad v - v', \quad uv' - u'v, \quad vt' - v't, \quad tu' - t'u,$$

i. e. the coordinates of the composed given rotatory force.

The three axes of the decomposed rotatory forces are the intersections of the plane acted upon by (t', u', v'), with the three planes of coordinates XY, XZ, YZ, constituting a triangle, the angles of which fall into the three axes of coordinates.

The given rotatory force is thus decomposed into three equivalent ones, the intensity of which is

$$\mathfrak{P}\cos\nu = (v - v') = \mathfrak{Z},$$
$$\mathfrak{P}\cos\mu = (u - u') = \mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{P}\cos\lambda = (t - t') = \mathfrak{X}.$$

In putting

$$\sqrt{t'^2 + u'^2} = \frac{1}{r},$$
$$\sqrt{t'^2 + v'^2} = \frac{1}{q},$$
$$\sqrt{u'^2 + v'^2} = \frac{1}{p},$$

*) The decomposition and recomposition of rotatory forces acting upon a given plane, as well as of ordinary forces acting upon a given point, is immediately derived from the principle of the coexistence of infinitesimal movements, which may be replaced by the causes producing them, *i. e.* by forces.

r, q, p denote the distances within the planes XY, XZ, YZ of the axes of the decomposed forces from the origin, and

$$\frac{\mathfrak{Z}}{r}, \quad \frac{\mathfrak{Y}}{q}, \quad \frac{\mathfrak{X}}{p}$$

represent the three corresponding moments. These moments do not change if, within the planes of coordinates, the axes of rotation revolve round the origin, and especially become parallel to an axis of coordinates: $\frac{\mathfrak{Z}}{r}$ for instance, if the corresponding axis become parallel to OY or OZ, is equivalent to one single coordinate $\frac{v - v'}{r}$, replacing both former ones $-u'(v - v')$ and $t'(v - v')$.

12. Any number of rotatory forces being given, by decomposing each into three, the axes of which are confined within the three planes of coordinates, and by recomposing again the forces having their axes in the same plane, the following values are obtained for the intensities and the moments of the three resulting new forces:

$$\Sigma\mathfrak{X}, \quad \frac{\Sigma\mathfrak{X}}{\pi},$$

$$\Sigma\mathfrak{Y}, \quad \frac{\Sigma\mathfrak{Y}}{\varkappa},$$

$$\Sigma\mathfrak{Z}, \quad \frac{\Sigma\mathfrak{Z}}{\varrho},$$

in putting, for brevity,

$$\Sigma\frac{\mathfrak{x}}{p} = \frac{\Sigma\mathfrak{X}}{\pi},$$

$$\Sigma\frac{\mathfrak{y}}{q} = \frac{\Sigma\mathfrak{Y}}{\varkappa},$$

$$\Sigma\frac{\mathfrak{z}}{r} = \frac{\Sigma\mathfrak{Z}}{\varrho}.$$

In the general case the three resulting rotatory forces constitute, if compounded, a (rotatory) dyname. In denoting the intensity of its force and moment by Π and P, we have

$$(\overline{\Sigma\mathfrak{X}})^2 + (\overline{\Sigma\mathfrak{Y}})^2 + (\overline{\Sigma\mathfrak{Z}})^2 = \Pi^2,$$

$$\left(\Sigma\frac{\mathfrak{x}}{p}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{\mathfrak{y}}{q}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{\mathfrak{z}}{r}\right)^2 = P^2,$$

while the ratios

$$\Sigma\mathfrak{X} : \Sigma\mathfrak{Y} : \Sigma\mathfrak{Z} = \cos l : \cos m : \cos n,$$

$$\Sigma\frac{\mathfrak{x}}{p} : \Sigma\frac{\mathfrak{y}}{q} : \Sigma\frac{\mathfrak{z}}{r} = \cos a : \cos b : \cos c$$

give the angles l, m, n and a, b, c, made by the axes of rotation and the axes of the moments with OX, OY, OZ.

If

$$\cos l \cos a + \cos m \cos b + \cos n \cos c = 0,$$

the resulting dyname degenerates into a mere rotatory force of given intensity and position in space.

In the case of equilibrium

$$\Sigma \mathfrak{X} = 0, \quad \Sigma \mathfrak{Y} = 0, \quad \Sigma \mathfrak{Z} = 0,$$
$$\Sigma \frac{\mathfrak{X}}{p} = 0, \quad \Sigma \frac{\mathfrak{Y}}{q} = 0, \quad \Sigma \frac{\mathfrak{Z}}{r} = 0.$$

If only the three last of these six equations equivalent to the following ones,

$$\frac{\Sigma \mathfrak{X}}{\pi} = 0, \quad \frac{\Sigma \mathfrak{Y}}{\varkappa} = 0, \quad \frac{\Sigma \mathfrak{Z}}{\varrho} = 0,$$

are satisfied, π, $\varkappa$, ϱ become infinite; accordingly the three axes of the rotatory forces (10) are, within three planes of coordinates, at an infinite distance, and consequently the corresponding rotatory movements are replaced by translatory ones, parallel to the planes of coordinates. The three movements thus obtained give a resulting movement of the same kind.

If only the first three of the six equations are satisfied, π, $\varkappa$, ϱ becoming equal to zero, the resulting axis of rotation passes through the origin.

13. After this digression, by which a full analogy between ordinary forces and forces producing rotation is stated, we may proceed by giving most succinct indications only.

With regard to rotations and forces producing them, we have to distinguish two different kinds of complexes corresponding to their different systems of coordinates. We shall first, in making use of the coordinates

$$t - t', \quad u - u', \quad v - v', \quad uv' - u'v, \quad vt' - v't, \quad tu' - t'u,$$

consider a complex of rotations, the coordinates of which satisfy the equation

$$D(t - t') + E(u - u') + F(v - v')$$
$$+ A(uv' - u'v) + B(vt' - v't) + C(tu' - t'u) = 1,$$

which, for brevity, may be written thus,

$$\Theta = H - 1 = 0.$$

In regarding t', u', v' as constant, any fixed plane traversing space is the plane acted upon by the rotatory forces, and therefore containing the axes of rotation. The coordinates of the second planes (t, u, v), by means of which the corresponding rotations of the complex are determined, remaining variable, the same equation repre-

senting the complex now represents a *point*, where all second planes meet. The equation of this point may be written thus,

$$\begin{aligned}&(D + Cu' - Bv')t\\ &+ (E - Ct' + Av')u\\ &+ (F + Bt' - Au')v\\ &= Dt' + Eu' + Fv' + 1;\end{aligned}$$

whence the following coordinates of the point are obtained,

$$x = \frac{D + Cu' - Bv'}{Dt' + Eu' + Fv' + 1},$$

$$y = \frac{E - Ct' + Av'}{Dt' + Eu' + Fv' + 1},$$

$$z = \frac{F + Bt' - Au'}{Dt' + Eu' + Fv' + 1}.$$

We shall call this point the point conjugate to the plane (t', u', v').

Any plane traversing space may be regarded as acted upon by the forces of the complex, each right line it confines, as an axis. The rotation corresponding to each axis is determined by a second plane, traced through the conjugate point and the axis.

The intensity $\mathfrak{P}$ of each rotatory force is thus immediately given. $\mathfrak{P}$ becomes infinite for all rotations the second planes of which pass through the origin. In considering exclusively rotations of this description, the six coordinates of which are likewise infinite, the equation of the complex becomes

$$H = 0.$$

Being now homogeneous, it represents a linear complex of axes or right lines, *identical* with the complex represented in Part I. by the equations

$$\Omega = 0, \quad \text{or} \quad \Phi = 0.$$

It would be beyond the limits of this paper to develope here the theory of linear complexes of rotations. Let me observe only that, in taking for OZ the axis of the complex H, which may be regarded likewise as the axis of the complex of rotations Θ, the general equation of the complex assumes the following form,

$$v - v' + \varkappa(tu' - t'u) = \varkappa\varkappa',$$

in denoting by $\varkappa$ and $\varkappa'$ two constants, and may in retaining the former notation be written thus,

$$\mathfrak{P}\left(\cos\nu + \varkappa \cdot \frac{\cos\gamma}{\delta}\right) = \varkappa\varkappa'.$$

There are amongst the rotations of the complex such transformed into translations. They will be determined in putting $\delta = \infty$, whence

$$\mathfrak{P} \cos \nu = \varkappa\varkappa'.$$

14. The congruent rotations of any *two* complexes,

$$\Theta = 0, \quad \Theta' = 0,$$

constitute a *congruency of rotations*. Any plane being given, there is in each complex a point conjugate to the plane; the line joining both points may be called *conjugate in the congruency to the given plane*. Each plane passing through the conjugate line intersects the given plane along an axis of rotation. Therefore all axes within the plane *meet in the same point*, where it is intersected by its conjugate line. Among the axes there is one confined in the plane passing through the origin; in the corresponding rotation $\mathfrak{P}$ becomes infinite. Again, there is one rotation transformed into a displacement parallel to the given plane.

In accordance with these results, the equation

$$\Theta - \Theta' = 0,$$

derived from the preceding ones by eliminating their constant term, represents a *linear complex of axes*.

15. The congruent rotations of *three* complexes,

$$\Theta = 0, \quad \Theta' = 0, \quad \Theta'' = 0,$$

constitute a *double congruency of rotations*. Any plane traversing space being given, there is another plane passing through the three points conjugate in the three complexes to the given one. This plane may be called *conjugate in the double congruency to the given plane*. There is within the given plane *one single axis of rotation* coinciding with the intersection of both planes, that given, and its conjugate one.

The axes of rotation belonging to a double congruency constitute a linear congruency of right lines, represented by

$$\Theta - \Theta' = 0, \quad \Theta - \Theta'' = 0,$$

and consequently meet two fixed lines.

16. The axes of the congruent rotations of *four* complexes are directed along the generatrices of a hyperboloid. Hence we conclude that all axes of rotation are confined within the tangent planes of the hyperboloid. Such a plane being given, its four conjugate points in the four complexes are within the same conjugate plane, intersecting the given tangent plane along the axis of rotation which it contains. There is within the given tangent plane a line of the other generation of the hyperboloid. When the tangent plane revolves round this line,

the corresponding axis of rotation, in revolving simultaneously, in all its positions intersects the line in a point which describes it, while the axis of rotation describes the hyperboloid.

17. There are two rotations coincident in five complexes.

18. The *second* kind of complexes of rotations is represented by the equation

$$D\mathfrak{X} + E\mathfrak{Y} + F\mathfrak{Z} + A\mathfrak{L} + B\mathfrak{M} + C\mathfrak{N} = 1,$$

in regarding $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, involving the condition

$$\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = 0,$$

as variable coordinates. All discussions regarding the new complexes are analogous to former ones.

19. In not admitting the last equation of condition, the complex of rotations of the second kind is replaced by a complex of (rotatory) dynames.

III.

From the notions developed in Parts I. and II. we immediately obtain two general theorems, constituting the base of statics. In a similar way, as d'Alembert's principle is derived from the „principe des vitesses virtuelles," both theorems may be transformed into fundamental theorems of mechanics.

Any forces acting upon a rigid body may be resolved into forces producing translation and forces producing rotation. In the case of equilibrium, neither a translatory nor a rotatory movement takes place, *i. e.* the resulting forces of both kinds become equal to zero.

In denoting the ordinary forces by

$$(x',\ y',\ z',\quad x,\ y,\ z),$$

the rotatory forces by

$$(t',\ u',\ v',\quad t,\ u,\ v),$$

the equations of equilibrium are

$$\Sigma(x - x') = 0,\quad \Sigma(y - y') = 0,\quad \Sigma(z - z') = 0,$$
$$\Sigma(t - t') = 0,\quad \Sigma(u - u') = 0,\quad \Sigma(v - v') = 0.$$

In putting, n being the number of forces,

$$\Sigma x' = n\xi',\qquad \Sigma y' = n\eta',\qquad \Sigma z' = n\zeta',$$
$$\Sigma x = n\xi,\qquad \Sigma y = n\eta,\qquad \Sigma z = n\zeta,$$
$$\Sigma t' = n\vartheta',\qquad \Sigma u' = n\varrho',\qquad \Sigma v' = n\sigma',$$
$$\Sigma t = n\vartheta,\qquad \Sigma u = n\varrho,\qquad \Sigma v = n\sigma,$$

$(\xi',\ \eta',\ \zeta')$ and $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ are the *centres of gravity* of the two systems of points $(x',\ y',\ z')$ and $(x,\ y,\ z)$; likewise $(\vartheta',\ \varrho',\ \sigma')$ and $(\vartheta,\ \varrho,\ \sigma)$

the *central planes* (II. No. 9) of the two systems of planes (t', u', v') and (t, u, v). Accordingly the equations of equilibrium become

$$\xi = \xi', \qquad \eta = \eta', \qquad \zeta = \zeta',$$
$$\vartheta = \vartheta', \qquad \varrho = \varrho', \qquad \sigma = \sigma'.$$

We commonly represent ordinary forces by means of right lines, analytically by means of the coordinates of their extremities, *i. e.*, by the coordinates of the points acted upon (x', y', z') and the coordinates of second points (x, y, z). In an analogous way rotatory forces are represented by axes and couples of planes passing through them; analytically by the coordinates of planes acted upon (t', u', v'), and the coordinates of second planes (t, u, v). Accordingly in the case of equilibrium —

I. *The centre of gravity of the points acted upon by the forces coincides with the centre of gravity of the second extremities of the right lines by which the forces are represented.*

II. *The central plane of the planes acted upon by the rotatory forces coincides with the central plane of the second planes, by which these forces are determined.*

If we introduce the notion of *masses* both theorems hold good, only the definition of both kinds of forces and therefore their unity is changed. The points acted upon become centres of gravity, corresponding to masses; the planes acted upon central planes, corresponding to moments of inertia.

If equilibrium does not exist, there is in the general case one resulting ordinary force, determined by the two centres of gravity, and one resulting rotatory force, determined by the two central planes. The intensities of the two forces are

$$n\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2},$$
$$n\sqrt{(\vartheta - \vartheta')^2 + (\varrho - \varrho')^2 + (\sigma - \sigma')^2}.$$

These forces decomposed into three are known, and therefore the direction of the axes, both of translation and rotation. We get easily the six differential equations of the movement produced.

I shall think it suitable further to develope the principles here merely indicated. A Treatise on Mechanics, reconstructed on them, will assume quite a new aspect.

36.

On complexes of the second order.

(Report of the british association for the advancement of Science, Abschnitt II, S. 6. 1867.)

Dr. Plücker showed a series of models executed with great accuracy by Mr. Epkens of Bonn, calculated to illustrate his theory of complexes of the second degree. Such complexes are determined analytically by equations of the second degree between the coordinates of right lines in space. In any plane whatever the lines of such a complex envelope a curve of the second class, and every point in space is the centre of a cone of the second order generated by lines of the complex. If a plane revolves round any line within it regarded as an axis, the variable conic therein generates a surface. The same surface is enveloped by a variable cone of the second order, the centre of which moves along the same axis. Surfaces of this description are of the fourth order and of the fourth class. The axis is a double line of the surface. The four circumscribed cones whose centres are the four intersections of the double line with the surface, degenerate into systems of two planes, each of which touches the surface along a curve of the second order. In each of four planes passing through the double line, the conic degenerates into two points; these points (singular points of the surface) are the centres of cones formed by tangents to the surface. The poles of the double line, with regard to all conics in planes passing through it, are situated on a right line, through which pass the polar planes of the double line with regard to all circumscribed cones.

The surfaces even of the more general description are easily constructed; the models exhibited belong to the special case where the double line is at an infinite distance. In this case the surfaces are formed by curves of the second class in parallel planes, having their centres on a right line. The circumscribed cones become circumscribed cylinders.

37.

Géométrie nouvelle de l'espace.

(Les Mondes, Revue hebdomaire des sciences, Band 13, S. 79—84. 1867.)

Supposons un nombre infini de lignes droites tellement distribuées dans l'espace, que celles qui sont renfermées dans un plan donné quelconque enveloppent une courbe de n^{me} classe. Il en résultera que celles de ces lignes droites qui passent par un point donné quelconque constituent un cône du n^{me} ordre ayant son centre en ce point. En effet, considérons les courbes enveloppées dans des plans passant par un axe pris arbitrairement; les tangentes à ces courbes vont couper toutes l'axe, qui ne sera pas coupé par les tangentes à d'autres courbes enveloppées. Dans chacun des plans, n tangentes à la courbe que ce plan renferme vont passer par un point de l'axe, pris lui-même arbitrairement et par conséquent quelconque. D'où l'on conclut que les n tangentes passant dans les différents plans par un même point de l'axe, c'est-à-dire par un point quelconque de l'espace, constituent un cône de n^{me} ordre.

J'ai appelé *complexe* (complexus) *de lignes droites du* n^{me} *degré* l'ensemble des lignes droites jouissant de cette double propriété: 1° les lignes renfermées dans un plan quelconque traversant l'espace enveloppent dans ce plan une courbe de n^{me} classe; 2° tout point de l'espace est le centre d'un cône de n^{me} ordre, engendré par les lignes passant par ce point.

Il résulte immédiatement de cette definition qu'on peut regarder également un complexe de lignes droites du n^{me} degré, ou comme un complexe de courbes de n^{me} classe, dont chaque plan de l'espace en renferme une, ou comme un complexe de cônes de n^{me} ordre, dont chaque point de l'espace est un centre.

On peut aller plus loin en réunissant, d'une part, toutes les *courbes du complexe* dont les plans passent par une même ligne droite quelconque, de l'autre, tous les *cônes du complexe* dont les centres sont

situés sur cette même ligne. L'on obtient ainsi des surfaces très remarquables que j'ai nommées *surfaces du complexe*, engendrées à la fois par des courbes de n^{me} classe, dont les plans passent par une ligne droite donnée quelconque, et enveloppées par des cônes de n^{me} ordre, dont les centres sont situés sur cette même ligne droite.

Toutes les tangentes à la surface du complexe, qui appartiennent en même temps au complexe lui-même, coupent une même ligne droite, lieu des centres des cônes formés par ces tangentes et intersection commune des plans des courbes enveloppées par elles. Cela revient à dire que cette ligne droite est une ligne n-tuple de la surface. Un plan quelconque coupe cette surface suivant une courbe ayant un point n-tuple sur la ligne n-tuple. A tout cône circonscrit à la surface, correspond un plan n-tuple passant par la ligne n-tuple. Si le plan sécant passe par la ligne n-tuple ou multiple, cette ligne sera une ligne n-tuple de la courbe située dans ce plan, comme elle est une arête n-tuple de tout cône dont le centre est situé sur elle.

Toute surface d'un complexe du n^{me} degré est en même temps de l'ordre et de la classe n^2.[1])

Pour le prouver, faisons remarquer d'abord que l'ordre d'une surface est celui de ces sections planes. Celles de ces courbes dont les plans passent par la ligne n-tuple de la surface sont de la n^{me} classe et par conséquent de l'ordre $n(n-1)$. Mais cet ordre s'élève à n^2 à cause de la ligne n-tuple conjuguée à la courbe, et qui n'entre pas dans la détermination de la courbe au moyen de ses tangentes. C'est l'ordre général des courbes d'intersection et de la surface.

D'autre part, un cône circonscrit, ayant son centre sur la ligne n-tuple, est du n^{me} ordre, par conséquent de la classe $n(n-1)$; mais ici encore, à cause de l'arête n-tuple conjuguée au cône, la classe s'élève à n^2. D'ailleurs la classe d'une surface est celle de ses cônes circonscrits. Donc la classe, ainsi que l'ordre des surfaces d'un complexe du n^{me} degré, sont n^2.

Si le complexe est du premier degré, les surfaces du complexe deviennent des lignes droites; les cônes qui les enveloppent deviennent à leur tour des plans, et les courbes qui les engendrent des points.

Si le complexe est du deuxième degré, ses surfaces qui possèdent une ligne double sont du quatrième degré et de la quatrième classe.

S'il est du quatrième ordre, la surface est coupée par la ligne double en quatre points. Les quatre cônes circonscrits du second ordre dont ces points sont les centres dégénèrent en systèmes de deux

plans. Chacun des plans touche la surface suivant une courbe de la deuxième classe.[2])

S'il est de la quatrième classe, la surface est touchée par quatre plans passant par la ligne double. Dans ces quatres plans les courbes enveloppées de la deuxième classe dégénèrent en systèmes de deux points. En chacun de ces points singuliers, la surface est le centre d'un cône du second ordre dont les arêtes sont tangentes à la surface.[2])

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons aux complexes du second degré. Les surfaces de ces complexes sont faciles à construire au moyen de celles de leurs tangents, des courbes d'intersection et des cônes circonscrits qui, en même temps, sont lignes, courbes et cônes du complexe. Ainsi, par exemple, deux courbes quelconques (parmi celles qui sont enveloppées par les lignes du complexe) étant données, la surface passant par les deux courbes aura pour ligne double l'intersection des deux plans qui renferment les deux courbes données. Lorsqu'en outre on donne une ligne droite qui rencontre la ligne double de la surface, appartenant au complexe et touchant la surface, le cône circonscrit à la surface, et dont le centre coincide avec le point de rencontre de la ligne double et de la ligne donnée, est complètement déterminé. En effet, il a pour arêtes, outre la ligne donnée, les deux couples de tangentes que l'on peut mener de son centre aux deux courbes données.

Lorsque deux cônes circonscrits à la surface sont donnés, la ligne droite qui joint leurs centres est la ligne double de la surface. Si l'on donne en outre une ligne droite rencontrant la ligne double et touchant la surface, la courbe d'intersection dans le plan passant par les deux lignes droites, par la ligne double et la ligne donnée, est déterminée par cinq de ces tangentes, par la ligne donnée, et les deux couples d'arêtes suivant lesquelles les deux cônes donnés sont coupés par le plan.

Étant données deux lignes du complexe tangentes à la surface, et en même temps soit deux courbes du complexe appartenant à la surface, soit deux cônes du complexe circonscrits à la surface, l'on obtient, d'après ce qui précède, dans le premier cas, deux cônes circonscrits à cette même surface, dans le second, deux courbes situées sur elle. On a ainsi, dans les deux cas, deux sections de la surface et deux cônes circonscrits. Mais la surface n'est pas encore déterminée; pour qu'elle le soit complètement il suffit de connaître une troisième ligne du complexe, tangente à la surface. On obtient alors une troisième section de la surface et un troisième cône circonscrit.

Un plan quelconque mené par la ligne double de la surface coupe

les trois cônes suivant trois couples d'arêtes, tangentes à la courbe dans le plan; d'autre part, en un point quelconque de la ligne double vont concourir trois couples de tangentes à ces trois courbes, situées sur le cône circonscrit à la surface dont ce point est le centre.

Pour *construire un complexe du deuxième degré*, il suffit qu'on connaisse deux de ses surfaces, et l'une quelconque de ses lignes. En effet, tout plan passant par la ligne donnée coupera les deux lignes doubles des deux surfaces en deux points, qui sont les centres de deux cônes circonscrits. Les quatre arêtes des cônes contenues dans le plan, jointes à la ligne donnée qu'il renferme, déterminent une courbe nouvelle du complexe, dont chaque tangente peut, dans la construction précédente, remplacer la ligne donnée.

On obtiendra de même le cône du complexe dont un point de la ligne donnée soit le centre, et ensuite le cône dont le centre est un point quelconque de l'espace. Si, en particulier, le point donné est situé sur une ligne donnée à l'infini, le cône dégénère en un cylindre du second ordre formé par les lignes parallèles du complexe.

Avant d'aller plus loin, je ferai une observation générale. Une courbe plane est déterminée dans son plan ou par ses points, ou par ses tangentes, en nombre infini (∞); une surface l'est ou par ses points, ou par ses plans tangents en nombre infini (∞^2); un complexe enfin par ses lignes droites en nombre infini (∞^3).

La double manière de déterminer une courbe dans son plan, une surface dans l'espace, constitue le principe de réciprocité. Dans les complexes, le même principe se présente sous un aspect différent. C'est la ligne droite elle-même, prise comme élément de l'espace, qui a une signification double. En effet, elle peut être considérée comme un *rayon* décrit par un point, ou comme un *axe* enveloppé par un plan tournant. De là résulte, dans la théorie des complexes, une symétrie qui n'existe pas dans la théorie des courbes et des surfaces.

En nous restreignant au second degré, une courbe plane est déterminée ou par deux couples de points et un cinquième point, ou par deux couples de tangentes et une cinquième tangente. Dans la détermination des surfaces, les deux couples de points sont remplacés par deux coniques auxquelles se joint un point, les deux couples de tangentes par deux cônes circonscrits auxquels se joint un plan tangent à la surface.

Dans la détermination des complexes, ces deux coniques, ainsi que les deux cônes sont remplacés par deux surfaces du complexe, auxquelles se joint une de ses lignes droites.

Les surfaces du complexe, d'une immense variété des formes, sont

très-faciles à construire et à discuter. Je n'établirai qu'une seule de leurs propriétés générales.

Considérons un plan quelconque, passant par la ligne double de la surface et l'un quelconque des points de cette même ligne. Ce point est le centre d'un cône circonscrit dont deux arêtes touchent la courbe dans le plan. Il en résulte que le plan polaire de la ligne double, par rapport au cône, passe par le pôle de la même ligne par rapport à la courbe. Le cône change, si son centre se meut sur la ligne double, la courbe change si son plan tourne autour d'elle; mais quel que soit le cône, quelle que soit la courbe, le plan polaire du cône passe toujours par le pôle de la courbe. Ainsi:

En faisant tourner une courbe d'un complexe autour d'un axe quelconque, situé dans son plan, la courbe variable engendre une surface du complexe, tandis que le pôle de l'axe (devenant ligne double de la surface) par rapport à la courbe, décrit une ligne droite. La même ligne droite est enveloppée par le plan polaire de l'axe, par rapport à un cône variable, circonscrit à la surface, dont le centre se meut sur l'axe, ligne double de la surface.

J'ai appelé la ligne droite, lieu des pôles, et l'enveloppée des plans polaires la ligne polaire de la surface.

En prenant pour la ligne double de la surface une ligne même du complexe, elle devient sa propre polaire, de manière qu'elle est touchée par toutes les courbes du complexe, et que tous les cônes circonscrits se coupent suivant elle.

En faisant passer la polaire à l'infini, l'on obtient un autre genre de surfaces de complexes particuliers. Les courbes du complexe, par lesquelles elle est engendrée, sont dans des plans parallèles entre eux, les cônes du complexe circonscrits à la surface, dégénèrent en cylindres dont les axes sont dans les plans parallèles des courbes.

Ainsi, dans un complexe du second degré, *à tout système de plans parallèles correspond une ligne droite unique*, que j'ai appelée le *diamètre conjugué du système de plans parallèles*. Tout système de plans parallèles a son diamètre conjugué.

J'ajoute que la direction des diamètres conjugués est déterminée au moyen d'une surface du second degré. Il en résulte, immédiatement, qu'un complexe, de même qu'une surface du second degré, a un nombre infini de trois diamètres conjugués, et en particulier un *système de trois axes*. Mais, en général, les trois diamètres conjugués ne se coupent pas, ce sont trois arêtes d'un parallélepipède, déterminé par eux; les trois arêtes parallèles et opposés du même parallélepipède sont les axes de trois cylinders conjugués, formés par les lignes du complexe.

Je me propose de publier prochainement un traité des complexes du second degré, analogue au traité des courbes et des surfaces de ce même degré. Je me sers de la méthode analytique dont j'ai donné les principes fondamentaux dans deux mémoires, que la Société Royale de Londres a bien voulu insérer dans ses Transactions. L'on trouvera dans ces mêmes mémoires, la théorie du complexe du premier degré; celle des lignes congruentes dans deux de ces complexes, qui tout vont passer par deux lignes fixes; celle des lignes congruentes à trois complexes, constituant une surface réglée du second degré. Ils contiennent en outre l'application à la double réfraction, à des considérations géométriques et générales et tout particulièrement à des vues nouvelles concernant la mécanique.

En rédigeant l'exposé succint qui précède, j'ai donné pour ainsi dire la traduction du procédé analytique par lequel, en géométrie pure, on résout les questions, qui font plus particulièrement ressortir le rapport qui existe entre les courbes planes, les surfaces, les complexes, et l'analogie des méthodes de discussion. Cette analogie est complète, j'en aurai pu rapporter d'autres *exemples.* Telle est la théorie du contact des complexes, la détermination du complexe du premier degré, tangent à un complexe d'un degré supérieur suivant l'une de ses lignes droites, et celle d'un complexe, du premier degré, polaire d'une ligne droite quelconque par rapport à un complexe donné du second degré: le tout émanant immédiatement de la théorie analytique et générale que j'ai donnée dans le cas des courbes planes et des surfaces.“*)

*) [Die Redaction der Zeitschrift „Les Mondes“ hat hieran folgende Bemerkung gefügt: Sous la direction de M. Plucker beaucoup des surfaces mentionnées dans cette note ont été modelées en bois par M. Epkens de Bonn. M. Hempel (Quai des Grands-Augustins No. 55) a bien voulu se charger de fournir ces modèles construits avec précision et élégance, sans augmentation de prix.]

38.

Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction.

(Annali di matematica, Band 1, S. 160—169. 1867.)

1. Une ligne droite, qui dans l'espace se meut d'une manière continue, décrit une surface, dite *réglée*. Pour déterminer le mouvement de la ligne droite, il faut que les quatre quantités dont sa position dépend, soient données en fonction d'une quatrième variable, par ex. du temps. Ces quatre quantités, constantes pour une position donnée de la droite, mais variables d'une position à une autre, ont été appelées par moi *coordonnées* de la *ligne droite*. En éliminant le temps, on obtient trois équations entre les quatre coordonnées; ces trois équations représentent trois complexes de *lignes droites*. Les droites dont les coordonnées satisfont aux trois équations, appartenant à la fois aux trois complexes, constituent une surface réglée.

2. Une surface réglée peut être regardée comme la trajectoire d'une droite projetée dans l'espace sous l'action de forces qui lui soient appliquées. C'est d'une manière tout-à-fait analogue qu'une courbe gauche est la trajectoire d'un point matériel attiré ou repoussé par des forces. La courbe gauche est l'arête de rebroussement d'une surface développable qui peut être considérée elle-même comme l'enveloppe d'un plan sur lequel agissent des forces rotatoires.*)

Mais je laisse de côté la question mécanique, dont je me propose de faire ressortir plus tard la portée, et n'aborde ici que la question géométrique.

3. Dans un complexe du n^{me} degré les droites se groupent de manière que toutes les droites qui passent par un point donné quelconque constituent un cône du n^{me} ordre, et que toutes les droites

*) Fundamental views regarding Mechanics. (Philos. Trans. 1866. pag. 379.) [S. 559 dieser Ausgabe.]

comprises dans un même plan enveloppent une courbe de la n^{me} classe. J'ai appelé ces cônes et ces courbes *cônes et courbes du complexe.**)

En faisant tourner un plan autour d'une droite fixe quelconque, la courbe du complexe, située dans le plan mobile, engendre une surface qui en même temps est l'enveloppe du cône du complexe, dont le sommet décrit la même droite fixe. J'ai appelé la surface ainsi déterminée une *surface du complexe* et la droite fixe *son diamètre.* La surface est de l'ordre et de la classe n^2; et son diamètre est une ligne multiple suivant le nombre n.[1])

4. La classification des surfaces réglées, d'après les degrés des trois complexes auxquels leurs génératrices appartiennent, est analogue à la classification des courbes gauches d'après les ordres des deux surfaces dont elles constituent l'intersection. Si n, p, q sont les degrés des trois complexes, le symbole $[n, p, q]$ indiquera l'origine et la nature de la surface réglée, lieu des droites communes aux trois complexes. On prouve aisément qu'en général le degré (ordre et classe) de la surface est égal à $2npq$ (voyez la Note).

Supposons que le degré de la surface réglée soit $2N$. Dans le cas que le nombre N est premier, la seule origine possible**) de la surface est désignée par le symbole $[N, 1, 1]$. Si au contraire le nombre N n'est pas premier, l'origine de la surface ne sera plus unique. A chaque mode de décomposition du nombre N en trois facteurs correspond un mode particulier de génération. Ainsi par ex. les surfaces réglées du huitième degré peuvent se rapporter à l'un ou à l'autre des deux symboles $[4, 1, 1]$, $[2, 2, 1]$. On obtient ainsi deux espèces de surfaces réglées de nature très-différente, selon qu'on prend pour génératrices les droites communes, ou à un complexe du quatrième degré et à deux complexes linéaires, ou à un complexe linéaire et à deux complexes du deuxième degré.

5. J'ai démontré ailleurs que les droites communes à deux complexes linéaires rencontrent deux droites fixes, que j'ai appelées *directrices*, et que vice-versâ toute droite appuyée aux deux directrices appartient à la fois aux deux complexes. Conséquemment la construction des surfaces réglées qui correspondent au symbole $[n, 1, 1]$ revient à choisir parmi les droites d'un complexe du n^{me} degré celles qui coupent deux directrices rectilignes fixes. On y parvient de deux manières corrélatives.

*) Voir le journal Les Mondes 10 janvier 1867. On a new geometry of space (Phil. Trans. 1865, p. 751). [Vgl. S. 498 dieser Ausgabe.]

**) Ici on ne considère pas le cas d'une surface réglée qui ne soit pas le système complet des droites communes à trois complexes: cas analogue à celui d'une courbe gauche qui ne soit pas l'intersection complète de deux surfaces.

Désignons par A et B les deux directrices. Qu'on fasse passer par A un plan, qui renfermera une courbe de la n^{me} classe enveloppée par les droites du complexe, et qui coupera B en un point unique. Menons par ce point les n tangentes à la courbe. En faisant tourner le plan autour de la directrice A, ces n tangentes, variables d'une position du plan à l'autre et appuyées constamment à l'autre directrice B, engendreront la surface réglée demandée.

Qu'on décrive le cône du complexe dont un point de A est le sommet. Le cône étant du n^{me} ordre, n de ses arêtes vont rencontrer B. Si le sommet du cône variable décrit la directrice A, ces n arêtes appuyées à B engendreront la surface réglée.

Il n'y a qu'une seule ligne droite qui passe à la fois par un point donné et par les deux directrices; d'où l'on conclut que l'ensemble des génératrices est le même dans les deux générations, que nous venons de signaler.

En remplaçant l'une par l'autre les deux directrices A et B, on n'obtient pas des générations nouvelles de la surface réglée; seulement l'une des deux générations se transforme dans l'autre.

Dans la première génération, chacune des droites du complexe, situées dans le plan tournant autour de A et coupant B en un seul point, décrit une nappe de la surface, de manière que celle-ci se partage en n nappes passant toutes par B. De même dans l'autre génération la même surface se partage d'une manière différente en n nappes, décrites par les n génératrices issues d'un même point de A; c'est-à-dire que ces nouvelles nappes se coupent suivant la directrice A. Donc les deux directrices sont des lignes n tuples pour la surface réglée.

6. On peut énoncer ces modes de génération d'une manière un peu différente, en égard que la courbe du complexe située dans un plan tournant autour de A engendre la surface du complexe dont A est le diamètre.

Une surface du complexe et une droite B étant données, menons aux courbes d'intersection de la surface avec les plans passant par son diamètre A les tangentes qui se coupent sur B. Toutes ces tangentes appartiennent à une surface réglée de l'espèce $[n, 1, 1]$. On obtient la même surface reglée en prenant parmi les arêtes des cônes circonscrits à la surface du complexe et ayant leurs sommets sur le diamètre A, celles qui sont rencontrées par la droite donnée B.

La surface réglée reste encore la même, si l'on prend pour surface du complexe celle qui a pour diamètre B, et pour droite donnée la droite A. On conclut de là *que les droites d'un complexe du n^{me} degré qui sont tangentes à la fois à deux quelconques de ses surfaces, constituent une surface réglée de l'espèce* $[n, 1, 1]$.

7. On établit aisément une propriété intéressante des surfaces réglées de l'espèce $[n, 1, 1]$. Tout hyperboloïde passant par les deux directrices joue, par rapport à une telle surface, un rôle analogue à celui du plan par rapport à une courbe gauche.

Par les deux directrices rectilignes de la surface réglée on peut faire passer une infinité d'hyperboloïdes, chacun d'eux étant déterminé par une troisième droite quelconque qui ne rencontre pas les deux directrices données. La surface réglée, dont l'ordre est $2n$, est coupée par la troisième droite en $2n$ points. Par chacun de ces points passe une génératrice unique, appartenant à la fois à la surface réglée et à l'hyperboloïde; d'où l'on conclut que tout hyperboloïde, passant par les deux directrices rectilignes de la surface réglée, la coupe en outre suivant $2n$ génératrices.

Ces $2n$ génératrices forment, avec les deux directrices, l'intersection complète des deux surfaces; car chacune de ces dernières, étant une ligne $n$tuple pour la surface d'ordre $2n$, représente n droites (coïncidentes) communes.

Trois génératrices de la surface réglée déterminent un hyperboloïde passant par les deux directrices. On pourra donc considérer les hyperboloïdes tangents suivant une ou plusieurs génératrices, les hyperboloïdes osculateurs, etc., de la même manière qu'on procède avec les plans par rapport à une courbe gauche.*)

8. Nous nous contenterons d'ajouter quelques remarques par rapport aux surfaces réglées du quatrième degré, que l'on obtient à l'aide des surfaces appartenant à des complexes du second degré. Une cinquantaine de ces surfaces de complexe, dont on peut distinguer plus de mille espèces différentes, ont été modelées en bois dur avec soin et précision, par M. Epkens de Bonn. Les modèles nous permettent de suivre avec l'oeil la génération générale des surfaces en question, et de nous faire une idée nette de leurs formes. La variété des surfaces de complexe est très-grande; celle des surfaces réglées est potentiée encore par les différentes positions qu'une ligne droite peut prendre relativement à une surface donnée d'un complexe du deuxième degré.

9. La surface de complexe (ayant pour diamètre la droite A) et la droite B au moyen desquelles on construit la surface réglée se rencontrent en quatre points de sorte que, si ces points sont tous réels,

*) Tout ceci subsiste pour une surface réglée quelconque qui possède deux droites directrices, même si celles-ci ne sont pas des lignes multiples suivant le même nombre.

on obtient la droite B divisée en quatre segments, en comptant pour un seul les deux segments extrêmes qui se réunissent à l'infini. Il y a deux génératrices de la surface réglée issues de chaque point de B. Si ce point passe d'un segment quelconque à l'un des deux segments adiacents, les deux génératrices deviennent imaginaires si d'abord elles étaient réelles et réciproquement; c'est-à-dire que, de deux segments consécutifs, l'un est l'intersection de deux nappes réelles de la surface réglée et l'autre est l'intersection de deux nappes imaginaires. Au point (réel) de division qui sépare les deux segmentes, les deux génératrices se confondent en une seule droite, suivant laquelle la surface réglée est touchée par un même plan passant par le diamètre A.

Ce que nous venons de dire à propos de B, s'applique également à la droite A, qui est l'autre ligne double de la surface réglée. Cette surface a donc huit génératrices singulières, suivant chacune desquelles le plan tangent est constant. Quatre de ces plans tangents passent par A; les autres quatre passent par B.

10. La classification des surfaces réglées en question résulte immédiatement de la considération des huit points de division des droites doubles A et B: suivant que ces points sont tous ou en partie réels, imaginaires, coïncidents.*)

*) On ne verra pas sans intérêt que la discussion des cas différents de la surface réglée du quatrième degré avec deux droites doubles A, B, peut être ramenée à une question très-simple de géometrie plane. Les génératrices de la surface coupent A et B en deux séries de points correspondants x, y, de manière qu'à chaque point x de A correspondent deux points y de B et de même à chaque point y correspondent deux points x. Les points x auxquels correspondent deux points y coïncidents, et les points y auxquels correspondent deux points x coïncidents sont les points de division des droites directrices A et B.

Soient maintenant a, b deux points quelconques d'une courbe plane du troisième ordre (cubique plane); X une droite issue de a et Y une droite issue de b, tellement que ces droites se rencontrent sur la courbe. Alors nous aurons deux faisceaux de rayons correspondants X, Y; la loi de correspondance est la même que pour les points x, y ci-devant; et la cubique sera le lieu du point XY, ainsi que la surface réglée est engendrée par la droite xy. Les droites $X(Y)$ auxquelles correspondent deux droites $Y(X)$ coïncidentes sont évidemment les tangentes de la courbe, issues du point $a(b)$.

On sait qu'une cubique plane générale est en un seul trait, ou en deux traits, en tenant compte de la continuité par l'infini. Si la courbe n'a qu'un seul trait, il n'y a que deux tangentes réelles (et il y en a deux toujours) qu'on peut mener par un quelconque de ses points. Ce cas correspond à celui où les directrices A, B de la surface réglée ont chacune deux points réels de division.

Si la cubique plane est composée de deux traits, on a une ovale et une branche serpentine avec trois inflexions. Les quatre tangentes issues d'un point de la courbe sont toutes réelles ou toutes imaginaires suivant que le point est pris sur

Ces diverses circonstances dépendent de la position de l'une des deux droites doubles, A ou B, par rapport à la surface du complexe dont l'autre est le diamètre.

Pour approfondir la question et pour se faire une idée nette de la forme générale des surfaces réglées en question, il faut tenir compte des huit points doubles et des huit plans tangents doubles des deux surfaces du complexe, dont A et B sont les diamètres; et particulièrement des quatre droites qui passent par les huit points doubles de chaque surface, pris deux à deux, et qui rencontrent le diamètre: ainsi que des quatre intersections des huit plans doubles, pris deux à deux, qui également coupent le diamètre de la surface.

11. Si la droite B rencontre le diamètre A de la surface du complexe, il est évident que la surface réglée correspondante, qui est en général du quatrième degré, se décompose dans le système d'un cône du deuxième ordre, dont le point (AB) est le sommet, et d'une courbe de la deuxième classe contenue dans le plan (AB). Si l'on se sert des coordonnées ordinaires x, y, z, le cône seul, comme lieu de second ordre, peut être représenté par une équation unique, tandis que la courbe échappe à ce mode de représentation. Au contraire, en se servant des coordonnées planaires t, u, v, la courbe seule, comme enveloppe de seconde classe, peut être représenté par une équation. Sous ce point de vue, il est curieux à voir l'équation de la surface réglée, qui en général est du quatrième degré, s'abaisser au deuxième; parceque, selon le choix des coordonnées, les traces du cône ou de la courbe disparaissent de l'équation.*)

12. Une surface quelconque, étant touchée en un quelconque de ses points par un plan, est coupée par ce plan suivant une courbe

---

la branche serpentine ou sur l'ovale. Donc si nous prenons 1° les deux points a, b sur la branche serpentine; 2° les deux points a, b sur l'ovale; 3° l'un des deux points sur l'ovale et l'autre sur la branche serpentine, on aura trois cas correspondants à ceux de la surface réglée où 1° les directrices ont chacune quatre points réels de division; 2° les directrices n'ont aucun point réel de division; 3° l'une des deux directrices a quatre points réels de division et l'autre n'en a aucun.

Voilà les seuls cas généraux. Il n'y a pas de difficulté à donner les cas particuliers qui correspondent à une cubique douée d'un point double, à une cubique composée d'une droite et d'une conique etc.[2])

*) En effet, le premier membre de l'équation du quatrième degré, qui représente (en coordonnées ordinaires ou planaires) la surface réglée, se décompose, sous l'hypothèse ci-devant, en deux facteurs; dont l'un est quadratique et a le discriminant nul, et l'autre est le carré d'une fonction linéaire.[2])

qui est du même ordre de la surface et est douée d'un point double, coïncidant avec le point de contact; en d'autres termes, deux branches de la courbe d'intersection, réelles ou imaginaires, se coupent en ce point. Dans le cas des surfaces réglées [2, 1, 1] (ainsi que pour une surface réglée quelconque), l'une des deux branches de la courbe d'intersection avec un plan tangent devient une droite: une génératrice de la surface. Cette droite, en se détachant de la courbe, lui fait perdre sa singularité au point de contact, et réduit son ordre d'une unité. Il n'y a qu'un seul système de génératrices quoiqu'il y ait double mode de génération.

Pour qu'il y ait deux systèmes de génératrices il faudrait que tout plan tangent à la surface contînt deux droites, situées sur elle dans toute leur étendue. Cette circonstance n'a lieu que pour les surfaces du deuxième degré. Les surfaces réglées d'ordre plus élevé ont un nombre *simplement* infini de points (formant une ligne multiple), où se croisent deux ou plusieurs génératrices rectilignes. En un point quelconque de la ligne multiple, la surface admet un nombre de plans tangents égal à celui des génératrices qui s'y croisent, et ces plans tangents passent ensemble par la droite qui touche la ligne multiple au point considéré. Deux des génératrices qui se rencontrent déterminent un plan bitangent; ce plan coupera en outre la surface suivant une courbe passant par les deux points de contact. Les autres intersections de la courbe avec les deux génératrices sont autant de points de la ligne multiple.

De même, il y a nombre simplement infini de plans tangents (enveloppant une surface développable), dont chacun contient deux ou plusieurs génératrices et touche la surface en autant de points: un pour chaque génératrice. Les points de contact sont rangés en ligne droite: la droite de contact de la développable avec le plan qu'on considère; etc.

13. Considérons, par exemple, les surfaces réglées qui correspondent au symbole [2, 2, 1]. Particularisons encore en supposant que le complexe linéaire donné soit formé par des droites appuyées à une directrice rectiligne fixe. Dans ce cas, il s'agit de choisir parmi les droites communes aux deux complexes donnés du second degré, celles qui coupent la directrice. Pour y parvenir construisons les deux surfaces, appartenant aux deux complexes et ayant la directrice pour diamètre commun. Un plan mené arbitrairement par la directrice coupe les deux surfaces suivant deux courbes de deuxième classe, ayant quatre tangentes communes; si l'on fait tourner ce plan autour de la directrice, les quatre tangentes communes aux deux courbes qu'il

contient, engendreront la surface réglée. D'autre part, tout point de la directrice est le sommet commun de deux cônes du second ordre, circonscrits aux deux surfaces des complexes: ces cônes se coupent suivant quatre arêtes, appartenant à la fois aux deux complexes. Si le sommet se déplace sur la directrice, les quatre arêtes communes aux deux cônes engendreront la même surface réglée. Il résulte des deux constructions que nous venons d'indiquer, que la directrice est une ligne quadruple (comme lieu et comme eveloppe) et que la surface réglée est du huitième degré.

Tout plan passant par la ligne quadruple coupe la surface réglée suivant quatre droites. C'est un plan quadri-tangent, qui touche la surface aux quatre points où ces quatre génératrices rencontrent la directrice. Ces quatre génératrices se rencontrent deux à deux en six points, qui, résultant de l'intersection de deux génératrices non successives, sont des points doubles de la surface. Si le plan tourne autour de la directrice, ces points doubles décriront une courbe nodale de la surface. Cette courbe est toujours réelle, même si la surface est imaginaire; car les quatre génératrices ont au moins deux intersections réelles.

Corrélativement: les quatre génératrices issues d'un même point de la directrice, sont deux à deux dans six plans, dont chacun est un plan bitangent de la surface. Si le point se déplace sur la directrice, ces plans enveloppent une développable doublement circonscrit à la surface réglée. Cette développable est toujours réelle, même si la surface réglée est imaginaire; car deux au moins des six plans déterminés par les quatre génératrices sont réels.

Occupé que je suis de préparer un traité sur les complexes du deuxième degré (premier pas à faire pour développer les principes exposés dans deux mémoires insérés dans les *Philosophical Transactions* pour 1866), j'en ai été détourné un moment par le beau travail récemment publié par M. de la Gournerie sur les surfaces réglées.*)

Le mémoire qu'on vient de lire n'est nullement le résumé d'un travail fait, ce n'est qu'un premier aperçu des développements du n°. 16 des *additional notes* (premier mémoire anglais). Si je le donne hors de l'ordre naturel de mes travaux, c'est surtout dans l'espoir de voir s'associer à moi d'autres géomètres dans des recherches que mes propres forces ne suffisent pas pour pousser à bout. L'origine et la

*) Recherches sur les surfaces réglées tédraédrales symétriques, avec des notes par M. Cayley. [Compt. Rend. de l'Ac. des Sciences de Paris. Bd. 62, S. 78—82 (1866).]

nature de cet écrit m'excuseront de n'avoir pas cité les travaux antérieurs sur le même sujet. Cependant, après y avoir jeté un coup d'oeil, il ne m'est plus permis de passer sous silence la théorie générale des surfaces réglées, donnée par M. Cayley dans deux mémoires qu'il a publiés dans les *Philosophical Transactions* pour 1863 et 1864. En laissant à d'autres le soin de réunir sous un même point de vue les deux théories, dont le point de départ est différent, je me félicite d'avoir rencontré dans plusieurs circonstances cet illustre géomètre, dont j'admire la pénétration.

Note additionelle.

En prenant r, s, σ, ϱ, pour coordonnées d'une droite, représentée en coordonnées ordinaires par les deux équations:

$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

et en posant:

(1) $$r\sigma - s\varrho = \eta,$$

les trois équations

(2) $$\Omega_n = 0, \quad \Omega_p = 0, \quad \Omega_q = 0$$

représentent trois complexes du n^{me}, p^{me}, q^{me} degré, les trois symboles Ω_n, Ω_p, Ω_q, significant trois fonctions de ces degrés entre les cinq quantités r, s, ϱ, σ, η, regardées comme variables.

En éliminant entre les quatre équations (1) et (2) les trois variables r, s, η, on obtient une équation:

$$f(\varrho, \sigma) = 0$$

du degré $2npq$. Dans cette équation ϱ et σ signifient, sur le plan xy, les coordonnées du point où ce plan est percé par une droite quelconque commune aux complexes donnés, c'est-à-dire par une génératrice de la surface réglée, dont $[n, p, q]$ est le symbole. Cette équation représente donc la trace de la surface sur le plan xy; et cette trace est une courbe de l'ordre $2npq$.

La classe d'une surface réglée est la même que son ordre. Pour le prouver directement, prenons pour les équations de la droite:

$$t = pv + \pi, \quad u = qv + \varkappa,$$

et posons:

$$p\varkappa - q\pi = \omega.$$

Les cinq quantités p, q, $\varkappa$, π, ω remplacent r, s, σ, ϱ, η dans la détermination de la droite. L'on obtient pour représenter la même surface réglée trois équations nouvelles:

$$\varphi_n = 0, \quad \varphi_p = 0, \quad \varphi_q = 0,$$

en désignant par φ_n, φ_p, φ_q trois fonctions de $p, q, \pi, \varkappa, \omega$ du n^{me}, p^{me}, q^{me} degré. En éliminant entre les quatre équations (3) et (4) les trois variables p, q, ω, on obtient une équation:

$$F(\pi, \varkappa) = 0$$

du degré $2npq$. Dans cette équation π et $\varkappa$ signifient les deux coordonnées t et u d'un plan, dont la troisième coordonnée v est égal à zéro. D'où l'on conclut que le cylindre, circonscrit à la surface réglée, dont l'axe est parallèle à OZ, est de la classe $2npq$.

On ne saurait discuter la réduction du nombre $2npq$ sans la discussion préalable des complexes.

39.

Anzeige des „Systems der analytischen Geometrie".

(Crelle's Journal, Band 10, S. 98—100. 1833.)

Dans ce qu'on va lire je vais essayer de donner un aperçu d'un ouvrage, dont j'ai conçu la première idée dans les moments de loisir dont je jouissais l'été dernier (1832). Mon intention fut d'abord de le faire paraître dans les premiers mois de 1833, mais j'ai du y renoncer, en me soumettant, pour le moment, à une nécessité impérieuse qui ne me permet pas de donner le fini à mon travail. J'espère cependant que la publication ne sera pas retardée trop longtemps.

Newton, par son Enumération des lignes du troisième ordre, a fait un immense pas dans la science des courbes, en réunissant sous un même point de vue un grand nombre de courbes, qui affectent des formes très différentes. Euler en s'occupant de la même matière dans son *Introduction* reproche à l'Enumération de Newton, que le nombre des espèces pourrait à volonté être augmenté. Aussi a-t-on ajouté aux 72 espèces de Newton quelques autres. Mais Euler en regardant exclusivement les branches infinies, élude la difficulté sans l'aborder. Les espèces de Newton se rangent naturellement dans les genres, en moins grand nombre, d'Euler; le mérite de cet illustre géomètre est d'avoir exposé une théorie générale et très élégante des branches infinies. Le premier but que je me propose, et ce qu'on n'a pas tenté jusqu'ici, c'est de traiter les courbes du troisième ordre de manière que le caractère de chaque espèce particulière se présente aussi nettement que cela a lieu par rapport aux sections coniques. Je vais indiquer la marche que je suis pour y parvenir.

A l'équation générale du troisième degré entre les deux variables y et x l'on peut donner la forme suivante:

$$pqr + \mu s = 0, \tag{1}$$

en désignant par p, q, r et s des fonctions linéaires de la forme $(y + ax + b)$ et par μ un coefficient constant. Deux des trois pre-

mières de ces fonctions linéaires peuvent être imaginaires, mais leur produit est toujours réel. Il n'y a qu'un seul cas d'exception; dans ce cas il faut substituer au produit, qr par exemple, une expression de la forme: $(q^2 - vr)$. Je prendrai donc l'équation (1) pour l'équation générale des courbes du troisième ordre.

Les quatres équations suivantes

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

représentent quatre lignes droites, qui évidemment ont un rapport intime avec la courbe représentée par l'équation (1). En effet, cette équation-ci est satisfaite si l'on pose simultanément:

$$p = 0 \quad \text{et} \quad s = 0,$$
$$q = 0 \quad \text{et} \quad s = 0,$$
$$r = 0 \quad \text{et} \quad s = 0,$$

ce qui fait voir que les trois premières lignes droites, que je désignerai par PP, QQ et RR, ne rencontrent la courbe chacune qu'en un seul point (les deux autres points d'intersection étant situés à l'infini) qui se trouve sur la quatrième ligne droite, que je nommerai SS. Ainsi la forme de l'équation (1) renferme le théorème connu, qu'une courbe du troisième ordre est coupée par ses trois asymptotes en trois points situés en ligne droite.

En partant de l'équation (1), les axes des y et des x qui, étant choisis arbitrairement, apportent dans l'équation de la courbe des relations tout à fait étrangères à sa nature, sont remplacés par les quatres lignes droites PP, QQ, RR et SS. Ces droites étant données, pour déterminer complètement la courbe, il suffit de connaître le coefficient μ, ou, ce qui revient au même, un point quelconque de la courbe. Les différentes espèces des courbes du troisième ordre dépendront ainsi, d'une part de la position réciproque des quatre droites en question et d'autre part de la position d'un point quelconque de la courbe par rapport à ces droites. Toutefois en suivant la marche ainsi indiquée, l'on rencontre des difficultés inhérentes à la nature de la question. Pour les surmonter notre point de vue doit être la construction même de la courbe d'après les données ci-dessus; car d'après mois, la discussion analytique n'est ni élégante ni assez facile, tant qu'elle ne peut être suivie pas à pas dans la construction. Je profite de cette occasion pour faire sentir l'esprit de notre méthode générale de démonstration, appliquée à un cas tout particulier.

A l'équation générale (1) des courbes du troisième ordre l'on peut donner la forme suivante:

(2) $$p(qr + \varkappa) + (\mu s - \varkappa p) = 0,$$

en désignant par $\varkappa$ une quantité constante quelconque. Pour satisfaire à cette équation, l'on n'a qu'à poser simultanément:

$$qr + \varkappa = 0 \tag{3}$$

$$\mu s - \varkappa p = 0. \tag{4}$$

La première de ces deux équations, $\varkappa$ restant indéterminé, représente une hyperbole quelconque ayant deux asymptotes de la courbe à construire, savoir les droites QQ et RR pour les siennes. L'équation (4) est celle d'une ligne droite passant par le point d'intersection de la troisième asymptote PP et de la droite SS.

Les deux intersections de cette ligne droite (4) et de l'hyperbole (3) appartiennent également à la courbe représentée par l'équation (1). Donc l'une de ces intersections étant donnée, l'autre s'obtient immédiatement par le théorème généralement connu, que les deux intersections d'une ligne droite quelconque avec une hyperbole sont à égales distances de ses intersections avec les asymptotes de la courbe. De là résulte un tracé des courbes du troisième ordre par points, extrêmement facile et pour ainsi dire le même que celui d'une hyperbole dont un point et les asymptotes sont données. En effet, soient PP, QQ et RR les trois asymptotes de la courbe à construire, coupées par elle dans les trois points, p, q et r, situés en ligne droite, et soit de plus M un point de la courbe également donné. Menons pM rencontrant QQ et RR resp. en A et B et prenons sur cette droite $M'B = AM$. M' sera alors un nouveau point de la courbe à construire. En combinant les trois asymptotes de manière différente, l'on obtiendra tant de points de la courbe que l'on voudra.

En général l'on peut déterminer trois points différents de manière que chacun d'eux occupe en même temps le milieu de trois segments dont chacun est intercepté par un couple d'asymptotes sur la ligne droite passant par le point en question et l'intersection de la courbe avec la troisième asymptote. Dans un tel point trois cordes de la courbe à construire sont divisées en deux parties égales. Je l'ai nommé *centre* de la courbe. Une courbe du troisième ordre a donc en général trois centres. Les trois asymptotes et l'un de ses centres étant donnés l'on obtient de suite et linéairement ses intersections avec les trois asymptotes. Si la courbe a un point double (véritable point double ou point conjugué), ce point est l'un de ses trois centres; si elle a un point de rebroussement, deux de ses centres coincident avec ce point singulier.

Donc, en récapitulant, pour distinguer les différentes espèces des courbes du troisième ordre, l'on considérera d'abord la position des trois

asymptotes (PP, QQ, RR) ou ce qui revient au même, la nature des branches infinies, et ensuite, soit la position de la droite SS, soit celle des trois centres. Alors il ne restera plus, que d'avoir égard à la position d'un seul point de la courbe. Ces dernières considérations indiqueront en général trois courbes, ayant chacune un point double, comme courbes limites entre des courbes de formes différentes.

De l'équation (1) on peut déduire, en opérant de la même manière comme je l'ai fait plus haut, d'autres constructions non moins simples. Ces divers constructions avec des modifications, qui se présentent d'elles mêmes, sont également applicables au cas où deux des trois asymptotes deviennent imaginaires ou s'éloignent à l'infini.

Enfin l'on peut donner à l'équation générale du troisième ordre d'autres formes aussi simples que celle de l'équation (1). J'en citerai les deux suivantes:

$$pqr + \mu s^2 = 0, \tag{5}$$

$$pqr + \mu s^3 = 0. \tag{6}$$

De ces équations dérivent immédiatement une foule de propriétés curieuses des courbes en question, et une série de constructions générales et faciles de ces courbes, qui ne le cédent en rien à celles qu'on déduit de l'équation (1). Je me contenterai d'enoncer les deux théorèmes suivants, qui résultent de la forme même de ces équations.

Il y a en général quatre tangentes à une courbe du troisième ordre parallèles à l'une de ses asymptotes, de manière qu'on obtient douze tangentes parallèles aux trois asymptotes. Les douze points de contact sur ces tangentes sont situés, trois à trois, sur seize droites, dont quatre passent par chaque point.

Une courbe du troisième ordre a trois points d'inflexion situés en ligne droite.

Ce dernière théorème est connu; le premier peut être généralisé, en substituant aux asymptotes des tangentes.

L'état actuel de la science exige qu'à côté de l'énumération des courbes du troisième ordre soit placée celle des courbes de la même classe. Dans cette partie de mon travail je me trouve sur un terrain tout-à-fait nouveau. J'ai adopté avec empressement la nouvelle classification des courbes d'après le nombre des tangentes issues d'un même point. En exprimant les courbes d'une classe quelconque par des équations, je leur ai donné, pour ainsi dire, une existence analytique et indépendante d'autres courbes. Leur théorie analytique est absolument la même que celle des courbes du même ordre. Mais l'interprétation géométrique des expressions analytiques ayant changée, des considé-

rations nouvelles sont exigées. Aussi ai-je rejeté l'énumeration des courbes de la troisième classe, qui d'après le principe de réciprocité (dualité) repondrait à celle que j'ai exposée plus haut. Je l'ai remplacée par une autre, relative à la position des trois points de rebroussement d'une telle courbe et du point d'intersection commune des trois tangentes en ces points; je l'ai fondée, en d'autres termes non sur une équation de la forme (1) mais de la forme (6).

Ce n'est qu'après avoir tiré de l'analyse, tant qu'il était dans mon pouvoir, tous les résultats, rélatifs aux courbes du troisième ordre et de la troisième classe et remarquables par leur simplicité, quelquefois inattendue, que je m'élève à la discussion générale des courbes algébriques. Je la passe sous silence ici en me réservant de présenter dans ce Journal une série de résultats généraux.

Toutes les recherches dont il a été question jusqu'ici, rentrent, au fond, dans les méthodes exposées dans les deux volumes de mes „Développements“, quel perfectionnement d'ailleurs qu'aient obtenu ces méthodes. Mais ces mêmes recherches m'ont suggéré des idées, qui me font regarder la géométrie analytique sous une face nouvelle. Je n'en dirai rien ici, la bienvaillance de l'éditeur accordera quelques pages du cahier prochain à une analyse rapide de cette partie de mon travail, à laquelle je rattache le plus d'intérêt.

C'est elle, qui m'a permis de mettre à la tête de l'ouvrage à publier: „Système de géométrie analytique“.

Anmerkungen.

Die Plücker'schen Arbeiten, die in diesem Theil der Gesammtausgabe zum Abdruck gelangen, enthalten an den Stellen, an denen sie zuerst erschienen sind, sowohl im Text als auch in den Formeln mannigfache Druckfehler und Ungenauigkeiten. Vielleicht rühren sie daher, dass Plücker eine Correctur im Allgemeinen nicht gelesen hat. In den meisten Fällen lassen sie sich ohne weiteres als directe Druck- oder Schreibfehler erkennen, vielfach liegt auch die Möglichkeit vor, dass sie sich bereits im Manuscript vorfanden. In allen denjenigen Fällen, wo es sich augenscheinlich um Nachlässigkeiten oder geringfügige Rechenfehler handelt, habe ich den Text ohne weitere Angabe corrigirt, z. B. immer dann, wenn auf unrichtige Formeln richtige Resultate folgen. Ich bin dabei von der Erwägung ausgegangen, dass es sich bei einer Ausgabe wie der vorliegenden weniger um die philologische Correctheit und um die genaue Wiedergabe der Originaldrucke handeln kann, als vielmehr darum, die Plücker'schen Arbeiten in einer Form darzubieten, in der es dem Leser erspart ist, alle die genannten Versehen erst selber als solche zu erkennen und zu corrigiren.

Anders habe ich mich in Bezug auf solche der Correctur bedürftige Stellen verhalten, die sich nicht mehr als derartige Nachlässigkeiten auffassen lassen. Je nach der Wichtigkeit, die ich den bezüglichen Behauptungen glaubte beilegen zu müssen, habe ich sie entweder unverändert abgedruckt, oder aber unter Hinweis auf eine der nachfolgenden Anmerkungen verbessert; übrigens finden sich alle diese Versehen in den Anmerkungen erörtert. Ich habe sämmtliche vorstehenden Abhandlungen einer genauen Controlle unterzogen, und glaube, dass es mir gelungen ist, sie als in diesem Sinne correct darzubieten.

1. *Generalem analyseos applicationem etc.*

1) S. 1. Diese Abhandlung, die in Bonn im Jahre 1824 gedruckt worden ist, ist von Clebsch in seiner Gedächtnissrede auf Plücker irrthümlich als Habilitationsschrift bezeichnet worden; sie ist aber die Dissertation. Plücker ist am 31. August 1823 in Marburg promovirt worden, und zwar in absentia; er befand sich zur damaligen Zeit in Paris. Eine Habilitationsschrift existirt nicht.

Die Figuren habe ich genau so wiedergegeben, wie sie im Original stehen, obwohl die beiden letzten nicht correct sind. Die parabolischen Curven $y = ax^n$, die sie darstellen, haben nämlich für ungerades n im Anfangspunkt einen Wendepunkt; Plücker hat ihnen aber sämmtlich die Gestalt einer gewöhnlichen Parabel gegeben. Für die Entwickelungen der Dissertation ist dies übrigens belanglos.

2. *Théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques.*

1) S. 43. Diese Abhandlung ist so abgedruckt worden, wie sie in den von Gergonne herausgegebenen Annales de Mathématiques erschienen ist. Sie entspricht jedoch keineswegs dem Plücker'schen Manuscript; vielmehr hat sie Gergonne, ehe er sie zum Druck übergab, einer einschneidenden Umänderung unterzogen. Plücker selbst spricht sich hierüber dahin aus, „der von ihm eingesandte Aufsatz sei erst gedruckt worden, nachdem er zuvor getheilt und in eine so ganz verschiedene Form gegossen worden war, dass er selbst den ersten Theil später nur wiedererkannte, weil sein Name an der Spitze desselben stand."*) Der bezügliche zweite Theil ist die dritte Abhandlung dieses Bandes.

Insbesondere stammt von Gergonne die dualistische Gegenüberstellung der Resultate, sowie der Hinweis, dass die von Plücker behandelten Aufgaben bereits in Poncelet's *Traité des propriétés projectives des figures* eine Lösung gefunden hatten. Das Plücker'sche *erste Lemma* ist nämlich ein specieller Fall eines im § 403 des *Traité* enthaltenen allgemeinen Satzes, der sich auf Sätze über perspectiv liegende Figuren stützt; die meisten Plücker'schen Constructionen sind sogar mit denen Poncelet's identisch, dies tritt nämlich immer ein, wenn das Perspectivitätscentrum Poncelet's in einen Berührungspunkt beider Kegelschnitte gelegt wird. (Vgl. besonders §§ 305—325 des Traité.) Hierzu gehört auch der am Ende der dritten Abhandlung abgeleitete Satz, sowie die aus ihm fliessende Construction.

Da Gergonne der Umänderung des Plücker'schen Manuscripts, die er in seiner Eigenschaft als Redacteur vorgenommen hatte, keinerlei Erwähnung that, so entstand bei Poncelet die Meinung, Plücker habe am Traité ein Plagiat begangen, während Plücker von dem Traité damals nur dem Namen nach Kenntniss hatte.**) Dies gab die Veranlassung zu einer Polemik, deren Ton durch den gerade damals heftigen Zwist zwischen Gergonne und Poncelet verschärft wurde und von der ich das wesentliche hier folgen lasse.

Die erste — an Gergonne gerichtete — Reclamation Poncelet's lautet, so weit sie sich auf Plücker bezieht, wie folgt***):

„Permettez-moi, Monsieur, de profiter de l'occasion de cette notice pour vous adresser quelques réclamations relatives à des articles insérés récemment dans les *Annales de Mathématiques*."

„M. le docteur Plücker à donné (tom. XVII, pag. 37 et 69) divers problèmes et théorèmes sur les contacts des sections coniques, fort intéressants en eux-mêmes, mais dont, ce me semble, il aurait dû citer plus scrupuleusement les auteurs. Par exemple, le théorème énoncé au bas de la page 71 †), et la construction qui en dérive pour le cercle osculateur des sections coniques, sont, si je ne me trompe, bien les mêmes que le théorème du n°. 336 du *Traité des propriétées projectives*, et que la solution donnée au n°. 405 de cet ouvrage; le théorème du n°. 404 dont elle a été déduite, est même plus général que celui de M. Plücker, quoiqu'il soit encore un cas particulier de l'énoncé du n°. 403 qui, en observant que le système de deux droites peut être considéré comme une

*) Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. II, Vorrede, S. VI.

**) Plücker hat den Traité erst gelesen, nachdem bereits der erste Band seiner *Entwicklungen* erschienen war.

***) Gergonne's Annales de Math. Bd. 18. S. 145.

†) Vgl S. 62 dieser Ausgabe.

section conique, comprend aussi les lemmes et théorèmes fondamentaux du mémoire à deux colonnes, inséré à la pag. 37 du tome cité des *Annales*. Que l'on compare également les autres théorèmes de ce mémoire et les solutions de problèmes qu'il renferme sur les contacts des sections coniques, avec ce qui a été dit n°. 297 ou 326 du *Traité des propriétés projectives*, et spécialement du n°. 318 au n°. 326; que l'on compare enfin les figures 41, 42 et 43 de cet ouvrage, qui sont relatives à des exemples particuliers avec celles qui résultent de plusieurs des énoncés de M. Plücker, et l'on trouvera que ce géomètre n'a pas eu beaucoup de difficulté à *refaire*, en partant des belles propriétés de Pascal et de Brianchon, sur les hexagones inscrits et circonscrits aux coniques, les démonstrations des théorèmes et des problèmes contenus dans son mémoire sur les contacts de ces courbes. Je dirai même plus, c'est que les endroits cités du *Traité des propriétés projectives*, malgré leur laconisme, indiquent des solutions plus générales, plus directes et plus complètes des problèmes en question, puisqu'elles permettent de trouver, au moyen de la section conique donnée, tout ce qui appartient à celle qu'on cherche; par exemple, son centre, ses axes et diamètres, ses intersections avec une droite donnée, ses tangentes partant d'un point également donné, ect. (Voy. les n°. 302 et suiv., 328 et suiv. de l'ouvrage cité.)

M. le docteur Plücker a bien voulu rappeler, dans une note de la pag. 52 de son mémoire que j'avais énoncé (*Annales*, tom. VIII) la construction de la section conique osculatrice du second ordre, en un point donné d'une autre section conique, mais sans en donner la démonstration. Je crois à propos de remarquer que la construction dont il s'agit est uniquement relative au contact du troisième ordre, et qu'elle a été justifiée complètement, ainsi que beaucoup d'autres, dans les endroits cités du *Traité des propriétés projectives* que M. Plücker connaît sans doute et qu'il aurait pu citer, comme il l'a fait à l'occasion de la construction particulière dont il s'agit.

Il me semble d'ailleurs que, s'il est louable de développer, dans des articles spéciaux, les théories qui n'ont pu l'être en détail dans les ouvrages qui embrassent un grand nombre de sujets divers, on n'est pas pour cela dispensé, en aucune manière, d'indiquer les sources où on a puisé ses principes et ses moyens de solution.

Quant à l'usage de mettre en deux colonnes les propositions de la géométrie de la règle, il me semble que c'est un double emploi très-pénible, peu motivé quant aux démonstrations; et qu'il suffira toujours d'indiquer, d'après les principes de la théorie des polaires réciproques, la manière de conclure les unes de ces propositions des autres déjà démonstrées. Du moins ne saurait-on arguer, de ce que quelqu'un n'aurait pas employé un tel mode de rédaction, qu'il n'aurait point établi ni démontré les propositions réciproques qui dérivent aussi immédiatement des principes déjà posés."

Da Gergonne in entschiedener Weise für Plücker und seine Unkenntniss des Traité eintrat, liess Poncelet alsbald eine neue Reclamation folgen, die, soweit sie Plücker betrifft, folgendermassen lautet*):

. . „Quand bien même les termes dans lesquels je réclamais eussent été peu convenables *quant à la forme*, l'essentiel était surtout que j'eusse raison *quant au fond*, et l'on en va juger par l'exemple qui concerne en particulier

*) Bulletin des Sciences von Férussac, Band 9, S. 298.

M. Plücker, dont M. Gergonne cherche à défendre la cause comme la sienne propre, en soutenant, contre mon opinion, que ce géomètre ne connaissait pas le *Traité des propriétés projectives.*

Supposant même que je me fusse trompé à ce dernier égard, il n'en résulterait pas moins, des citations et des preuves irrécusables que j'ai apportées, que les *théorèmes et problèmes* du docteur Plücker, insérés pages 37 et 69 du tome XVII des *Annales,* étaient, pour la plupart, loin d'avoir le mérite de la nouveauté. C'en était assez par conséquent pour rendre obligatoire l'insertion ou la mention de mes réclamations dans les *Annales;* mais elle eût fait écrouler l'échafaudage des doubles colonnes du docteur allemand, auxquelles M. Gergonne attachait beaucoup d'importance, sans doute par esprit de prosélytisme pour la dualité. Que penseront donc les lecteurs, si les mémoires de M. Plücker à la main, nous prouvons clairement qu'il avait une parfaite connaissance du *Traité des propriétés projectives?*

Or, c'est-lui-même qui, dès la première page du premier de ses mémoires, nous en informe en ces termes (tome XVII, page 37): „ces considérations donnent naissance à une série de problèmes curieux qui ont fait le sujet des recherches de M. Poncelet, dans son *Traité des propriétés projectives des figures.* Ce que nous nous proposons ici est de considérer quelques cas de cette théorie qui reposent sur des considérations fort simples, et conduisent à des démonstrations qui ne le sont pas moins."

J'ai prétendu seulement prouver que ces mêmes constructions se trouvaient nettement et pour la plupart indiquées dans mon ouvrage, et que M. Plücker n'avait pas eu beaucoup de peine à les reproduire sous une nouvelle forme, en leur faisant perdre même leur caractère primitive de généralité . . ."

Hierauf antwortete Plücker mit folgender Erklärung*):

Le numéro 5 de votre *Bulletin* (Ire sect. 1828), qui vient de tomber entre mes mains, m'oblige à vous adresser la réclamation suivante, que je vous prie d'insérer dans le plus prochain numéro.

C'est d'une lettre de Berlin que j'ai appris, il y a 3 à 4 mois, avoir été l'objet des injustes attaques de M. Poncelet. Je n'ai pu y répondre parceque je n'avais aucune connaissance exacte du fait. M. Poncelet, infatigable à reproduire toujours les mêmes accusations contre moi, se présente de nouveau, pour donner les preuves de ce qu'il a avancé. Deux mots suffiront pour refuter tout ce que M. Poncelet allégue contre ma bonne foi. „L'échafaudage des doubles colonnes, auxquelles M. Gergonne attachait beaucoup d'importance, sans doute par esprit de prosélytisme pour la dualité" (1828, mai 299), est l'ouvrage de M. Gergonne, et non pas celui „du docteur allemand." J'ai accordé volontiers à M. Gergonne la liberté de changer la rédaction de mon mémoire; s'il y a trouvé des développements favorables à ses idées sur la dualité (moi, j'ignorais absolument le sens de ce mot, avant la lecture du n° cité de votre *Bulletin*), je ne puis qu'approuver qu'il l'ait fait ressortir par „l'échafaudage des doubles colonnes." Il n'y a donc ni prosélyte, ni esprit de prosélytisme. „Que penseront donc les lecteurs si, les mémoires de M. Plücker à la main, nous prouvons clairement qu'il avait une parfaite connaissance du Traité des propriétés projectives? Or, c'est lui-même qui, dès la première page du premier de ses mémoires, (j'abrège le passage suivant) cite ce Traité." Non, ce n'est pas lui, c'est encore M. Ger-

*) Bulletin des Sciences von Férussac, Band 10, S. 330.

gonne. Dans le 8e vol. des *Annales*, que j'avais sous les yeux lorsque je rédigeais le mémoire en question, M. Poncelet, pour faire prévaloir ses méthodes sur celle de la géométrie analytique, indique entre autres constructions celle de l'un des problèmes traités dans mon mémoire. C'est cette construction que, moi, j'avais citée, en ajoutant les mots suivants: „Voyons si ce problème se prête si difficilement aux méthodes de la géométrie analytique." Ces mots expliquent parfaitement le but de mon mémoire. Je n'avais pas alors la facilité de me procurer le *Traité des propriétés projectives*, que je connaissais seulement par le catalogue de M. Bachelier. M. Gergonne, en citant, au lieu de ses *Annales*, l'ouvrage de M. Poncelet, a reconnu par là plus particulièrement que je n'avais pu le faire, la priorité de ses recherches sur le même sujet; il ne devait pas s'attendre aux réclamations de ce géomètre pour quelques résultats obtenus par lui, qui, en eux-mêmes, *tous corollaires d'un théorème connu*, ne sont d'aucune importance.

Les arguments allégués contre moi par M. Poncelet, ont donc disparu. Je déclare après cela, que, jusqu'à ce jour, je n'ai pas vu l'ouvrage de M. Poncelet; j'ajoute que j'ignore absolument tout ce qui a été publié dans les deux derniers volumes des *Annales*, en sorte que je ne connais ni la rédaction de mon premier mémoire, ni les discussions qui se sont élevées sur mon compte.

Je vous adresse ci-joint le premier volume de mes *Développements de géométrie analytique*, qui a paru au commencement de l'année. Je pense que vous y apercevrez des méthodes qui ont dû *nécessairement* me conduire à beaucoup de résultats nouveaux. Depuis l'impression de ce volume qui a duré très-longtemps, j'ai perfectionné et étendu de beaucoup les méthodes qui y sont exposées. J'ai devant moi les matériaux pour un second volume, mais je n'en peux garantir la publication prochaine.

J'ai reconnu dès le premier moment (en parcourant les *Annales*), l'importance des travaux de M. Poncelet. Je m'en suis prononcé dans la préface du 1er vol, et si, après cela, je n'ai pas consulté son traité, c'est uniquement parceque je ne pouvais me le procurer sur le champ, et parceque le titre de mon ouvrage me permettait de le faire plus tard.

La lecture du n° cité plus haut, m'engage à rédiger de mes papiers un mémoire sur le sujet en discussion entre MM. Gergonne et Poncelet. En y exposant une théorie bien différente de celles données jusqu'ici, je ferai voir peut-être qu'une méthode purement analytique m'a fait découvrir de mon côté, le secret de la dualité: mais tout cela ne date que d'un an. J'espère que le savant rédacteur des *Annales* voudra bien recevoir ce mémoire.

Bonn, le 24 Juillet 1828.

Plücker.*)

Poncelet antwortete dann noch einmal im Band 11 des Férussac'schen Bulletin (S. 330), indem er von den Erklärungen Plücker's Notiz nimmt und nun auf Grund davon seine weitere Polemik gegen Gergonne richtet. Näheres findet man in der zweiten Ausgabe des Poncelet'schen Traité, Bd. II, S. 369 ff.

2) S. 47. Im Original steht irrthümlich „tangente en C" statt „droite AB"

*) Hierzu hat der Redacteur des Bulletin folgende Note gefügt: C'est par oubli que la publication de cette lettre a été retardée. Nous en avons retranché quelques épithètes inutiles au succès de la discussion. Le volume publié par M. Plücker, a été analysé au *Bulletin* de sept. dernier, n° 144.

und „point de contact de C“ statt „point AB“. Demgemäss trifft auch der Inhalt der „*Remarque*“ (S. 47) nicht vollständig zu; vielmehr ist die Tangente im Punkte C, resp. der Berührungspunkt der Tangente nur für die zweite Construction nöthig.

3. *Recherche graphique du cercle osculateur pour les lignes du second ordre.*

In dem Manuscript, das Plücker an Gergonne geschickt hatte, bildete dieser Artikel mit dem vorhergehenden eine einzige Abhandlung. Die Trennung wurde erst von Gergonne ausgeführt. Vgl. darüber die erste Anmerkung zu (2).

4. *Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles.*

Der Inhalt dieser Abhandlung ist zum grössten Theil im ersten Band der *Analytisch-geometrischen Entwicklungen* enthalten, den Plücker ungefähr um dieselbe Zeit abgefasst hat, wie die Abhandlung. Die Abhandlung enthält einige Versehen, die sich in den *Entwicklungen* nicht vorfinden. Im besondern bemerke ich folgendes.

1) S. 67. Das constante Glied dieser Gleichung fehlt in der Abhandlung; im § 166 der *Entwicklungen* steht sie in richtiger Form (Bd. I, S. 86).

2) S. 70. Für diese Thatsache, die hier nur aus dem allgemeinen „Continuitätsprincip“ gefolgert werden kann, hat Plücker im § 199 der *Entwicklungen* einen ausführlichen Beweis gegeben. (Bd. I, S. 107). Er zeigt dort, dass — nach dem modernen Sprachgebrauch — 1) die beiden Kreise c und c' durch Spiegelung gegen den Orthogonalkreis in einander übergehen, und dass 2) drei derartige Kreise zu einem Kreisbüschel gehören, resp. eine gemeinsame Radicalaxe besitzen.

3) S. 71. Diese Behauptung findet sich in den *Entwicklungen* nicht. Sie ist auch irrig; die Poncelet'schen Constructionen beruhen auf Sätzen und Ueberlegungen durchaus anderer Art. Man vergleiche hierüber den *Traité des propriétés projectives des figures*, § 272 ff.

Uebrigens hat Plücker ebenfalls noch Constructionen des allgemeinen Tactionsproblems gegeben, die sich wesentlich anderer Hilfsmittel bedienen, nämlich in den *Entwicklungen*, Bd. II, S. 273, bezüglich in den unter No. 12 dieser Ausgabe abgedruckten Lehrsätzen, S. 220; sowie in der 15. Abhandlung dieser Ausgabe, vgl. S. 251.

4) S. 71. Diese Specialfälle sind im § 160 und 169 der *Entwicklungen* ausführlich erörtert worden. (Bd. I, S. 79 und 87.)

5) S. 73. Die Worte „et coupent un des cercles donnés sous l'angle donné“ habe ich gemäss § 219 der *Entwicklungen* eingeschaltet. In der Abhandlung fehlen sie zwar, das folgende zeigt aber, dass Plücker das richtige gemeint hat. Von der Construction der so bestimmten beiden Kreise, von der im folgenden Absatz die Rede ist, wird übrigens auch in den *Entwicklungen* nur gezeigt, dass sie auf quadratische Gleichungen führt. (Bd. I, S. 122, Anmerkung.)

6) S. 73. In der Abhandlung finden sich noch die Worte: „dans le cas contraire il sera imaginaire.“ Der Kreis braucht aber keineswegs imaginär zu sein, wenn keine der vier Radicalaxen den Orthogonalkreis schneidet. In den *Entwicklungen* fehlt die bezügliche Behauptung. (Bd. I, S. 125.)

7) S. 74. Im § 224 der *Entwicklungen* (Bd. I, S. 125) hat Plücker den Beweis dieser Construction ausführlicher dargestellt.

8) S. 75. Der hier angezogene Beweis von Puissant ist vermuthlich derjenige, der sich im Traité de géodésie, Paris, 1805, S. 50 befindet.

5. *Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés.*

Historisch bemerke ich, dass der Gedanke, der den modernen Rechnungsmethoden der analytischen Geometrie zu Grunde liegt, im wesentlichen auf eine Arbeit von Gergonne zurückzuführen ist; in ihr wird die lineare Combination von Curven zu andern, die durch ihre Schnittpunkte gehen, zum ersten Mal methodisch ausgenutzt, zunächst freilich ohne Anwendung abkürzender Symbole. Wie Gergonne selbst sagt, war er dabei von dem Bestreben geleitet, die Gleichwerthigkeit der analytischen Methode mit der geometrischen zu zeigen. Vgl. Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan (Annales de Mathématiques, Bd. 7, S. 289). Die Einführung des Parameters λ zur Darstellung eines Curvenbüschels findet sich zuerst bei Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818, S. 28. Die bezügliche Stelle lautet folgendermassen:

„Je supposerai que trois lieux géométriques soient du même degré D, je désignerai par $E = 0$, $E' = 0$, $E'' = 0$ leurs équations. Si on multiple respectivement les deux premières par deux indéterminées m et m', et qu'on les ajoute ensuite, l'équation $mE + m'E' = 0$, résultante de cette combinaison, sera du même degré que les équations proposées et pourra représenter, vu l'indétermination du rapport $m : m'$, tout lieu géométrique du degré D, passant par les intersections des lignes ou surfaces, représentées par les équations $E = 0$, $E' = 0$. Mais puisque le lieu géométrique du degré D dont l'équation est $E'' = 0$ doit aussi passer par les mêmes intersections, il doit aussi pouvoir être représenté par l'équation $mE + m'E' = 0$; on peut donc disposer et du rapport et de l'une des deux indéterminées m et m', pour identifier les polynomes $mE + m'E'$ et E''; ce qui conduira en général à autant de relations entre m et m' et les coefficients des équations proposées que l'équation du degré D entre deux ou trois variables peut admettre des coefficients. Si on élimine ensuite les indéterminées m et m', on aura les relations définitives qui doivent exister entre les coefficients des équations proposées, pour exprimer analytiquement la communauté d'intersection des lieux géométriques qu'elles représentent."

Der hierin liegende Satz, dass durch die Schnittpunkte von zwei Curven n^{ter} Ordnung ∞^1 solcher Curven gehen, wurde übrigens in einem besondern Fall ungefähr gleichzeitig in einer Arbeit von Frégier bewiesen; vgl. Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces de tous les ordres. (Gergonne's Annales de Mathématiques, Bd. 3, S. 241; Jan. 1819.) Die Wendung zu den eigentlichen Schnittpunktssätzen ist wiederum auf Gergonne zurückzuführen, vgl. Recherches sur quelques lois qui régissent les lignes et les surfaces de tous les degrés (Annales de Mathématiques, Bd. 17, S. 214); aber erst durch Plücker erhielt sie diejenige Form, in welcher die Abhängigkeit der auf einer festen Curve durch andere ausgeschnittenen Punktsysteme von einander Gegenstand der Untersuchung wurde. Vgl. hierüber noch die Clebsch'sche Gedächtnissrede auf Plücker, S. XXIII dieser Ausgabe, sowie den Brill-Nöther'schen Bericht über algebraische Curven im dritten Band der Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung (Berlin, 1893, S. 289 ff.).

1) S. 77. Hier sind die *Analytisch-geometrischen Entwicklungen* gemeint; vgl. die Anmerkungen zu § 348 und § 392 (Bd. I, S. 226 ff. u. S. 266 ff.)

2) S. 81. Ein von Plücker gegebener Beweis dieses Satzes findet sich in den *Analytisch-geometrischen Entwicklungen* (Bd. I, S. 253).

7. *Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte.*

1) S. 89. Die von Plücker untersuchten Richtungen bilden in einer wesentlichen Beziehung *nicht* das Analogon der Krümmungsrichtungen. Für die Krümmungsrichtungen besteht bekanntlich der Satz, dass der Abstand zweier consecutiven Normalen eine unendlich kleine Grösse *dritter* Ordnung ist; dies trifft aber, wie man leicht erkennt, für die von Plücker betrachteten Richtungen nicht mehr zu. Für sie ist der Abstand im Allgemeinen nur eine unendlich kleine Grösse *zweiter* Ordnung.

Man vgl. z. B. einen Aufsatz von Vieille, Remarques sur la théorie des lignes de courbure etc. in Bd. 20 von Liouville's Journal, S. 121.

2) S. 90. Hier kehrt der bereits in der Dissertation entwickelte Gedanke wieder, zur Charakteristik der Curvenkrümmung Parabeln höherer Ordnung, resp. die Gestalt dieser Parabeln in ihrem Scheitelpunkte zu benutzen. Für die hier behandelten Probleme ist dies in der That der natürliche Gesichtspunkt. Man vgl. auch die S. 221 u. 222 dieser Ausgabe ausgesprochenen Lehrsätze.

8. *Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.*

Diese Abhandlung enthält mehrere sachliche Irrthümer, die ich im Text nicht geändert habe.

Zunächst ist zu bemerken, dass die auf S. 117 aufgestellte Gleichung (14) den Kegel und einige seiner Ausartungen nicht darstellt; doch ist das für die a. a. O. durchgeführte Untersuchung von keinem besondern Belang. Wesentlicher dagegen sind die folgenden Irrthümer.

1) S. 115. Diese beiden Gleichungen sind nicht Bedingungsgleichungen für die Fläche dritter Ordnung, sondern vielmehr Bedingungsgleichungen für die Lage des Coordinatensystems, resp. für diejenigen Punkte der Fläche, in denen ein Contact dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung stattfinden kann. Plücker giebt später (S. 118) selber an, dass dies solche Punkte der Fläche dritter Ordnung sind, durch welche zwei Geraden der Fläche gehen, er hat aber nicht bemerkt, dass die Eigenschaft, gerade Linien zu enthalten, *jeder* Fläche dritter Ordnung zukommt.

2) S. 121 ff. Der Inhalt dieses Paragraphen bedarf erheblicher Modificationen. Die Quelle des Plücker'schen Irrthums ist seine Auffassung der Irreducibilität der algebraischen Gleichungen; sie kommt in der Behauptung zum Ausdruck, dass (S. 121) nach *allen* n Richtungen des n-punktigen Contacts ein $(n+1)$-punktiger Contact stattfindet, wenn dies für *eine* der n Richtungen der Fall ist. Sind nämlich

$$f_n(\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad f_{n+1}(\varphi) = 0 \tag{1}$$

die Gleichungen, welche die Richtungen des n-punktigen und $(n+1)$-punktigen Contacts bestimmen, so sagt das gleichzeitige Verschwinden von f_n und f_{n+1} im Allgemeinen nur aus, dass beide Gleichungen *eine* Wurzel gemein haben, während Plücker daraus folgert, dass *alle* Wurzeln von f_n auch Wurzeln von f_{n+1} sind.

Von dem auf S. 122 ausgesprochenen Lehrsatz sind daher die letzten Worte:

„alsdann steigt u. s. w.“ zu streichen, und es fällt damit auch ein Theil der Folgerungen, die aus diesem Satz für die Berührung der Flächen zweiter und dritter Ordnung gezogen worden sind.

9. *Ueber ein neues Coordinatensystem.*

Den Gedanken, die Gleichungen von drei beliebigen Geraden eines Dreiecks für die Betrachtung der Kegelschnitte zu verwenden, scheint zuerst Bobillier gefasst zu haben.*) Bobillier nimmt die Gleichungen der Dreiecksseiten in der Form

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

an, und betrachtet den für beliebige Werthe von a, b, c durch die Ecken des Dreiecks gehenden Kegelschnitt

$$aBC + bCA + cAB = 0.$$

Er zeigt z. B. dass

$$bC + cB = 0, \quad cA + aC = 0, \quad aB + bA = 0$$

die Tangenten in den Endpunkten sind, und überträgt diese Resultate auf den Raum. Bobillier starb bereits im Jahr 1832 und war daher nicht mehr in der Lage, seine Arbeiten fortzusetzen.

Zeitlich liegt also das Erscheinen des Bobillier'schen Aufsatzes ungefähr ein Jahr vor dem Erscheinen der Plücker'schen Abhandlung; jedoch kann nach der ganzen Anlage von Plücker's Abhandlung kaum ein Zweifel sein, dass Plücker zu seinen Ideen selbständig gekommen ist.**) Aber wie dem auch sei, so ist trotz der vorhergehenden Bobillier'schen Publication doch Plücker als der eigentliche Begründer der Methode der homogenen Coordinaten hinzustellen. Denn es fehlt in der Bobillier'schen Arbeit vollständig die Erkenntniss, dass man es hier mit einer weittragenden Methode *allgemeiner* Coordinatenbestimmung zu thun hat, was bei Plücker den eigentlichen Ausgangspunkt bildet; gerade das Bewusstsein von der Allgemeinheit seiner Methoden, sowie die umfassende Anwendung, die er von ihnen macht, geben seiner Arbeit ihren hervorragenden Werth und rechtfertigen es, die wissenschaftliche Entwicklung der modernen analytischen Geometrie an seinen Namen zu knüpfen. Das gleiche trifft für den 1827 erschienenen *barycentrischen Calcul* von Möbius zu. Die in ihm enthaltenen grundlegenden Ideen sind bekanntlich auf ganz anderm Boden erwachsen, als dem der allgemeinen analytischen Methoden und sind daher kaum geeignet gewesen, den Ausgangspunkt der modernen analytisch-geometrischen Untersuchungen zu bilden. In Wahrheit ist ja auch die Würdigung von Möbius erst eingetreten, nachdem bereits die in dem *barycentrischen Calcul* zuerst ausgesprochenen Gedanken von anderer Seite her in den allgemeinen Inhalt des mathematischen Denkens übergegangen waren.

Ich bemerke noch, dass die Einführung homogener Coordinaten, die sich nicht auf ein im Endlichen gelegenes Coordinatendreieck, sondern auf gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten beziehen, erst im zweiten Band der Entwicklungen enthalten ist. (S. 11.)

Im Einzelnen ist noch Folgendes zu bemerken.

---

*) Gergonne's Annales de Mathématiques, Band 18, S. 320 ff. (1828.)
**) Vgl. auch die Gedächtnissrede von Clebsch, S. XVII.

1) S. 139. Diese Gleichung scheint hier nur durch Analogie begründet zu sein. Da aber aus ihr diejenigen Eigenschaften der Ellipse geschlossen werden, die ihr zu Grunde liegen, so mag hier die einfache directe Ableitung eine Stelle finden, in der Plücker mit seinen damaligen Hilfsmitteln zu ihr gelangen konnte.

Nimmt man O'' als Mittelpunkt der Ellipse, so bestehen nach (18) die Gleichungen:

$$\frac{C}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha'} = -\frac{A}{\sin\alpha''}, \tag{1}$$

als Gleichung der unendlich fernen Geraden ergiebt sich daher in diesem Fall

$$A + B\varphi + C\psi = 0 \tag{2}$$

Andrerseits hat nach (17) die Polare eines Punktes $\varphi'\psi'$ die Gleichung

$$(C + E\varphi' + F\psi')\psi + (B + D\varphi' + E\psi')\varphi + (A + B\varphi' + C\psi') = 0. \tag{3}$$

Nimmt man nun an, dass der Punkt φ', ψ' auf der unendlich fernen Geraden liegt, dass der durch ihn gehende Durchmesser die Gleichung

$$\varphi + \lambda'\psi$$

hat und die zugehörige Gleichung (3) die Form

$$\varphi + \lambda''\psi = 0,$$

so genügen λ' und λ'' der Gleichung

$$\lambda'\lambda''(AD - B^2) + (\lambda + \lambda')(BC - EA) + FA - C^2 = 0.$$

Wählt man nun noch $O''O$ und $O''O'$ als ein Paar conjugirter Durchmesser, so ist

$$BC - EA = 0$$

und wenn man endlich zur Bestimmung von λ' und λ'' die Gleichungen

$$\lambda'\lambda''AD = FA$$
$$\lambda'\lambda''B^2 = C^2$$

annimmt, so ist damit das Coordinatensystem festgelegt, und es wird

$$E = \frac{BC}{A} = -\frac{\sin\alpha\,\sin\alpha'}{\sin\alpha''}$$
$$\frac{D}{F} = \frac{B^2}{C^2} = \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\alpha},$$

wie es der Gleichung des Textes entspricht.

2) S. 151. Dies ist nicht die genaue Umkehrung des Satzes von den perspectivischen Dreiecken; vielmehr ist vor den Worten: „so schneiden . .“ einzuschalten: „nimmt auf ihnen je einen Punkt beliebig an und legt durch je zwei dieser Punkte und die drei Coordinatenpunkte noch einmal je eine Linie zweiter Ordnung“.

11. *Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen.*

In einem im December des Jahres 1829 an Quetelet gerichteten Brief, der in der Correspondance mathématique et physique zum Abdruck gekommen ist (Band 6, S. 81), reclamirt Chasles, dass er unabhängig von Plücker zur Idee der Linien und Ebenencoordinaten gekommen sei. Die Chasles'sche Idee gründet sich aber auf Vorstellungen, die in der dort ausgesprochenen Form eine analytische Verwendung nicht gestattet hätten; er betrachtet nämlich die *Abschnitte*

selbst, die von den Geraden und Ebenen auf den Coordinatenaxen bestimmt werden, als deren Coordinaten.

Die Veranlassung zu diesem Brief war ein Bericht über Plücker's neues Coordinatensystem, der kurz vorher in der Correspondance erschienen war. —

Sehr bald nachdem Plücker seine Abhandlung an das Crelle'sche Journal eingeliefert hatte, fasste er den Entschluss, den neuen Methoden eine eingehende Darstellung zu widmen; so entstand der zweite Band seiner *Analytisch-geometrischen Entwicklungen*. Aus der Vorrede dieses Bandes (S. VII) geht hervor, dass er den Wunsch hegte, die — noch nicht gedruckte — Abhandlung zurückzuziehen, und dass er nur auf den besonderen Wunsch Crelle's davon Abstand nahm.*) In den *Entwicklungen* sind die bezüglichen Probleme grösstentheils in reiferer Form dargestellt; man vgl. §§ 399—415, 455—465, 543—549, 580—600, 608—614 und 659—680. Im besondern ist auch hier zu bemerken, dass einige Versehen, die sich in der Abhandlung vorfinden, in den *Entwicklungen* richtiggestellt sind. Dies betrifft folgende Stellen.

1) S. 188. Die Bedingungen

$$D^2 - AF = 0, \quad E^2 - CF = 0$$

zeigen an, dass die Curve durch den unendlich fernen Punkt der ersten resp. zweiten Axe hindurchgeht, wie Plücker in den *Entwicklungen*, II, S. 53 richtig erkannt hat.

2) S. 208. In dem Original steht hier statt Parabel Kegelschnitt. Die Construction setzt aber voraus, dass auch die gegebene Curve eine Parabel ist, denn sie hat mit der gesuchten Curve die unendlich ferne Gerade als Tangente gemein. In den *Entwicklungen*, II, S. 229, hat Plücker selbst darauf hingewiesen, dass im Fall eines beliebigen Kegelschnitts noch eine „Hilfscurve" erforderlich wäre.

3) S. 217. Die Construction ist in dieser Form unmöglich, ebensowenig ist die in den *Entwicklungen* angegebene (Bd. II, S. 237) ausführbar. Eine Construction, die zum Ziele führt, ist z. B. folgende. Man nehme, wie bei Plücker, am, $a'm$, bn, $b'n$ und $a'm'$ als gegeben an und wähle dann c beliebig, dann ist b und a durch cm resp. cn bestimmt, und wenn nun wieder n' auf ca' beliebig angenommen wird, so ist alles weitere bestimmt, und es sind $b'n'$, am', $a'm'$ die bezüglichen drei Tangenten.

4) S. 219. Statt der Worte: „es giebt also keine andern Tangenten des verlangten Ortes als die gegebene Linie selbst", steht in den *Entwicklungen*, Band II, S. 680 richtiger, dass jede neue Tangente des verlangten Orts, die man nach der hier angegebenen Constructionsweise erhält, mit der gegebenen geraden Linie zusammenfällt. Da dies in dem Falle offenbar sei, dass jene Punkte imaginär sind, so müsse es auch in dem Fall richtig sein, dass sie reell sind.

12. *Aufgaben und Lehrsätze, erstere zu beweisen, letztere aufzulösen.*

Die meisten dieser Sätze hat Plücker im zweiten Band der *Analytisch-geometrischen Entwicklungen* ausführlich bewiesen. Der Beweis von Satz 1) findet sich S. 98, der von Satz 3) S. 274, endlich sind die Beweise von 4), 5) und 6) in den Anmerkungen zu S. 159—161 enthalten.

1) S. 222 und 223. Die Schlussbemerkung dieser beiden Sätze ist irrig. Die 12 geraden Linien des ersten Satzes schneiden sich nicht zu je dreien in den ge-

*) Vgl. auch die bezügliche Bemerkung Crelle's in dessen Journal, Bd. 6, S. 146 Anm.

nannten vier Punkten; ebenso liegen die 12 Punkte des zweiten Satzes nicht zu je dreien auf den bezüglichen vier Tangenten. In der ursprünglichen Fassung enthielten die Sätze noch ein weiteres Versehen, das bereits Plücker selbst in einer in Crelle's Journal, Band 10, S. 100 enthaltenen Notiz behoben hat.

13. *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes.*

Den Inhalt dieser Abhandlung findet man grossentheils auch in dem *System der Geometrie des Raumes*, S. 23 ff., zum Theil sogar in mehr durchgearbeiteter Form. Der Uebergang zu Liniencoordinaten führt bei den linearen Differentialgleichungen bekanntlich zu derjenigen Gleichung, die Lagrange die *adjungirte Differentialgleichung* genannt hat.

15. *Analytisch-geometrische Aphorismen II.*

1) S. 251. Der erste Beweis dieses Satzes stammt, soweit ich ermittelt habe, von Gaultier, der die wesentlichsten Sätze über die metrischen Verhältnisse der Kreisbüschel und Kugelbüschel zuerst abgeleitet hat. Vgl. Sur les moyens généraux de construire graphiquement un Cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions, Journ. de l'Ec. polyt. Heft 16, S. 124 ff.

17. *Analytisch-geometrische Aphorismen IV.*

1) S. 262. Die in der Originalabhandlung enthaltene Figur habe ich mit Rücksicht auf Anmerkung 2) durch eine andere ersetzen müssen.

Bezüglich der Fallunterscheidungen, wie sie sich bei Plücker finden, ist folgendes zu bemerken. Vier Tangenten a, b, c, d eines Kreises können auf drei Arten als Gegenseiten eines Vierecks aufgefasst werden, den Reihenfolgen

$$acdb, \quad adbc, \quad abcd$$

entsprechend; ferner kann das Viereck, innerhalb dessen der Kreis liegt, als geschlossen oder als offen angesehen werden. Bezeichnet man die Berührungspunkte der vier Tangenten mit A, B, C, D und versteht unter A_{bc} die Länge der Tangente a vom Punkte (ab) bis zum Punkt (ac), so kann man die positiven Richtungen auf diesen Tangenten so festsetzen, dass für die ersten drei Vierecke die Relationen

$$A_{cd} + B_{cd} = C_{ab} + D_{ab}$$
$$A_{db} + C_{db} = D_{ac} + B_{ac}$$
$$A_{bc} + D_{bc} = B_{ad} + C_{ad}$$

für die letzten drei dagegen die Relationen

$$A_{cd} - B_{cd} = C_{ab} - D_{ab}$$
$$A_{db} - C_{db} = D_{ac} - B_{ac}$$
$$A_{bc} - D_{bc} = B_{ad} - C_{ad}$$

bestehen. Dies giebt die von Plücker unterschiedenen zwei Fälle.

2) S. 262. In der Originalabhandlung lautet der Text, der zeigen soll, dass

$$MQ - MP = NP - NQ$$

ist, folgendermassen. „Dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$QB + MB - MP = NC + PC - NQ.$$

Es ist aber

$$NC - NQ = ND - NQ = QD - QB$$
$$PC - PA = MA - MP = MB - MP$$

und diese Gleichungen geben, wenn wir addiren, unmittelbar die vorstehende.“ Diese Erörterung zeigt aber nur, dass die erste Gleichung wirklich die Bedingung dafür ist, dass $MNPQ$ ein Tangentenviereck ist, anstatt zu zeigen, dass sie für dieses Viereck wirklich erfüllt ist. Ich habe sie daher durch einen wirklichen Beweis ersetzt.

3) S. 270. Die Worte „und construire zu denjenigen beiden Punkten Q' und R'“ fehlen in der Originalabhandlung.

20. *Über solche Punkte, die bei Curven einer höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen.*

Die Auffassung der Brennpunkte als Schnittpunkte imaginärer Tangenten — d. h. solcher, für deren Winkel mit der Abscissenaxe $\operatorname{tg}\varphi = i$ ist — tritt bei Plücker zuerst in den *Analytisch-geometrischen Entwicklungen* auf, und zwar auf S. 64 des zweiten Bandes. Plücker hatte dort die Aufgabe behandelt, Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes so zu bestimmen, dass seine Gleichung in Liniencoordinaten die Form der Kreisgleichung annimmt. Er fand als Lösung die beiden reellen und die beiden imaginären Brennpunkte, und definirt sie demgemäss als solche Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass die durch jeden derselben gehenden beiden (imaginären) Tangenten der Curve und irgend zwei in demselben sich rechtwinklig schneidende gerade Linien vier Harmonicalen bilden. Hierzu fügt er sodann folgende Bemerkung: Mit dieser Definition gleichbedeutend können wir folgende nehmen. Die Brennpunkte einer Curve zweiter Classe sind solche Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass jede durch dieselben gehende imaginäre gerade Linie eine (imaginäre) Tangente der Curve ist. In einer dazu gehörigen Anmerkung heisst es weiter: „Jede durch den Brennpunkt gehende Tangente bildet mit der ersten Axe einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $\sqrt{-1}$ ist und dies für *jede beliebige* Richtung dieser Axe. Um das Paradoxe dieser Behauptung von der analytischen Seite fortzuräumen (von geometrischer Bedeutung kann gar keine Rede sein) oder doch wenigstens zu zeigen, dass hierin kein Widerspruch liegt, füge ich folgende Bemerkung hinzu. Man hat allgemein

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi},$$

setzen wir nun $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{-1}$, so kommt

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{\sqrt{-1} + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\psi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.“$$

Man sieht aus diesen Worten, worin der Irrthum Plücker's betreffs der unendlich vielen imaginären Tangenten, die durch die Brennpunkte gehen sollen, begründet ist. Er wusste noch nicht, dass bei jeder Drehung des Coordinatensystems um den Brennpunkt die beiden Kegelschnittstangenten als die beiden Doppelstrahlen des bezüglichen Strahlenbüschels fest bleiben; eine Thatsache, deren Verständniss erst einer spätern Zeit vorbehalten war. Es ist erstaunlich, dass das Bewusstsein der analytischen und geometrischen *Continuität*, das ihn sonst nie verliess, ihn hier im Stich liess, was ihn um eine weitere Entdeckung

von principieller Tragweite gebracht hat. Man vergl. hierzu noch S. 27 und ganz besonders S. 102 des *Systems der analytischen Geometrie.*

Auch die übrigen Entwickelungen der Abhandlung leiden insofern an einer Ungenauigkeit, als nicht ausschliesslich die zwei von Plücker beobachteten Curven, die den Winkelwerthen 0 und $\frac{\pi}{2}$ entsprechen, in Frage kommen, sondern vielmehr unendlich viele, dem Umstand entsprechend, dass $\operatorname{tg} \Sigma\omega$, und damit auch $\Sigma\omega$ selbst unbestimmt wird.

Was das Historische betrifft, so bemerke ich, dass die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte schon bei Poncelet auftreten, ebenso der Satz, dass alle Kegelschnitte mit demselben Brennpunkt zwei gemeinsame imaginäre Tangenten besitzen, die sich im Brennpunkt schneiden. (Traité des propriétés projectives des figures, § 95 und § 453 ff.) Die Beziehung dieser Tangenten zu den Kreispunkten, sowie ihre Bedeutung für die Metrik des Strahlenbüschels wurde bekanntlich erst bedeutend später erkannt.

22. *Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies.*

Diese Abhandlung hat Plücker in erweiterter und theilweise umgearbeiteter Form in die im Jahr 1839 veröffentlichte *Theorie der algebraischen Curven* aufgenommen (S. 136 ff.). Dort wird im besondern der Begriff der Asymptoten und der Berührungsordnung präcisirt, sowie die Eintheilung in einigen Punkten weiter ausgeführt.

Unter einer *Asymptote m^{ter} Ordnung* versteht Plücker (a. a. O. S. 111, Anmerkung) ganz allgemein solche Curven, welche m geradlinige Asymptoten vertreten, so dass, wenn $\Omega_m = 0$ die Gleichung dieser Asymptote ist, die Gleichung der von ihr berührten Curve die Form

$$\Omega_m \Omega_{n-m} + \Omega_{n-2} = 0$$

erhält. Jede solche Asymptote hat mit der gegebenen Curve im Unendlichen einen $2m$-punktigen Contact. Für die vorliegende Abhandlung kommen im besondern nur solche Asymptoten in Frage, deren Contact in einem und demselben Punkte statthat. Hieraus erklärt es sich, dass bei Plücker Curvenarten erscheinen, die bei Euler, der diese bestimmte Definition der Asymptoten noch nicht besass, nicht auftreten. Will man z. B. die Curven vierter Ordnung haben, die auch Asymptoten vierter Ordnung besitzen, und schreibt die Gleichung der unendlich fernen Geraden in der Form $z = 0$, so wird für

$$\Omega_4 = \varphi_4 + z^2 \Omega_2$$

die allgemeinste Form einer derartigen Asymptote durch

$$\varphi_4 = p^4 + z\varphi_3 + z^2\varphi_2 + z^3\varphi_1 + z^4\varphi_0$$

dargestellt. Dabei ist zu setzen

$$\varphi_3 = \alpha p^3 + \beta p^2 q + \gamma p q^2 + \delta q^3$$

und man kann nun durch geeignete Wahl von p und q zwei der vier Coefficienten α, β, γ, δ zu Null machen, jedoch nicht δ; auf diese Weise ergiebt sich die Gl. (124) der Abhandlung; verschwindet auch der dritte Coefficient, so ergiebt sich (125). Diesen Verhältnissen hat Plücker auch bei der von ihm getroffenen Eintheilung Rücksicht getragen.

Was Plücker unter *Berührungsordnung* in den bezüglichen unendlich fernen Punkten versteht, ist in den *algebraischen Curven* ausführlich angegeben; sie ist ein Mass für die Ordnung des Unendlichkleinwerdens des Abstandes der beiden Curven. Man vgl. besonders S. 75, 90, 105, 113, 122, 128.

Ist z. B. die Gleichung der asymptotischen Parabel (a. a. O. S. 75)

$$\Pi = p^2 + \lambda q = 0,$$

wo $q = 0$ zunächst eine beliebige Parabeltangente vorstellt, so definirt Plücker den reciproken Werth, den $p^2 + \lambda q$ selbst in dem bezüglichen unendlich fernen Curvenpunkt besitzt, als das Mass der Annäherung. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt der Ebene, sind p und q seine Coordinaten und sind δ und ϑ seine Abstände von der Parabel, parallel zur Richtung von $q = 0$ und $p = 0$ gemessen, so bestehen die beiden Gleichungen

$$p^2 + \lambda(q - \delta) = 0, \quad (p - \vartheta)^2 + \lambda q = 0,$$

aus denen sich

$$\Pi = p^2 + \lambda q = \lambda\delta = \vartheta(2p - \vartheta)$$

ergiebt. Für Punkte mit unendlich grossem p folgt hieraus

$$\delta = \frac{\Pi}{\lambda}, \quad \vartheta = \tfrac{1}{2}\frac{\lambda}{p}\,\delta.$$

Diese Bestimmung ist unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems. Plücker wählt es im besondern so, dass $p = 0$ die Axe und $q = 0$ die Scheiteltangente wird, und bezeichnet alsdann den reciproken Werth von ϑ resp. δ als das absolute Mass der Annäherung der Curve an die Parabel, resp. als das Mass ihrer Annäherung nach der Richtung der Durchmesser.

Ist nun die Gleichung der Curve

$$\Pi\Omega_{n-2} + \mu\Omega_{n-m} = 0,$$

so dass die Parabel $2m$-punktig osculirt, so folgt für den unendlich fernen Osculationspunkt

$$\Pi = -\mu\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-2}} = -\mu q^{-(m-2)}$$

und daher

$$\delta = \varkappa q^{-(m-2)}$$

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2p}\,\delta = \varkappa' q^{-(m-3/2)}.$$

Ist allgemein die Parabel eine h-punktig osculirende, so ergeben sich analog Gleichungen von folgender Form

$$\delta = \varkappa q^{-(1/2 h - 2)}$$

$$\vartheta = \varkappa' q^{-(1/2 h - 3/2)}.$$

Der Werth des Exponenten giebt die Ordnung des Unendlichkleinwerdens des bezüglichen Abstandes, d. h. die Berührungsordnung. Hiernach ist z. B. auf S. 306 und 307 der Abhandlung angegeben, dass die Berührung mit der dort betrachteten Parabel im Allgemeinen die Berührungsordnung $\frac{1}{2}$ besitzt, dass sich diese Ordnungszahl für jeden noch weiter in's Unendliche fallenden Punkt um eine halbe Einheit erhöht und, in der Richtung des kürzesten Abstandes gemessen, ebenfalls um je eine halbe Einheit zunimmt.

Die *Eintheilung* Plücker's knüpft im wesentlichen an diejenige Euler's an, die davon ausgeht, ob und wie die Schnittpunkte der Curve mit der unendlich

fernen Geraden zusammenfallen; sie betrifft also die Natur der auf der unendlich fernen Geraden liegenden singulären Punkte. In der Abhandlung ist für die Eintheilung nur unterschieden, ob ein Wendepunkt, ein Undulationspunkt, ein gewöhnlicher Doppelpunkt, eine gewöhnliche Spitze, eine gewöhnliche Selbstberührung oder eine Spitze zweiter Art vorliegt, in den *algebraischen Curven* werden auch diejenigen Fälle besonders aufgeführt, in denen zwei sich dreipunktig osculirende Zweige oder endlich eine Spitze zweiter Art mit höherer Berührung beider Zweige auftritt; auf die Existenz solcher Fälle hatte übrigens Plücker an einer Stelle der Abhandlung bereits hingewiesen (vgl. S. 311). Solche Besonderheiten können sich bei den Fällen 25), 61), 62), 63), 73), 130) einstellen. Die Eintheilung ist damit insofern eine vollständige geworden, als sie alle gewöhnlichen reellen Singularitäten berücksichtigt, die bei den Curven vierter Ordnung möglich sind. Dagegen ist nach dem Vorgange von Euler das Eingehen auf imaginäre Asymptoten, die mehr als zweipunktig berühren, auf osculirende Parabeln, die mehr als fünf Punkte mit dem bezüglichen Curvenzweig gemein haben, u. s. w. (vgl. die Gleichungen (k) auf S. 306) ausser Betracht geblieben.

Ich theile hier die Curvengattungen, resp. die Gleichungen, die in der Abhandlung nicht enthalten sind, nach S. 138 ff. der *algebraischen Curven* mit.

Setzt man $pq + \nu = Y$, so kann man Gl. (25) in die Form setzen:

$$Y^2 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 + \varrho^2 p^4 = 0,$$

die einer Spitze zweiter Art entspricht. Aus ihr ergeben sich die Gleichungen

$$Y^2 \mp \varkappa^2 p^2 + \gamma p^3 + \varrho^2 p^4 = 0$$
$$Y^2 + \gamma p^3 + \varrho^2 p^4 = 0,$$

von denen die erste zwei sich dreipunktig berührende hyperbolische Zweige, die letzte eine Spitze höherer Ordnung in unendlicher Entfernung bedingt.

An die Gleichung (63) schliessen sich ganz analoge Fälle, von denen die drei ersten zwei sich im Unendlichen dreipunktig berührenden Curvenzweigen entsprechen, die beiden letzten wieder einer Spitze höherer Art. Sie unterscheiden sich von den vorstehenden nur durch das Zeichen von ϱ^2, dem Umstand entsprechend, dass ihnen ausser $p = 0$ zwei reelle Asymptoten zukommen. Diese Gleichungen sind

$$(pq + \nu)^2 \mp \varkappa^2 p^2 + \gamma p^3 - \varrho^2 p^4 = 0$$
$$p^2 r(r + \delta p + \varepsilon) + 2\nu p(r + \tfrac{1}{2}\varepsilon) + \nu^2 = 0$$
$$p^2 r(r + \delta p) + 2\nu pq + \nu^2 = 0$$
$$(pq + \nu)^2 + \gamma p^3 - \varrho^2 p^4 = 0$$
$$p^2 r\left(r + \frac{\varepsilon^2}{4\nu} p + \varepsilon\right) + 2\nu p(r + \tfrac{1}{2}\varepsilon) + \nu^2 = 0.$$

Die zweite, dritte und fünfte von ihnen beziehen sich auf den Fall, dass die reellen Asymptoten dreipunktig, resp. vierpunktig berühren.

Ebenso erhält man im Anschluss an die Gleichungen (84), (85), (86) zwei neue derartige Fälle, nämlich

$$(pq + \nu)^2 \mp \varkappa^2 p^2 + \gamma p^3 = 0$$
$$(pq + \nu)^2 + \gamma p^3 = 0.$$

Endlich kann die nämliche Specialisirung auch im Fall VIII, D eintreten. Im Anschluss an die Gleichungen (128), (129), (130) treten hier folgende Fälle auf:

$$(p^2 + \lambda q)^2 \pm \varkappa^2 p^2 + \nu p + \mu = 0$$
$$(p^2 + \lambda q)^2 + \nu p + \mu = 0.$$

Uebrigens wird der erste von ihnen bereits in der Abhandlung (S. 32) erwähnt; er entspricht zwei sich dreipunktig osculirenden Curvenzweigen. Der zweite, der in der Abhandlung fehlt, entspricht wieder einer Spitze höherer Art.

Im einzelnen ist noch folgendes zu bemerken:

1) S. 313. Hier fehlt eine Curvenart, nämlich

$$(p^2 - \xi^2) rs + \mu = 0.$$

Sie scheint deshalb übersehen zu sein, weil sie dieselbe Constantenzahl besitzt, wie die vorhergehende, nämlich 8, während im allgemeinen die Constantenzahl, jeder folgenden Specialisirung entsprechend, um eine Einheit abnimmt. Die Curvenarten 43 ff. entsprechen nämlich den Symbolen (S. 309)

$$22,\ 32,\ 42,\ 33,\ 44$$

für die 10, 9, 8, 8, 7 die Constantenzahlen sind.

In den *algebraischen Curven* ist die bezügliche Curvenart enthalten (vgl. No. 51, S. 140).

2) S. 313. Die Art 64) existirt nicht, und wird auch in den *algebraischen Curven* nicht erwähnt. Sie entspricht den besonderen Werthen von μ und ν, dass $\nu^2 = 4\mu$ ist (vgl. S. 311), was hier wegen $\nu = 0$ nicht eintreten kann.

3) S. 315. Dies ist irrig; die bezügliche Curve existirt, ohne zu zerfallen, und hat die Gleichung

$$(p^2 - \xi^2) q^2 + \mu = 0.$$

Sie fehlt auch in den *algebraischen Curven* an derjenigen Stelle, wo die sämmtlichen Curven vierter Ordnung nach ihrem Verhalten im Unendlichen aufgezählt werden. Dagegen hat Plücker an einer andern Stelle der *algebraischen Curven* (S. 192) diejenige mit ihr projectivische Curve, deren Singularitäten im Endlichen liegen, als existirend aufgeführt; es ist die Curvenart XII, die eine Selbstberührung sowie einen Doppelpunkt besitzt, dessen beide Zweige einen Wendepunkt besitzen. Man kann eine solche Curve aus einer Lemniscate leicht durch Deformation entstehen lassen.

Diesen Bemerkungen gemäss sind auch die Anmerkungen auf S. 313 und S. 315 zu modificiren.

4) S. 320. In den *algebraischen Curven* lautet diese Gleichung (vgl. No. 144 S. 147) besser

$$(p^2 + \lambda q)^2 + \nu(p + \pi) r + \mu = 0.$$

Die Parabel $p^2 + \lambda q = 0$ ist nämlich jetzt keine bestimmte mehr; sie kann durch jede Parabel $p^2 + \lambda s = 0$ ersetzt werden; alle diese Parabeln haben mit der Curve im unendlich fernen Punkte von $p = 0$, d. h. in der Spitze zweiter Ordnung fünf Punkte gemein. Der Kegelschnitt $\nu(p + \pi) r + \mu = 0$ braucht daher nur einmal durch diesen Punkt zu gehen und schneidet in ihm die Parabel; mithin kann r eine beliebige Gerade sein. Die Curve ist von acht Constanten abhängig, die durch obige Gleichung, wenn man auf $p^2 + \lambda q$ nur drei rechnet, in Evidenz treten.

23. *Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues.*

Satz XI dieser Abhandlung trifft nur in dem Fall zu, dass $n < q + s$ ist. Wenn $n \geqq q + s$ ist, so tritt zu der Zahl des Satzes noch das Glied

$$\frac{(n-q-s+1)(n-q-s+2)(n-q-s+3)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

hinzu. Dies hat Jacobi in einer im 15. Bande des Crelle'schen Journals erschienenen Abhandlung nachgewiesen. Vgl. darüber auch die auf S. 415 dieser Ausgabe enthaltene Bemerkung Plücker's.

Analoge Correctionen bedarf der Satz XIII der Abhandlung.

Im *System der Geometrie des Raumes* (1846) ist der Satz in richtiger Form enthalten; ich lasse die Ableitung, wie sie dort gegeben wird (S. 41 ff.), hier folgen. Werden die Gleichungen der drei Flächen durch

$$\Omega_n = 0, \quad \Omega'_n = 0, \quad \Omega''_n = 0 \tag{1}$$

bezeichnet, und stellt man die durch ihre gemeinsamen Durchschnittspunkte gehenden Flächen in der Form

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_n + \mu\Omega''_n = 0 \tag{2}$$

dar, so lautet sie wie folgt.

Es sei, indem wir

$$p + q = r + s = n$$

nehmen,

$$\Omega'_n \equiv \Omega_p\,\Omega_q, \quad \Omega''_n \equiv \Omega_r\,\Omega_s,$$

wonach die Gleichung (2) in die folgende übergeht:

$$\Omega_n + \lambda\Omega_p\Omega_q + \mu\Omega_r\Omega_s = 0. \tag{3}$$

Alsdann bestimmen $[\varphi(n)^*) - 2]$ Durchschnittspunkte der Fläche Ω_n mit den beiden Flächensystemen Ω_p und Ω_q, Ω_r und Ω_s fortwährend noch die übrigen $[n^3 - \varphi(n) + 2]$ Durchschnittspunkte. In denselben sämmtlichen n^3 Durchschnittspunkten schneiden sich zugleich auch alle Flächen, welche bei beliebiger Annahme von λ und μ durch die vorstehende Gleichung (3) dargestellt werden.

Es zerfallen hier die n^3 Durchschnittspunkte in vier Gruppen von bezüglich nqs, nps, nqr und npr Punkten, welche bezüglich die Durchschnittspunkte der drei nachstehend in Gruppen zusammengestellten Flächen sind:

$$\Omega_n,\ \Omega_q,\ \Omega_s; \quad \Omega_n,\ \Omega_p,\ \Omega_s; \quad \Omega_n,\ \Omega_q,\ \Omega_r; \quad \Omega_n,\ \Omega_p,\ \Omega_r.$$

Um auszudrücken, dass durch die gegebenen $[\varphi(n) - 2]$ Punkte das System einer Fläche der p^{ten} und einer Fläche der q^{ten} Ordnung gehe, ist es hinreichend anzunehmen, dass $[\varphi(n) - \varphi(p) - 2]$ dieser Punkte auf einer Fläche der q^{ten} Ordnung liegen, weil alsdann durch die übrigen $\varphi(p)$ gegebenen Punkte immer eine Fläche der p^{ten} Ordnung sich legen lässt. Ferner geht durch dieselben gegebenen $[\varphi(n-2)]$ Punkte das System einer Fläche der r^{ten} und einer Fläche der s^{ten} Ordnung, wenn von diesen Punkten $[\varphi(n) - \varphi(r) - 2]$ auf einer Fläche der s^{ten} Ordnung liegen, weil alsdann durch die übrigen $\varphi(r)$ Punkte immer noch eine Fläche der r^{ten} Ordnung sich legen lässt. Hiernach kommen von den gegebenen Durchschnittspunkten

$$\varphi(n) - \varphi(p) - \varphi(r) - 2 = \varphi(n) - \varphi(n-q) - \varphi(n-s) - 2$$

auf die Gruppe nqs, ferner $\varphi(p)$ auf die Gruppe nps und $\varphi(r)$ auf die Gruppe nqr.

*) $[\varphi(n)$ ist die Zahl der Punkte, die eine Fläche n^{ter} Ordnung bestimmen, also

$$\varphi_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 1].$$

Wir wollen zunächst von den beiden Flächen Ω_p und Ω_r abstrahiren; dann sind, nach dem Vorstehenden, die Durchschnittspunkte der drei Flächen

$$\Omega_n = 0, \quad \Omega_q = 0, \quad \Omega_s = 0,$$

deren Anzahl nqs beträgt, sämmtlich bestimmt, wenn irgend

$$\varphi(n) - \varphi(n-q) - \varphi(n-s) - 2 \tag{4}$$

derselben gegeben sind. Nun wird hierbei vorausgesetzt, dass, wenn die Flächen Ω_q und Ω_s bestimmt sind, dadurch auch die zugehörigen Flächen Ω_p und Ω_r vollkommen bestimmt werden, oder mit andern Worten, dass die Funktionen Ω_p und Ω_r in der Gleichung (3) nicht mit andern derselben Ordnung vertauscht werden können, ohne dass die Gleichung selbst sich dadurch ändert. Es ist aber

$$\lambda\Omega_p\Omega_q + \mu\Omega_r\Omega_s = \lambda(\Omega_p + \sigma\mu\Omega_{n-q-s}\Omega_s)\Omega_q + \mu(\Omega_r - \sigma\lambda\Omega_{n-q-s}\Omega_q)\Omega_s,$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$\Omega_p + \sigma\mu\Omega_{n-q-s}\Omega_s = \Omega'_p,$$
$$\Omega_r - \sigma\lambda\Omega_{n-q-s}\Omega_q = \Omega'_r$$

setzen, geht dadurch die Form der Gleichung (3) in die folgende über:

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_p\Omega_q + \mu\Omega'_r\Omega_s = 0.$$

Wenn $n < q + s$, so findet diese Umformung nicht statt; die beiden Flächen Ω_p und Ω_r lassen sich dann nicht mit andern vertauschen und verlangen zu ihrer Bestimmung die volle Anzahl von

$$\varphi(p) + \varphi(r) = \varphi(n-q) + \varphi(n-s)$$

Constanten. Für diesen Fall gilt die obige Zahlbestimmung. Wenn aber $n > q + s$, so hängt die Bestimmung der beiden Flächen Ω_p und Ω_r von so viel Constanten weniger ab, als die willkürliche Function $\sigma\Omega_{n-q-s}$ enthält, nämlich nur von

$$\varphi(n-q) + \varphi(n-s) - \varphi(n-q-s) - 1.$$

So viele von den gegebenen $[\varphi(n) - 2]$ Punkten sind also auch zur Bestimmung dieser beiden Flächen hier hinreichend, so dass wir die übrigen

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(n) \quad \varphi(n-q) - \varphi(n-s) + \varphi(n-q-s) - 1 \\ \qquad = nqs - \dfrac{qs(q+s-4)}{2} - 1 \end{array}\right. \tag{5}$$

unter den nqs Durchschnittspunkten der drei Flächen Ω_n, Ω_q, Ω_s annehmen müssen, um dadurch die übrigen

$$\frac{qs(q+s-4)}{2} + 1$$

dieser Durchschnittspunkte zu bestimmen. Mit diesem zweiten Falle können wir endlich auch den dritten Fall, dass $n = q + s$, zusammenfassen, indem alsdann $\varphi(n-q-s)$ auf Null sich reducirt.

Wir sind hiernach zu dem nachstehenden Satze gelangt:

Drei Flächen der n^{ten}, q^{ten} und s^{ten} Ordnung (wir wollen voraussetzen, dass die höchste dieser Ordnungen die n^{te} sei) schneiden sich im Allgemeinen in nqs Punkten:

1) *in dem Falle, dass $n < q + s$, sind, wenn von diesen Durchschnittspunkten*

$$\varphi(n) - \varphi(n-q) - \varphi(n-s) - 2$$

gegeben sind, dadurch die übrigen

$$nqs - \varphi(n) + \varphi(n - q) + \varphi(n - s) + 2$$

vollkommen bestimmt;

2) *in dem Falle, dass* $n \gtrless q + s$, *sind, wenn von den* nqs *Durchschnittspunkten*

$$nqs - \frac{qs(q + s - 4)}{2} - 1$$

gegeben sind, dadurch die übrigen

$$\frac{qs(q + s - 4)}{2} + 1$$

vollkommen bestimmt.

24. *Note sur les points singuliers des courbes.*

1) S. 336. Den Satz, dass ein Doppelpunkt zwei reelle und vier imaginäre Wendepunkte absorbirt, eine Spitze zwei reelle und sechs imaginäre, hat Plücker nur für Curven dritter Ordnung bewiesen. Vgl. *System der analytischen Geometrie*, S. 266. In der *Theorie der algebraischen Curven* findet sich hierüber folgende Notiz: „Was . . für den Fall der Curven dritter Ordnung bewiesen worden ist, gilt offenbar bei Curven jeder beliebigen Ordnung." (S. 208.)

25. *Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.*

1) S. 341. Diese Darstellung der einfachen Singularitäten einer Fläche von beliebiger Ordnung ist deshalb nicht exact, weil Plücker von den Tangenten*ebenen* der Fläche ausgeht, anstatt die Gesammtheit der möglichen Tangenten in dem bezüglichen Punkt in's Auge zu fassen. Je nachdem diese Tangenten einen eigentlichen Kegel zweiter Ordnung, ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene erfüllen, ergeben sich bekanntlich die einzelnen Typen eines Doppelpunktes. Das Analoge gilt für die Flächen beliebiger Classe.

2) S. 373. Die Bemerkung, dass die Wellenebenen den Kreis $M'VP$ berühren, ist irrthümlich, denn die auf OV in V senkrechte Ebene geht durch M' — die Spitze des Kegels — und kann daher die Tangente des Kreises in V nicht enthalten.

3) S. 384. Diese dritte Construction der gebrochenen Strahlen stützt sich auf einen Fehlschluss. Sind nämlich, wie in Fig. 65, E und E' die Berührungspunkte der beiden Tangentenebenen δ und δ', die durch das in O' errichtete Loth l gehen, so entsprechen ihnen mit Bezug auf das dritte Ellipsoid zwei Punkte D und D' der Wellenfläche und deren Tangentenebenen ε und ε'; die Polargerade von $l = (\delta\,\delta')$ ist daher DD', während EE' erst die Polare der Schnittlinie der beiden Tangentialebenen ε und ε' ist. Die hieraus fliessende Construction würde daher folgende sein: Man bestimme die Polargerade des in O' errichteten Lothes mit Bezug auf das dritte Ellipsoid, construire in zweien ihrer Schnittpunkte D und D' mit der Wellenfläche die Tangentenebenen und bestimme endlich zu deren Schnittlinie noch einmal die Polargerade, so trifft diese Gerade die Wellenfläche in den beiden Punkten E und E', die mit O verbunden die beiden gebrochenen Strahlen geben. Dabei ist zu beachten, dass von den vier Punkten, in denen die erste Polargerade die Wellenfläche trifft, diejenigen zwei zu benutzen sind, welche zu den gesuchten Punkten E und E' führen. Vgl. hierüber S. 510 dieser Ausgabe.

Bemerkung zu den Abhandlungen 27 bis 31.

Als Plücker im Jahre 1846 das *System der analytischen Geometrie des Raumes* herausgab, beabsichtigte er nicht mehr mathematisch zu publiciren. Der wirkliche und vermeintliche Mangel an Werthschätzung seiner Methoden und Resultate, der ihnen von Seiten seiner Zeitgenossen zu Theil wurde, hatte ihm bei der Herausgabe des obigen Werkes die Worte in die Hand dictirt, dass er „in dem Glauben, dass seine Methode der Wissenschaft bleibend angehören wird, jetzt nach mehr als zwanzig Jahren die Feder niederlege, um sie für diese Art von Forschung nicht mehr zu ergreifen." Er war zur damaligen Zeit schon sehr lebhaft mit seinen physikalischen Ideen beschäftigt, und er widmete ihnen die ganze freie Zeit, über die er verfügte.

Es ist wohl kein Zweifel, dass die in der Abhandlung 27 erwähnte Steiner'sche Arbeit über Curven dritter Ordnung, sowie die Cayley'sche Bemerkung über die Erweiterung des Pascal'schen Satzes die Veranlassung waren, die ihm noch einmal zu einer mathematischen Publication die Feder in die Hand gaben.

Dem Umstand gegenüber, dass man von seinen wissenschaftlichen Bestrebungen absichtlich oder unabsichtlich keine Notiz nahm, that er noch einmal einen letzten Schritt, um für seine Resultate und für den Werth und die Tragweite seiner Methoden einzutreten. Bei dieser Gelegenheit hat er, wie es scheint, zugleich alles dasjenige dem Druck übergeben, was sich noch als Manuscript bei ihm vorfand; die oben erwähnten Abhandlungen tragen sämmtlich das gleiche Datum. So erklärt sich wohl auch die Form, in der er die beiden Abhandlungen 29 und 30 veröffentlicht hat. Ich vermuthe, dass nicht allein die Ideen, die in diesen Abhandlungen niedergelegt sind, aus einer ziemlich frühen Zeit stammen, sondern auch die Abhandlungen selbst; wie aus S. 75 dieser Ausgabe zu ersehen ist, scheint er schon im Beginn seiner wissenschaftlichen Thätigkeit im Besitz derjenigen Vorstellungen gewesen zu sein, die an die Uebertragung der stereographischen Projectionsmethoden auf die geradlinigen Flächen zweiter Ordnung anschliessen.

27. *Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung.*

1) Die *erste* Art von Curven dritter Ordnung ist zweiteilig; sie besitzt drei Asymptoten und ein Oval; die *dritte* Art ist eintheilig und besitzt gleichfalls drei reelle Asymptoten. Vgl. *System der analytischen Geometrie*, S. 221.

2) Es ist ein eigenthümliches Zusammentreffen, dass die Hesse'sche Arbeit, in der gezeigt wurde, dass die Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung von einer algebraisch auflösbaren Gleichung zwölften Grades abhängen, deren Wurzeln die 12 Wendegeraden liefern, in dem gleichen Band des Crelle'schen Journals enthalten ist, wie die Arbeit von Plücker. (Vgl. Band 34, S. 193.) Für die allgemeine Beurtheilung vergleiche man die Bemerkung zu den Abhandlungen 27—31.

29. *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe.*

1) S. 428. Vgl. hierfür die Anmerkung zur Abhandlung 20. Die in der Anmerkung zu S. 428 citirte Stelle aus dem *System der Geometrie des Raumes* (S. 333) stützt sich in genauer Analogie zu den Verhältnissen in der Ebene auf die Thatsache, dass sich für die trigonometrische Tangente des zugehörigen Winkels der

Werth $\frac{1}{1}$ ergiebt, und damit der Winkel selbst unbestimmt wird; vgl. S. 290 dieser Ausgabe.

2) S. 428. Dieser Satz, der vielfach auf Steiner zurückgeführt wird, scheint von Quetelet bereits in seiner Dissertation *De quibusdam locis geometricis nec non de curva focali*, Gent, 1819 ausgesprochen worden zu sein. In seinem Werke „*Sciences mathématiques et physiques chez les Belges*", Bruxelles, 1866, S. 145, findet sich folgende Fassung desselben: „Si l'on fait mouvoir dans un cône droit une sphère et que, dans une position quelconque de cette dernière, supposée tangente au cône, on lui mène un plan tangent, l'intersection de ce plan et du cône aura pour foyer le point de contact de la sphère et du plan".

31. *Sur la réflexion de la lumière dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom.*

Der von Plücker erwähnte Beweis der auf S. 456 ausgesprochenen Sätze möge, so wie er im *System der Geometrie des Raumes* (S. 333) enthalten ist, hier eine Stelle finden.

Die Gleichung

$$\Omega + \varkappa\Omega' = 0, \tag{2}$$

welche bei willkürlicher Annahme von $\varkappa$ Flächen zweiter Ordnung darstellt, die alle dieselbe Durchschnittscurve haben, stellt in Verbindung mit der Gleichung

$$p = 0$$

die Durchschnittscurven in der bezüglichen Ebene (p) dar, und hieraus folgt, dass diese alle in denselben vier reellen oder imaginären Punkten sich schneiden. Wenn zwei der fraglichen Flächen gegeben sind, etwa zwei der vier gemeinschaftlichen Durchschnittskegel, so können wir sogleich eine dritte Fläche bestimmen, welche durch die reelle oder imaginäre Durchschnittscurve der beiden gegebenen und überdies durch einen gegebenen Punkt M geht. Jede durch diesen Punkt gelegte Ebene schneidet die beiden gegebenen Flächen in zwei Kegelschnitten und die zu construirende in einem solchen dritten Kegelschnitt, der dadurch bestimmt ist, dass er durch die reellen oder imaginären Durchschnittspunkte der beiden ersten und durch den gegebenen Punkt M geht. Wenn wir die beliebige Ebene (p) als gegeben betrachten und in ihr den Punkt M verrücken, so ändert sich der dritte Kegelschnitt und geht insbesondere, wenn wir denselben mit einem der drei gemeinschaftlichen zugeordneten Pole der beiden ersten Kegelschnitte zusammenfallen lassen, in einen Punkt oder ein System von zwei geraden Linien über. Dann ist die Ebene (p) eine Tangentialebene der zu construirenden dritten Fläche, und auf ihr der Punkt M der Berührungspunkt. Es giebt also immer im Allgemeinen *drei* Flächen zweiter Ordnung, welche durch die reelle oder imaginäre Durchschnittscurve zweier gegebenen Flächen zweiter Ordnung (durch acht gegebene Punkte) gehen und überdies eine gegebene Ebene berühren. Die drei Berührungspunkte auf dieser Ebene sind die drei gemeinschaftlichen zugeordneten Pole derjenigen beiden Kegelschnitte, in welchen dieselbe von den beiden gegebenen Flächen geschnitten wird.

Neben die eben gewonnenen Resultate stellen sich in Folge des Princips der Reciprocität die folgenden. Wenn man um solche Flächen zweiter Classe, welche acht gegebene Ebenen berühren, und folglich von derselben Abwickelungsfläche umhüllt werden, Kegel beschreibt, die einen gegebenen Punkt zum gemeinschaft-

lichen Mittelpunkte haben, so haben alle diese Kegel vier gemeinschaftliche Tangentialebenen und folglich drei gemeinschaftliche zugeordnete Diametralebenen. Durch eine fünfte Tangentialebene ist ein solcher Kegel vollkommen bestimmt. Es giebt im Allgemeinen *drei* Flächen zweiter Classe, welche mit zwei gegebenen dieselben gemeinschaftlichen Tangentialebenen haben, (acht gegebene Ebenen berühren) und überdies durch einen gegebenen Punkt gehen. Die drei Tangentialebenen in dem gegebenen Punkte sind die drei gemeinschaftlichen zugeordneten Diametralebenen derjenigen beiden Kegelflächen, welche diesen Punkt zu ihrem Mittelpunkte haben und den beiden gegebenen Flächen umschrieben sind.

Wir wollen die letzten Resultate auf den besonderen Fall homofocaler Flächen, in deren Reihe namentlich auch die drei gemeinschaftlichen Focalcurven gehören, übertragen. Drei solche Flächen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, haben in diesem Punkte drei Tangentialebenen, die aufeinander senkrecht stehen. Alle umschriebenen Kegelflächen, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt dieser Punkt ist, haben also diese drei Tangentialebenen zu ihren drei gemeinschaftlichen Hauptschnitten: die drei Normalen der drei Flächen also zu ihren drei gemeinschaftlichen Axen. Wir entnehmen hieraus die folgenden Sätze:

Die drei Axen irgend eines Kegels, der einer gegebenen Fläche zweiter Classe umschrieben ist, fallen mit den drei Axen jeder derjenigen drei Kegelflächen zusammen, die denselben Mittelpunkt haben und durch die drei Focalcurven gehen. Liegt der Mittelpunkt insbesondere auf der gegebenen Fläche selbst, so ist die Normale derselben in diesem Punkte eine der drei Axen jeder dieser drei Kegelflächen, so dass diese drei gemeinschaftlichen Axen die drei Normalen der durch diesen Punkt gehenden drei confocalen Flächen sind.

Wenn wir durch die Normale einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe — und offenbar können wir hier auch die beiden Paraboloide einschliessen — in einem gegebenen Punkte M eine beliebige Ebene legen, so schneidet diese Ebene eine beliebige Focalcurve der Fläche in zwei Punkten F und G und diejenige Kegelfläche, die den gegebenen Punkt zu ihrem Mittelpunkte hat und durch diese Curve geht, in zwei geraden Linien MF und MG, die mit der Normalen, weil diese eine Axe der Kegelfläche ist, gleiche Winkel bilden. Ein Lichtstrahl also, der von F ausgeht und die Fläche in M trifft, wird in Gemässheit des bekannten Spiegelungsgesetzes entweder nach dem Punkte G oder so zurückgeworfen, als wenn er von dem Punkte G käme. Vertauschen wir den Punkt M mit einem beliebigen andern Punkte der Fläche, so giebt uns dieselbe Construction statt des Punktes G einen andern Punkt derselben Focalcurve. Alle Lichtstrahlen also, welche von dem Punkte F auf der Focalcurve ausgehen, schneiden, nachdem sie von der Fläche reflectirt worden sind, entweder selbst oder rückwärts verlängert, zum zweiten Male dieselbe Focalcurve. Im ersten Falle bildet diese Focalcurve eine Lichtlinie, im zweiten Falle findet nach der Spiegelung keine Vereinigung der Lichtstrahlen statt, es nehmen dieselben aber einen solchen Weg, als wenn sie von der Focalcurve ausgegangen wären. Ein Gleiches gilt, wenn wir statt des Punktes F nach einander alle Punkte der Focalcurve betrachten. Und somit sind wir zu dem folgenden Satze gelangt, der den Schlussstein der gegenwärtigen Untersuchungen bilden mag.

Alle Lichtstrahlen, die von einer der beiden reellen Focalcurven irgend einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung, eines Ellipsoids, eines elliptischen oder hyperbolischen Hyperboloids, eines elliptischen oder hyperbolischen Paraboloids ausgehend, auf die Fläche fallen und von dieser gespiegelt werden, kehren wieder zu derselben

Focalcurve zurück, oder nehmen nach der Spiegelung einen solchen Weg, als wenn sie von dieser Focalcurve ausgegangen wären.

33. *On a new geometry of space.*

1) S. 467. Vergleiche hierzu die Anmerkung 3) zur Abhandlung 25.

34. *On a new geometry of space.*

Von dieser Abhandlung hat Plücker in Liouville's Journal, Band 11, (1866) eine französische Uebersetzung veröffentlicht. Sowohl die englische als die französische Darstellung enthalten eine grosse Zahl von Zeichenfehlern und sonstigen Ungenauigkeiten, die sich besonders im § 58 häufen; ein Theil von ihnen ist bereits in der französischen Darstellung von Plücker selbst berichtigt worden. Grossentheils stammen sie daher, dass Plücker mitten in der Abhandlung das Vorzeichen der einen Constante der Complexgleichung ohne weiteres geändert hat, was wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, dass er in seinen späteren Publicationen der einen Coordinate selbst das entgegengesetzte Zeichen beilegte. Die *Neue Geometrie des Raumes*, bei deren Redaction Plücker durch seinen damaligen Assistenten, Herrn Klein, Unterstützung fand, ist, soweit sie den Inhalt der Abhandlung wiedergiebt, von den genannten Ungenauigkeiten frei.

Alle diese Versehen habe ich gemäss den die Anmerkungen einleitenden Worten ohne weiteres getilgt.

1) S. 494. Hier ist nur der Ausdruck „point where all rays of the complex meet" ungenau; denn Plücker versteht darunter, wie aus dem folgenden hervorgeht, richtiger Weise nur Punkte von der Art, dass alle durch sie gehenden Strahlen dem Complexe angehören.

2) S. 504. Die Symmetrie der Fläche ist nicht diejenige, die Plücker angiebt. Die Vertauschbarkeit von x und y bedeutet nicht, dass die Fläche eine Drehung von 90^0 um die z-Axe gestattet, sondern vielmehr die Existenz von Symmetrieebenen, die durch die z-Axe gehen und den Winkel der beiden andern Axen halbiren.

3) S. 505. Bei Plücker steht statt „configuration" „congruency (Ω, Ω')".

4) S. 510. Vergleiche hierzu die Anmerkung 3) zur Abhandlung 25. Da die bezügliche Construction irrig ist, so ist ein grosser Theil des Inhalts von II, der sich auf diese Construction stützt, gleichfalls irrthümlich.

5) S. 535 ff. Die von Plücker bestimmte Fläche ist die Brennfläche der Congruenz. Seine Meinung, dass sie eine abwickelbare Fläche ist, ist irrig; sie beruht augenscheinlich auf der Annahme, dass wenn für einen Punkt $(x'y'z')$ zwei durch ihn gehende Strahlen coincidiren, dies für *jeden* Punkt des bezüglichen Strahles statt hat, was aber nicht der Fall ist. Trifft es für einen Strahl zu, so ist er wirklich ein *Doppelstrahl* der Congruenz, aber solcher Doppelstrahlen giebt es für eine Congruenz bekanntlich nur eine endliche Anzahl. Hiernach bedarf der Inhalt der Paragraphen 20, 21, 22 einer erheblichen Modification.

6) S. 538 ff. Die hier folgenden Entwicklungen Plücker's sind von ihm nicht genügend durchgeführt worden. Für seine Coordinatendefinition fehlt der Nachweis, dass zu beliebig gegebenen Coordinatenwerthen nur eine einzige Gerade gehört; seine vier zu Grunde gelegten Complexe schneiden sich ja auch in zwei Geraden. Die independente Definition der Liniencoordinaten ist in Uebereinstim-

mung, resp. im Anschluss an Plücker's mechanische Vorstellungen bekanntlich von Cayley und Zeuthen gegeben worden. (Math. Ann. Bd. I, S. 432.)

35. *Fundamental views regarding mechanics.*

Auf S. 557 und 558 ist statt P und R stets $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ zu lesen.

Der zweite und dritte Abschnitt leiden in physikalischer Hinsicht an einer gewissen Unklarheit, die ausführlich von Herrn Klein im vierten Bande der Mathematischen Annalen erörtert worden ist.*) In formaler Hinsicht jedoch geben die Plücker'schen Ausführungen zu keinem derartigen Bedenken Anlass. Nach der Plücker'schen Ausdrucksweise soll man sich zu einer Rotationsbewegung eine bestimmte Kraft (*rotatory force*) als Ursache denken. Es ist nun allerdings klar, dass die Rotation, die von einer auf einen Körper wirkenden Kraft hervorgebracht wird, von der Natur des Körpers abhängt, und damit kein Mass für die Kraft als *solche* abgiebt. Dessen ist sich aber auch Plücker wohl bewusst gewesen. Nach der ganzen Form seiner Entwicklungen ist seine rotatory force mehr geometrisch als dynamisch zu verstehen, er wollte mit dieser Bezeichnung augenscheinlich die analytische Dualität der Formeln zum Ausdruck bringen. Wie sich uns die Vorstellung der geradlinigen Bewegung an einen Punkt als Träger knüpft, und wir zu ihr eine gewöhnliche Kraft als Ursache denken, so postulirt er für die unendlich kleine Rotation eine *rotatory force*, wobei die *plane acted upon by the rotatory force* die Rolle des geometrischen Hilfsmittels spielt, an das wir die Vorstellung einer Rotationsbewegung knüpfen; die *central plane* (S. 561) ist diese Ebene in einer Lage, die dem Schwerpunkt eines Punktsystems entspricht u. s. w. Man vergleiche hierzu besonders auch den Anfang der 38. Abhandlung (S. 576), in der die geometrisch dualistische Natur dieser Begriffsbestimmungen deutlich zu Tage tritt, sowie die allgemeine Auffasung des Kraftbegriffs, die in § 25 der *Neuen Geometrie des Raumes* enthalten ist. Man braucht von der *rotatory force* nur zur unendlich kleinen Rotation oder auch zur Rotationsgeschwindigkeit zurückzugehen, um alle Unklarheiten sofort zu beseitigen.

Was endlich S. 559 ff. als rotatory dyname bezeichnet wird, ist das Gegenbild einer unendlich kleinen Schraubenbewegung.

Die praktische Anwendbarkeit dieser Begriffe dürfte allerdings an der nicht dualistischen Natur der Materie doch wieder scheitern.

1) S. 549. An der in der Anmerkung citirten Stelle steht $AD-BE+CF$; in der ersten Abhandlung hatte Plücker

$$x-x',\quad y-y',\quad \ldots\quad z',\quad y'z-z'y,\quad z'x-x'z,\quad x'y-y'x$$

als Coordinaten benutzt, was den Zeichenwechsel bei E bewirkt. (Vgl. oben.)

2) S. 552. In der Sache sind beide Arten von Kraftcomplexen identisch. Im ersten Fall wird jede Kraft unendlich oftmals gezählt, im zweiten Fall nur einmal; genügt aber irgend eine Kraft der ersten Art von Complexen, so genügen ihnen auch alle diejenigen, die aus ihr durch Verschiebung längs ihrer Richtungslinie entstehen. Darauf beruht die Uebereinstimmung.

3) S. 555 und 556. Es scheint, dass unter „two variable lines" die beiden Richtungen zu verstehen sind, die zu jedem Werthsystem $X:Y:Z$ und $L:M:N$ gehören, das den bezüglichen Gleichungen genügt. Die geometrischen Gebilde,

*) Ueber den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, S. 403.

die durch die sechs homogenen Grössen X, Y, Z, L, M, N bestimmt werden, sind Schrauben, bezüglich lineare Complexe. Man vergl. auch § 25 der *Neuen Geometrie des Raumes.*

4) S. 558. Diese Bemerkung ist irrig.

36. *On complexes of the second order.*

Diese Modelle waren ursprünglich Versuchsobjecte, die nach zufälligen Gesichtspunkten entstanden waren, und sind später leider in immer unexacterer Form reproducirt worden. Vgl. hierüber auch den Bericht des Herrn Klein in dem Catalog math. und phys. Modelle von W. Dyck, München 1892, S. 283.

37. *Géométrie nouvelle de l'espace.*

Den Inhalt dieser Abhandlung hat Plücker in seiner *Neuen Geometrie des Raumes* (Leipzig 1868) ausführlicher dargestellt, resp. berichtigt. Man vergl. besonders § 178, 184, 187 ff., 210—212 und 236.

1) S. 571. Die Ordnung und Classe der Complexfläche hat den Werth $2n(n-1)$, die vielfache Gerade ist eine $n(n-1)$fache. Dies beweist Plücker a. a. O. § 211 ff. folgendermassen.

Er bezeichnet die Ordnung der vielfachen Geraden durch m und die Ordnung der Complexfläche durch p und fährt dann fort:

„In dem allgemeinen Fall der Flächen eines Complexes des n^{ten} Grades lösen sich von ihren Durchschnittscurven, wenn die schneidende Ebene insbesondere durch die $m$fache Linie der Fläche geht, m Strahlen ab, welche in dieser Linie zusammenfallen. Wenn wir von diesen m Strahlen absehen, reducirt sich die Ordnung der Curve auf $(p-m)$. Von der andern Seite erhalten wir, da die Durchschnittscurven, deren Ebenen durch die $m$fache Linie gehen, Complexcurven und als solche die *allgemeinen* der n^{ten} Classe sind, für die Ordnung dieser Curven $n(n-1)$. Wir finden auf diese Weise:

$$p = n(n-1) + m.$$

. . . . . Damit eine Complexfläche vollständig durch eine Complexcurve beschrieben werde, muss sich die Meridianebene, welche diese veränderliche Curve enthält, um die beliebig angenommene vielfache Linie durch 180 Grad drehen. Bei dieser Umdrehung geht die Complexcurve in einer bestimmten Anzahl von Lagen der Meridianebene durch irgend einen gegebenen Punkt der vielfachen Linie der Complexfläche. Diese Anzahl ist zugleich die Anzahl der Schalen der Fläche, welche auf der vielfachen Linie sich schneiden, also gleich m.

Jeder Punkt der vielfachen Linie der Complexfläche ist der Mittelpunkt eines Complexkegels der n. Ordnung, an welchen sich, weil er der allgemeine dieser Ordnung ist, durch die vielfache Linie $n(n-1)$ Meridianebenen legen lassen, welche die Kegelfläche berühren. Die $n(n-1)$ Kegelseiten, nach welchen diese Berührung stattfindet, berühren zugleich, weil sie Linien des Complexes sind, die in derselben Meridianebene liegenden Meridiancurven im Mittelpunkte des Umhüllungskegels auf der vielfachen Linie. Die Zahl $n(n-1)$ bestimmt sonach die Anzahl der Meridiancurven, welche durch den auf der vielfachen Linie beliebig angenommenen Mittelpunkt des Umhüllungskegels gehen, also die Anzahl der Schalen der Complexfläche, welche nach der vielfachen Linie sich schneiden.

. . . . Wir haben

$$m = n(n-1),$$

mithin

$$p = 2n(n-1) = 2m.$$

Die Flächen eines Complexes der n^{ten} Ordnung sind von der $2n(n-1)^{ten}$ Ordnung und Classe und haben eine $n(n-1)$fache Linie."

2) S. 572. Vgl. hierzu die genaueren und ausführlicheren Entwicklungen der *Neuen Geometrie des Raumes*, § 187 ff.

38. *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et construction.*

1) S. 577. Vgl. die Anmerkung 1) der vorhergehenden Abhandlung.

2) S. 581. Diese beiden Anmerkungen rühren von Cremona her.

Zum Gedächtniss an Julius Plücker.

1) S. XVII. Ich lasse hier den allgemeinen Theil einer Recension folgen, in der sich Plücker selbst über die bis zu seiner Zeit reichende Entwicklung der analytischen Geometrie folgendermassen ausspricht: *)

Die Schwierigkeiten, welche überhaupt mit der Abfassung eines Lehrbuches der Mathematik verbunden sind, treten um so entschiedener dann hervor, wenn ein solcher Theil zum Gegenstande gewählt wird, welcher, um mit einem Worte Alles auszudrücken, die rechte Art der Behandlung noch sucht. Die geschichtliche Entwicklung einer wissenschaftlichen Disciplin knüpft sich an Perioden an. Eine gewichtige Entdeckung eröffnet neue Gesichtspunkte für die Auffassung und Behandlung der Gegenstände derselben; man erkennt die Vorzüge des Neuen an, ist dann aber gewöhnlich nur zu geneigt, das Neue als abgeschlossen und vollendet anzusehen, bis neue Entdeckungen, wiederum in der Regel sehr langsam, das gefasste Vorurtheil verbannen. Descartes that einen grossen Schritt, indem er krumme Linien durch Gleichungen ausdrückte und dadurch geometrische Sätze algebraisch berechnen lehrte. Er schuf eine neue Geometrie. Diese neue Geometrie nahm eine ganz andere Gestaltung durch Monge an, welcher, nachdem durch Euler und Lagrange schon manches vorbereitet worden war, dadurch, dass er die Gleichung der geraden Linien einführte, Rechnung und Construction streng von einander schied. Wie von Descartes, so kann man auch von Monge sagen: er schuf eine neue Geometrie. So wie die Figur auf dem Papier eine Darstellung der Curve giebt, so thut es ihm auch eine Gleichung. Er sieht einen vollständigen Parallelismus zwischen Construction und Rechnung, allen geometrischen Beziehungen entsprechen algebraische. Eine algebraische Rechnung bildet sich ab in der Construction, eine geometrische Construction wird ausgedrückt durch die Sprache der Algebra. In Monge's Vaterland fand die neue Behandlungsart der Geometrie sogleich Eingang, sie machte einen integrirenden Theil des neuen Unterrichtssystems aus. Bei uns in Deutschland haben vierzig Jahre kaum hingereicht, um die neuen Methoden allgemein zu verbreiten. Man musste erst vergessen, was man aus den Lehrbüchern von Kästner und Karsten gelernt. Und kaum fängt die Monge'sche Geometrie an, allgemein Wurzel zu schlagen, so wächst aus ihr auch schon eine Gestaltung der Geometrie wieder

*) Die Recension betrifft die Sammlung von Aufgaben zur analytischen Geometrie von J. Magnus (Jahrbuch für wissenschaftliche Kritik, Bd. 2, S. 720. 1833).

hervor, mehr von ihr vielleicht verschieden, als sie von der Cartesischen. Die Resultate, die bisher nach allen Seiten hin divergirend auseinander gingen und durch ihre Mannigfaltigkeit unübersehbar zu werden drohten, fangen an sich unter allgemeinen Gesichtspunkten zusammenzustellen und ein gewissermassen organisches Ganze, oder, mit Hrn. Gergonne zu sprechen, ein wahrhaft philosophisches System zu bilden. Mit der Allgemeinheit des Gesichtspunktes nimmt die Leichtigkeit der Behandlung zu, und ohne dass die Uebersicht des Ganzen dadurch erschwert wird, kommen unzählige neue Resultate zum Vorschein. Im Grunde ist es ein und dasselbe Ziel, nach welchem alle neuern Bestrebungen, selbst diejenigen der reinen Geometrie gerichtet sind. Nur bildet sich Jeder, der Eigenthümliches zu Tage fördert, einen Algorithmus, der seiner Auffassungsart des Gegenstandes angepasst ist, jeder denkt, spricht und schreibt in seiner eigenen Sprache. Auch wenn wir uns bloss auf die analytische Behandlungsweise beschränken, begegnen wir in der Darstellung einer solchen Verschiedenheit, dass die grösseste Vertrautheit mit dem Gegenstande und ein eigenthümliches Talent dazu gehört, jeder neuen Entwicklung ihre richtige Stelle anzuweisen. Ja in manchen Fällen ist es schon schwer wahrzunehmen, dass Aufsätze, in welchen der weniger Unterrichtete die verschiedenartigsten Gegenstände sieht, im Grunde doch ein und dasselbe enthalten, nur unter eigenthümlichen Gesichtspunkten aufgefasst, und unter den verschiedenartigsten Algorithmen dargestellt. Und zuletzt, wenn es gilt, das Vorliegende, nachdem Alles geordnet worden, in ein Ganzes zusammen zu stellen, fühlt man die Nothwendigkeit, sich selbst für einen bestimmten Algorithmus zu erklären. Wie viel aber auf die Wahl desselben, sowohl in Absicht auf Belehrung, als auch auf die weitere Ausbildung der Wissenschaft selbst ankommt, bedarf keiner weiteren Erörterung.

2) S. XVII. In der Vorrede zum zweiten Band der *Entwicklungen* (S. III) drückt sich Plücker über den Ursprung seiner Methoden folgendermassen aus:

Als ich damals absichtslos einige Kreise auf das Papier hinzeichnete, kam mir aus dem Anblick der Figur die Vermuthung, dass die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier von drei gegebenen Kreisen in demselben Punkte sich schneiden. Bei der Verification dieses Satzes auf analytischem Wege erwartete ich auf Eliminationen zu stossen, ich suchte Weitläufigkeiten auf und fand keine: ich kam zum Beweise dieses Satzes durch die einfachste Verbindung dreier Symbole. In dieser Beweisführung lag zugleich die allgemeine Theorie der gemeinschaftlichen Chorden je zweier beliebigen Kreise, weil die Bedingung, dass solche Kreise sich wirklich schneiden, auf keine Weise in jener symbolischen Bezeichnung ausgedrückt ist. Nichts war hiernach natürlicher, als dieselbe Art der Beweisführung auch auf lineare Gleichungen und die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung auszudehnen und hierbei durch unbestimmte Coefficienten die allgemeine Verbindung solcher Gleichungen auszudrücken.

3) S. XVII. Ein Auszug aus der Bobillier'schen Arbeit befindet sich auf S. 599. Was übrigens die *Methode der abgekürzten Bezeichnung* betrifft, so ist es nicht die Einführung der Symbole selbst, sondern vielmehr ihre systematische Ausnützung und Vervollkommnung, die von Plücker geleistet wurde und zwar durchaus selbständig und ohne Vorgänger. Man vergl. seine erste sich in dieser Richtung bewegende Abhandlung, S. 159 ff. dieser Ausgabe, sowie ganz besonders die auf S. 407 und 408 enthaltenen Ausführungen. Als Ausgangspunkt dieser Methoden wird man die S. 597 abgedruckte Bemerkung von Lamé betrachten dürfen, und die an sie anschliessenden Sätze über Polaren und Schnittpunkts-

systeme von Gergonne, Bobillier, Plücker und Anderen, die in den *Annales de Mathématiques* enthalten sind und zeitlich vor dem Erscheinen der *Analytisch-geometrischen Entwicklungen*, sowie vor dem obigen Aufsatz Bobillier's liegen.

4) S. XIX. Plücker erwähnt in der Vorrede zum zweiten Band der *Analytisch-geometrischen Entwicklungen* (S. VII) eine Rede, die er für eine öffentliche Gelegenheit im August 1829 auszuarbeiten hatte. In dieser habe er den neuen Schritt gethan, der ihn zur eigentlichen Conception der Liniencoordinaten hingeleitet habe. Bereits im Juli 1828 hatte er einen Aufsatz an Gergonne abgesandt, in dem er zeigte, wie er seinerseits, unabhängig von Gergonne und Poncelet, auf rein analytischem Wege, zu einem Princip der Reciprocität resp. zu einer weit allgemeineren Auffassung derselben gelangt sei. Dieser Aufsatz ist jedoch ungedruckt geblieben.*) Um so mehr scheint es angezeigt, hier den allgemeinen Theil der oben erwähnten Rede abzudrucken**); sie deckt sich im wesentlichen mit dem Inhalt der Entwicklungen auf S. 149 dieser Ausgabe.

Nachdem Plücker eine Darstellung des Gesetzes der Reciprocität resp. Dualität gegeben hat, fährt er folgendermassen fort:

„Omnibus de quibus huc usque disserui, a viris supra laudatis Ponceletio et Gergonnio, aut jam exposita sunt aut e theoria, cujus jecerunt fundamenta, sponte emanant. Dum hi viri de palma hujus inventionis summa contentione certant, mihi, omnium quae docuerunt ignaro, contigit, ut novas methodos pure analyticas invenirem inventasque explanarem, e quibus serius cognovi theoriam polarium reciprocarum, qualem supra exposui, tamquam rem peculiarem nullo negotio deduci posse. Theoria nostra analytica variatione nititur constantium, quae aequationibus curvarum aut superficiorum continentur. Quae ut pluribus exponantur, hoc quidem tempore, ubi omnia mihi demonstrandi auxilia desunt, minime commodum videtur. Sufficiat igitur ea explicare quae ad theoriam polarium reciprocarum proprie pertinent. Linea recta, ut satis constat, per aequationem primi gradus inter duas variabiles et tres constantes (quas ad duas etiam reducas licet) analytice repraesentatur. Jam si in ejusmodi aequatione trium harum constantium duae, quae ad libitum eligi possunt, ut coordinatae et variabiles considerantur, et variabilibus omnes paulatim valores, qui rectae datae conveniunt, attribuuntur: aequationes inde exoriuntur numero infinitae, quibus rectae repraesentantur transeuntes per idem punctum fixum, cujus coordinatae sunt duae illae aequationis propositae constantes, quas deinde ut variabiles consideravimus. Quam ob causam hoc punctum fixum nominavi rectae propositae polum, atque invicem rectam puncti fixi polarem. Quibus praemissis licet jam omnia quae supra exposui de polis et polaribus, nunc eadem plane ratione exponere atque ita nova theoriae polarium reciprocarum fundamenta ponere. Facile praeterea intelligitur, inter modos polares reciprocas definiendi et analyticum et geometricum nullum omnino discrimen esse, dummodo, si ad variabiles et duas illas constantes quae deinde ut variabiles considerantur spectas, symmetrica est rectae aequatio. Tum enim in theoria analytica aequatio auxiliaris locum tenet conicae auxiliaris vel directricis, qua in theoria pure geometrica carere non possumus, immo ne in theorematibus quidem quae ad rectas solummodo spectant. Apertum simul est, theoriam nostram in indefinitum extendi posse, si tali aequationi primi gradus auxiliari substituatur qualiscunque aequatio cujusvis gradus, quae duas vel plures

*) Vgl. auch die Anmerkung zu S. 149 dieser Ausgabe.
**) Es ist dies das in der Vorrede erwähnte Manuscript.

constantes implicet. Quodsi enim hae constantes primi sunt gradus, invenitur genus curvarum, quarum proprietates ex iis quae rectis conveniunt ope aequationis auxiliaris deduci possunt. Postremo facile patet qualis cognatio sit inter analyticam generalemque polarium reciprocarum theoriam et doctrinam illam celeberrimam curvarum evolvendarum atque evolutarum, quae simili modo variatione constantium nititur."

5) S. XXX. Ich möchte hier darauf hinweisen — in der Gedächtnissrede von Clebsch tritt dieser Umstand nicht hinreichend zu Tage — dass meines Erachtens die Hauptleistung von Plücker, die ihn über den Standpunkt des Jahres 1846 hinausführte, die Einführung der fünften Coordinate η war. Erst dadurch gelang es ihm, den analytischen Resultaten geometrische Vollständigkeit zu geben. Man vergl. z. B. S. 478 dieser Ausgabe.

510.8 P73 1895

a39001 006892890b

20258